Mines-Ponts Maths 1 2022

Pandou

19 avril 2022

1 Fonctions L et P

1. Soit $z \in D$, alors $\left|\frac{z^n}{n}\right| \leqslant |z|^n$ et $\sum |z|^n$ converge. Ainsi, par comparaison, $\sum \frac{z^n}{n}$ converge absolument, donc converge.
   Lorsque $z \in \mathbb{R} \cap D$, on a
   $$\sum_{n \geqslant 1} \frac{z^n}{n} = -\ln(1-z)$$
2. Soit $\varphi : t \in [0,1] \longmapsto L(tz)$, alors on a $\left|\frac{(tz)^n}{n}\right| \leqslant \frac{|z|^n}{n}$, de sorte que la série de fonctions définissant φ est normalement convergente sur $[0,1]$.
   Ainsi, φ est dérivable et
   $$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \sum_{n \geqslant 1} z^n t^{n-1} \\ &= z \sum_{n \geqslant 0} (tz)^n \\ &= \frac{z}{1-tz} \end{aligned}$$
   On note $\psi(t) = (1-tz)e^{L(tz)}$ de sorte que ψ est dérivable sur $[0,1]$ comme composée de fonctions dérivables et on a
   $$\begin{aligned} \psi'(t) &= -ze^{L(tz)} + (1-tz)\varphi'(t)e^{L(tz)} \\ &= \left(-z + (1-tz)\frac{z}{1-tz}\right) e^{L(tz)} \\ &= 0 \end{aligned}$$
   Ainsi, ψ est constante sur $[0,1]$. En particulier
   $$\begin{aligned} (1-z)\exp\big(L(z)\big) &= \psi(1) \\ &= \psi(0) \\ &= e^{L(0)} \\ &= 1 \end{aligned}$$
   D'où,
   $$\exp\big(L(z)\big) = \frac{1}{1-z}$$
3. Soit $z \in D$, on a
   $$\begin{aligned} \big|L(z)\big| &\leqslant \sum_{n \geqslant 1} \frac{|z|^n}{z} \\ &= -\ln\big(1-|z|\big) \end{aligned}$$
   d'après 1., car $|z| \in \mathbb{R} \cap D$.
   Si $z \in D$, $|z|^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc, on a
   $$\begin{aligned} \big|L(z^n)\big| &\leqslant -\ln\big(1-|z|^n\big) \\ &\sim |z|^n \end{aligned}$$
   Et donc, par comparaison, $\sum L(z^n)$ converge absolument, donc converge.

2 Développement en série entière de P

4. Soit $(a_1, ..., a_N) \in P_{n,N}$, soit n_0 un indice tel que $a_{n_0} = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant N} a_k$, alors

$$a_{n_0} \leqslant \sum_{k=1}^{N} k a_k = n$$

Ainsi, $(a_1, ..., a_N) \in [\![0, n_0]\!]^N$, donc $P_{n,N}$ est fini.

5. Soit $(a_1, ..., a_N) \in P_{n,N}$, alors la suite $(a_1, ..., a_N, 0) \in P_{n,N+1}$, de sorte qu'on a une application injective $\varphi_{n,N} : P_{n,N} \longrightarrow P_{n,N+1}$, donc $\big(p_{n,N}\big)_N$ est croissante.
Si $n = 0$, $(p_{0,N}) = 1$, en effet la seule partition de 0 est $(0, ..., 0)$.
Sinon, on montre que l'application $\varphi_{n,n}$ précédente est surjective. Soit $(a_1, ..., a_{n+1})$ une partition de n. Alors, la somme $\sum\limits_{k=1}^{n+1} k a_k$ est une somme de $n+1$ entiers positifs. Elle ne peut valoir n que si l'un des a_k est nul.
Quitte à renuméroter, on suppose que c'est a_{n+1} et donc $(a_1, ..., a_n)$ est une partition de n.
On a ainsi montre que $\varphi_{n,n} : P_{n,n} \longrightarrow P_{n,n+1}$ est surjective et injective, donc bijective, ainsi, on a bien $p_{n,n} = p_{n,n+1}$.

6. *Pourquoi la récurrence ? Veulent-ils redémontrer le produit de Cauchy général par récurrence ?*
On a

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{N} \frac{1}{1 - z^k} &= \prod_{k=1}^{N} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} z^{kn} \right) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{a_1 + 2a_2 + \ldots + N a_N = n} 1 \right) z^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n,N} z^n
\end{aligned}$$

7. Soit $(n, N) \in \mathbb{N}^2$, on a

$$\big|(p_{n,N+1} - p_{n,N}) z^n\big| = \big(p_{n,N+1} - p_{n,N}\big)|z|^n$$

Commençons par sommer sur n, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{n \in \mathbb{N}} \big(p_{n,N+1} - p_{n,N}\big)|z|^n &= \sum_{n \in \mathbb{N}} p_{n,N+1}|z|^n - \sum_{n \in \mathbb{N}} p_{n,N}|z|^n \\
&= \prod_{k=1}^{N+1} \frac{1}{1 - |z|^k} - \prod_{k=1}^{N} \frac{1}{1 - |z|^k} \\
&= \left(\prod_{k=1}^{N} \frac{1}{1 - |z|^k} \right) \cdot \left(\frac{1}{1 - |z|^{N+1}} - 1 \right) \\
&= \left(\prod_{k=1}^{N} \frac{1}{1 - |z|^k} \right) \cdot \left(\frac{|z|^{N+1}}{1 - |z|^{N+1}} \right) \\
&\leqslant |z|^{N+1}
\end{aligned}$$

et $\sum\limits_{N} |z|^{N+1}$ converge, on en déduit que la famille $\big((p_{n,N+1} - p_{n,N}) z^n\big)_{(n,N) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable. On peut donc inververtir les sommes :

$$\begin{aligned}
\sum_{N \in \mathbb{N}} \big(p_{n,N+1} - p_{n,N}\big) z^n &= \sum_{N=0}^{n-1} \big(p_{n,N+1} - p_{n,N}\big)|z|^n \\
&= \big(p_{n,n} - p_{n,0}\big)|z|^n \\
&= p_n |z|^n
\end{aligned}$$

Et,

$$\begin{aligned}
\sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{N\in\mathbb{N}}\big(p_{n,N+1}-p_{n,N}\big)z^n &= \sum_{n\in\mathbb{N}} p_n z^n \\
&= \sum_{N\in\mathbb{N}}\sum_{n\in\mathbb{N}}\big(p_{n,N+1}-p_{n,N}\big)z^n \\
&= \sum_{N\in\mathbb{N}}\left(\prod_{k=1}^{N+1}\frac{1}{1-z^k}-\prod_{k=1}^{N}\frac{1}{1-z^k}\right) \\
&= \prod_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{1-z^k} \\
&= P(z)
\end{aligned}$$

On en déduit que la série entière $\sum p_n x^n$ a rayon au moins 1.

8. On calcule formellement

$$\begin{aligned}
&\int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta}P(e^{-t+i\theta})\mathrm{d}\theta \\
&\qquad= \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta}\sum_{k\in\mathbb{N}} p_k e^{-kt+ik\theta}\mathrm{d}\theta \\
&\qquad= \sum_{k\in\mathbb{N}}\int_{-\pi}^{\pi} p_k e^{-kt}e^{i(k-n)\theta}\mathrm{d}\theta \\
&\qquad= 2\pi\int_{-\pi}^{\pi} p_n e^{-nt}
\end{aligned}$$

Justifions l'interversion. La série de fonction **de la variable** θ : $\sum_k p_k e^{-kt+ik\theta-in\theta}$ est normalement convergente car $\sum p_k x^k$ converge si $|x|<1$ (et $e^{-t}<1$). Ainsi, l'interversion est justifiée sous cette hypothèse de convergence normale.
D'où,

$$p_n=\frac{e^{nt}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta}P(e^{-t+i\theta})\mathrm{d}\theta$$

3 Contrôle de P

8. On a

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1-x}{1-xe^{i\theta}}\right| &= \left|\frac{\exp\big(L(xe^{i\theta})\big)}{\exp\big(L(x)\big)}\right| \\
&= \left|\exp\big(L(xe^{i\theta})-L(x)\big)\right| \\
&= \exp\Big(\mathrm{Re}\big(L(xe^{i\theta})-L(x)\big)\Big)
\end{aligned}$$

Et on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\big(L(xe^{i\theta})-L(x)\big) &= \sum_{n\in\mathbb{N}^*}\mathrm{Re}\left(\frac{x^n e^{in\theta}-x^n}{n}\right) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{x^n}{n}\big(\cos(n\theta)-1\big) \\
&= x\big(\cos(\theta)-1\big)+\sum_{n\geqslant 2}\frac{x^n}{n}\big(\cos(n\theta)-1\big) \\
&\leqslant x\big(\cos\theta-1\big)
\end{aligned}$$

car $\cos(n\theta)\leqslant 1$ et donc on en déduit que

$$\left|\frac{1-x}{1-xe^{i\theta}}\right|\leqslant \exp\big(x(\cos\theta-1)\big)=\exp\big(-(1-\cos\theta)x\big)$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
\left|\frac{P(xe^{i\theta})}{P(x)}\right| &= \prod_{k=1}^{+\infty}\left|\frac{1-x^k}{1-x^ke^{ik\theta}}\right| \\
&= \prod_{k=0}^{+\infty}\left|\frac{1-x^k}{1-x^ke^{ik\theta}}\right| \\
&\leqslant \prod_{k=0}^{+\infty}\exp\left(-(1-\cos(k\theta))x^k\right) \\
&= \exp\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\cos(k\theta)x^k-x^k\right)\right) \\
&= \exp\left(-\frac{1}{1-x}+\mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-xe^{i\theta}}\right)\right)
\end{aligned}$$

car $\sum\cos(k\theta)x^k=\mathrm{Re}\left(\sum e^{ik\theta}x^k\right)$.

9. On a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-x}-\mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-xe^{i\theta}}\right) &= \frac{1}{1-x}-\frac{1-x\cos(\theta)}{(1-x\cos\theta)^2+x^2\sin(\theta)} \\
&= \frac{1}{1-x}-\frac{1-x\cos\theta}{1+x^2-2x\cos(\theta)} \\
&= \frac{1}{1-x}-\frac{1-x\cos\theta}{(1-x)^2+2x(1-\cos\theta)} \\
&= \frac{\big((1-x)^2+2x(1-\cos\theta)\big)-(1-x)(1-x\cos\theta)}{(1-x)\big((1-x)^2+2x(1-\cos\theta)\big)} \\
&= \frac{1+x^2-2x\cos\theta-1-x^2+x\cos\theta+x}{(1-x)\big((1-x)^2+2x(1-\cos\theta)\big)} \\
&= \frac{x(1-\cos\theta)}{(1-x)\big((1-x)^2+2x(1-\cos\theta)\big)}
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\left|\frac{P(xe^{i\theta})}{P(x)}\right| \leqslant \exp\left(-\frac{x(1-\cos\theta)}{(1-x)\big((1-x)^2+2x(1-\cos\theta)\big)}\right)$$

En distinguant les deux possibilités $(1-x)^2\geqslant x(1-\cos\theta)$ ou $(1-x)^2\leqslant x(1-\cos\theta)$, on trouve les deux majorations possibles :

$$\left|\frac{P(xe^{i\theta})}{P(x)}\right|\leqslant\exp\left(-\frac{x(1-\cos\theta)}{(1-x)\big(x(1-\cos\theta)+2x(1-\cos\theta)\big)}\right)=\exp\left(-\frac{1}{3(1-x)}\right)$$

ou

$$\left|\frac{P(xe^{i\theta})}{P(x)}\right|\leqslant\exp\left(-\frac{x(1-\cos\theta)}{(1-x)\big((1-x)^2+2(1-x)^2\big)}\right)=\exp\left(-x\frac{1-\cos\theta}{3(1-x)^3}\right)\leqslant\exp\left(-\frac{1-\cos\theta}{6(1-x)^3}\right)$$

car $x\geqslant\dfrac{1}{2}$.

4 Intermède : quelques estimations de sommes

10. On calcule

$$\begin{aligned}
\varphi'_{n,\alpha}(x) &= nx^{n-1}e^{-\alpha x}(1-e^{-x})^{-n}+x^n(-\alpha e^{-\alpha x})(1-e^{-x})^{-n}+x^ne^{-\alpha x}(-ne^{-x})(1-e^{-x})^{-n-1} \\
&= \frac{x^{n-1}e^{-\alpha x}}{(1-e^{-x})^{n+1}}\left[n(1-e^{-x})-\alpha x(1-e^{-x})-nxe^{-x}\right]
\end{aligned}$$

On a alors

- **Au voisinage de** 0.

$$\varphi_{n,\alpha}(x) = \frac{x^n}{\big(x+o(x)\big)^n} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$$

Et,

$$\begin{aligned}
\varphi'_{n,\alpha}(x) &= \frac{x^{n-1}}{\big(x+o(x)\big)^{n+1}}\left[n\left(x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)-\alpha x\big(x+o(x)\big)-nx\big(1-x+o(x)\big)\right]\\
&= \frac{x^{n-1}}{\big(x+o(x)\big)^{n+1}}\left[\left(\frac{n}{2}-\alpha\right)x^2+o(x^2)\right]\\
&\underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{n}{2}-\alpha
\end{aligned}$$

On en déduit ainsi que $\varphi_{n,\alpha}$ et $\varphi'_{n,\alpha}$ se prolongent en des fonctions continues en 0, d'où leur intégrabilité en 0.

- **Au voisinage de** $+\infty$.

$$\varphi_{n,\alpha}(x) = \left(\frac{x}{1-e^{-x}}\right)^n e^{-\alpha x} \underset{x\to+\infty}{\sim} x^n e^{-\alpha x}$$

d'où l'intégrabilité de $\varphi_{n,\alpha}$ en $+\infty$.
Et,

$$\varphi'_{n,\alpha}(x) = \frac{nx^{n-1}}{(1-e^{-x})^n}e^{-\alpha x} - \alpha\frac{x^n}{(1-e^{-x})^n}e^{-\alpha x} - \frac{nxe^{-x}}{(1-e^{-x})^{n+1}}e^{-\alpha x}$$

On regarde terme à termes. Le deuxième terme est intégrable par les mêmes arguments que pour $\varphi_{n,\alpha}$.
Le premier terme est intégrable car $\dfrac{nx^{n-1}}{(1-e^{-x})^n}e^{-\alpha x} \underset{x\to+\infty}{\sim} nx^{n-1}e^{-\alpha x}$.
Le dernier terme est intégrable car $\dfrac{nxe^{-x}}{(1-e^{-x})^{n+1}}e^{-\alpha x} \underset{x\to+\infty}{n} xe^{-x}e^{-\alpha x}$.
Ainsi, $\varphi'_{n,\alpha}$ est intégrable en $+\infty$.

11. On a $S_{n,\alpha}(t) = \dfrac{1}{t^n}\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\varphi_{n,\alpha}(kt)$. On a montré précédemment que $\varphi_{n,\alpha}(x) = O(e^{-\alpha x})$ quand $x \longrightarrow +\infty$. On en déduit alors que $\varphi_{n,\alpha}(kt) = O(e^{-\alpha kt})$ et $\sum e^{-\alpha kt}$ converge, donc par comparaison, $S_{n,\alpha}$ est bien défini.
Comme $\varphi_{n,\alpha} > 0$, on en déduit aussi immédiatement que $S_{n,\alpha} > 0$.
On calcule enfin par des intégration par parties

$$\begin{aligned}
t^{n+1}S_{n,\alpha}(t) - \sum_{k=0}^{+\infty}\int_{kt}^{(k+1)t}(x-kt)\varphi'_{n,\alpha}(x)\mathrm{d}x &= t\sum_{k=1}^{+\infty}\varphi_{n,\alpha}(kt) - \sum_{k=0}^{+\infty}\int_{kt}^{(k+1)t}(x-kt)\varphi'_{n,\alpha}(x)\mathrm{d}x\\
&= \sum_{k=1}^{+\infty}\left(t\varphi_{n,\alpha}(kt) - \int_{kt}^{(k+1)t}(x-kt)\varphi'_{n,\alpha}(x)\mathrm{d}x\right) - \int_0^t x\varphi'_{n,\alpha}(x)\mathrm{d}x\\
&\quad (u = x-kt)\\
&= \sum_{k=1}^{+\infty}\left(t\varphi_{n,\alpha}(kt) - \int_0^t u\varphi'_{n,\alpha}(u+kt)\mathrm{d}u\right) - \int_0^t x\varphi'_{n,\alpha}(x)\mathrm{d}x\\
&= \sum_{k=1}^{+\infty}\left(t\varphi_{n,\alpha}(kt) - t\varphi_{n,\alpha}\big((k+1)t\big) + \int_0^t \varphi(u+kt)\mathrm{d}u\right)\\
&\quad -t\varphi'_{n,\alpha}(t) + \int_0^t \varphi(x)\mathrm{d}x\\
&= \sum_{k=1}^{+\infty}\Big(t\varphi_{n,\alpha}(kt) - t\varphi_{n,\alpha}\big((k+1)t\big)\Big) - t\varphi'_{n,\alpha}(t)\\
&\quad + \sum_{k=0}^{+\infty}\int_0^t \varphi_{n,\alpha}(u+kt)\mathrm{d}u\\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}\int_{kt}^{(k+1)t}\varphi_{n,\alpha}(x)\mathrm{d}x\\
&= \int_0^{+\infty}\varphi_{n,\alpha}(x)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Ainsi, il suffit de vérifier que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\int_{kt}^{(k+1)t}(x-kt)\varphi'_{n,\alpha}(x)\mathrm{d}x = O(t)$.

12. On a formellement avec une IPP

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{xe^{-x}}{1-e^{-x}}\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty} x\sum_{n\geqslant 1}e^{-nx}\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n\geqslant 1}\int_0^{+\infty} xe^{-nx}\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n\geqslant 1}\int_0^{+\infty}\frac{1}{n}e^{-nx}\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}\\ &= \frac{\pi^2}{6}\end{aligned}$$

Je vous laisse la justification de l'interversion, je suis fatigué :)

Preuve du résultat admis...

5 Contrôle des fonctions caractéristiques

13. On a

$$\begin{aligned}\Phi_X(\theta) &= \mathbb{E}\big[\cos(\theta X)+i\sin(\theta X)\big]\\ &= \mathbb{E}\big[e^{i\theta X}\big]\end{aligned}$$

On a $\left|\mathbb{E}\big[e^{i\theta X}\big]\right| \leqslant \mathbb{E}[1] = 1$.

14. On a par la formule de transfert :

$$\begin{aligned}\Phi_{aX+b}(\theta) &= \mathbb{E}\big[e^{ia\theta X+b\theta}\big]\\ &= e^{ib\theta}\mathbb{E}\big[e^{ia\theta X}\big]\\ &= e^{ib\theta}\sum_{k\geqslant 1}e^{ia\theta k}\mathbb{P}(X=k)\\ &= e^{ib\theta}\sum_{k\geqslant 1}e^{ia\theta k}q^{k-1}p\\ &= \frac{pe^{i(a+b)\theta}}{1-qe^{ia\theta}}\end{aligned}$$

15. La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}n^k\mathbb{P}(X=n) = \sum_{n\geqslant 1}n^kq^{n-1}p$ est convergente et vaut $\dfrac{pn}{1-nq}$, donc X^k est d'espérance finie.
On a d'après 14.

$$\Phi_X(\theta) = \frac{pe^{i\theta}}{1-qe^{i\theta}}$$

qui est bien $\mathcal{C}^\infty$. Pour le calcul des dérivées, on préfère l'expression sous forme de série

$$\Phi_X(\theta) = \sum_{n\geqslant 1}e^{in\theta}q^{n-1}p$$

Cette série de fonctions **de la variable** θ est normalement convergente, en particulier, on peut dériver terme à terme

$$\Phi_X^{(k)}(0) = \sum_{n\geqslant 1}i^kn^kq^{n-1}p = i^k\mathbb{E}[X^k]$$

16. On construit la suite (P_k) par récurrence.
Si $k=0$, on a $\Phi_X(\theta) = \dfrac{pe^{i\theta}}{1-qe^{i\theta}}$ et $P_0 = 1$ convient.

Supposons que $(P_0,...,P_k)$ soient construits, alors on différentie la relation $\Phi^{(k)}(\theta) = pi^k e^{i\theta}\dfrac{P_k(qe^{i\theta})}{(1-qe^{i\theta})^{k+1}}$ et on trouve

$$\begin{array}{rcl}\Phi^{(k+1)}(\theta) & = & pi^{k+1}e^{i\theta}P_k(qe^{i\theta})(1-qe^{i\theta})^{-k-1} \\ & & +pi^k e^{i\theta} iqe^{i\theta}P_k'(qe^{i\theta})(1-qe^{i\theta})^{-k-1} \\ & & +pi^k e^{i\theta}P_k(qe^{i\theta}) \times (k+1)qie^{i\theta}(1-qe^{i\theta})^{-k-2} \\ & = & pi^{k+1}e^{i\theta}\dfrac{P_k(e^{i\theta})(1-qe^{i\theta}) + qe^{i\theta}P_k'(qe^{i\theta})(1-qe^{i\theta}) + q(k+1)e^{i\theta}P_k(qe^{i\theta})}{(1-qe^{i\theta})^{k+2}}\end{array}$$

On pose alors

$$P_{k+1}(X) = (1-X)P_k(X) + qX(1-X)P_k'(X) + q(k+1)XP_k(X)$$

On a immédiatement

$$\Phi_X^{(k)}(\theta) = pi^k e^{i\theta}\frac{P_k(qe^{i\theta})}{(1-qe^{i\theta})^{k+1}}$$

Reste à vérifier la condition en 0. On a

$$P_{k+1}(0) = P_k(0) = ... = P_0(0) = 1$$

17. On a

$$\begin{array}{rcl}\left|\mathbb{E}[X^k] - \dfrac{1}{p^k}\right| & = & \left|\mathbb{E}[X^k] - \mathbb{E}[X]^k\right| \\ & = & \left|\Phi_X^{(k)}(0) - \Phi_X(0)^k\right| \\ & = & \left|pi^k\dfrac{P_k(q)}{(1-q)^{k+1}} - p^k i^k\dfrac{P_1(q)^k}{(1-q)^{2k}}\right| \\ & = & \dfrac{|P_k(q) - P_1(q)^k|}{(1-q)^k} \\ & = & \dfrac{|P_k(q) - P_1(q)^k|}{p^k}\end{array}$$

Comme $P_k(0) = 1$, les coefficients constants de $P_k(X)$ et $P_1(q)^k$ s'annulent, on peut ainsi factoriser par q. Il reste à majorer toutes les autres occurences de q par 1, on a bien

$$\left|\mathbb{E}[X^k] - \frac{1}{p^k}\right| \leqslant \frac{C_k q}{p^k}$$

18. On a

$$\begin{array}{rcl}\mathbb{E}\big[(X-\mathbb{E}[X])^4\big] & = & \mathbb{E}[X^4] - 4\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[X^3] + 6\mathbb{E}[X^2]\mathbb{E}[X]^2 - 4\mathbb{E}[X]^3\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[X]^4 \\ & = & ...\end{array}$$

19. On a $Y^2 \leqslant Y^4$ si, et seulement si, $1 \leqslant |Y|$, ainsi, on a toujours $Y^2 \leqslant Y^4$ ou $Y^2 \leqslant 1$, ie $Y^2 \leqslant 1 + Y^4$. Par comparaison, Y^2 est d'espérance finie.
On a $|Y|^3 \leqslant Y^4$ si, et seulement si, $|Y| \geqslant 1$, ainsi de la même façon, on a $|Y|^3 \leqslant 1 + Y^4$. Donc, $|Y|^3$ est d'espérance finie.
On utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\mathbb{E}[Y^2] = \mathbb{E}[Y^2 \cdot 1] \leqslant \big(\mathbb{E}[Y^4]\big)^{\frac{1}{2}}$$

et,

$$\mathbb{E}\big[|Y|^3\big] = \mathbb{E}[Y^2 \cdot |Y|] \leqslant \mathbb{E}[Y^4]^{\frac{1}{2}}\mathbb{E}[Y^2]^{\frac{1}{2}} \leqslant \mathbb{E}[Y^4]^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}} = \mathbb{E}[Y^4]^{\frac{3}{4}}$$

20. La formule de Taylor donne

$$e^{iu} = 1 + iu - \frac{u^2}{2} + i\int_0^u \frac{(u-t)^2}{2}e^{it}\mathrm{d}t$$

Et on a,

$$\left|\int_0^u \frac{(u-t)^2}{2}e^{it}\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^{|u|}\frac{(|u|-t)^2}{2}\mathrm{d}t = \frac{|u|^3}{6}$$

Ainsi, comme Y est centrée, on a

$$\begin{aligned}
\left|\Phi_Y(\theta) - 1 + \frac{\mathbb{E}[Y^2]\theta^2}{2}\right| &= \left|\mathbb{E}\left[e^{i\theta Y} - 1 - i\theta Y + \frac{Y^2\theta^2}{2}\right]\right| \\
&\leqslant \mathbb{E}\left[\left|e^{i\theta Y} - 1 - i\theta Y + \frac{Y^2\theta^2}{2}\right|\right] \\
&\leqslant \mathbb{E}\left[\frac{|Y|^3\theta^3}{6}\right] \\
&\leqslant \frac{|\theta|^3}{6}\mathbb{E}\left[|Y|^3\right] \\
&\leqslant \frac{|\theta|^3}{6}\mathbb{E}\left[Y^4\right]^{\frac{3}{4}} \\
&\leqslant \frac{|\theta|^3}{3}\mathbb{E}\left[Y^4\right]^{\frac{3}{4}}
\end{aligned}$$

21. On a le contrôle suivant : $\left|\exp(x) - 1 - x\right| \leqslant \dfrac{x^2}{2}$. Ainsi, on a

$$\begin{aligned}
\left|\Phi_Y(\theta) - \exp\left(-\frac{\mathbb{E}[Y^2]\theta^2}{2}\right)\right| &= \left|\Phi_Y(\theta) - 1 + \frac{\mathbb{E}[Y^2]\theta^2}{2}\right| + \left|\exp\left(-\frac{\mathbb{E}[Y^2]\theta^2}{2}\right) - 1 + \frac{\mathbb{E}[Y^2]\theta^2}{2}\right| \\
&\leqslant \frac{|\theta|^3}{3}\mathbb{E}[Y^4]^{\frac{3}{4}} + \frac{\theta^4}{8}\mathbb{E}[Y^2]^2 \\
&\leqslant \frac{|\theta|^3}{3}\mathbb{E}[Y^4]^{\frac{3}{4}} + \frac{\theta^4}{8}\mathbb{E}[Y^4]
\end{aligned}$$

6 Convergence vers une gaussienne

22. On procède par récurrence sur n.
23. On a

$$\begin{aligned}
\Phi_{Y_k}(\theta) &= \frac{pe^{i(k-k\mathbb{E}[Z_k])\theta}}{1-qe^{ik\theta}} \qquad \text{avec} \qquad p = 1-e^{-kt} \text{ et } q = e^{-kt} \\
&= \frac{\left(1-e^{-kt}\right)e^{ik\left(1-\frac{1}{1-e^{-kt}}\right)\theta}}{1-e^{-kt}e^{ik\theta}} \\
&= \frac{\left(1-e^{-kt}\right)e^{\frac{-ike^{-kt}}{1-e^{-kt}}\theta}}{1-e^{-kt}e^{ik\theta}}
\end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{+\infty}\Phi_{Y_k}(\theta) &= \prod_{k=1}^{+\infty}\frac{1-e^{-kt}}{1-e^{-kt}e^{ik\theta}}\exp\left(\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{-ike^{-kt}}{1-e^{-kt}}\theta\right) \\
&= e^{-im_t\theta}\frac{P(e^{-t}e^{i\theta})}{P(e^{-t})} \\
&= h(t,\theta)
\end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$\begin{aligned}
\left|h(t,\theta) - e^{-\frac{\sigma_t^2\theta^2}{2}}\right| &= \left|\prod_{k=1}^{+\infty}\Phi_{Y_k}(\theta) - \exp\left(-\sum_{k\geqslant 1}\frac{k^2e^{-kt}}{(1-e^{-kt})^2}\frac{\theta^2}{2}\right)\right| \\
&= \left|\prod_{k=1}^{+\infty}\Phi_{Y_k}(\theta) - \prod_{k=1}^{+\infty}e^{-\frac{k^2e^{-kt}\theta^2}{2(1-e^{-kt})^2}}\right| \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{+\infty}\left|\Phi_{Y_k}(\theta) - \exp\left(\frac{-k^2e^{-kt}\theta^2}{2(1-e^{-kt})^2}\right)\right|
\end{aligned}$$

On calcule $\mathbb{E}[Y_k^2] = k^2\mathbb{E}\big[(Z_k - \mathbb{E}[Z_k])^2\big] = k^2\mathrm{Var}(Z_k) = k^2\dfrac{e^{-kt}}{(1-e^{-kt})^2}$ Ainsi, on a

$$\begin{aligned}\left|h(t,\theta) - e^{-\frac{\sigma_t^2\theta^2}{2}}\right| &\leqslant \sum_{k=1}^{+\infty}\left|\Phi_{Y_k}(\theta) - \exp\left(-\frac{\mathbb{E}[Y_k^2]\theta^2}{2}\right)\right| \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{|\theta|^3}{3}\mathbb{E}\big[Y_k^4\big]^{\frac{3}{4}} + \frac{\theta^4}{8}\mathbb{E}\big[Y_k^4\big]\right)\end{aligned}$$

Enfin, on a d'après 18. :

$$\mathbb{E}[Y_k^4] = k^4\mathbb{E}\big[(Z_k - \mathbb{E}[Z_k])^4\big] \leqslant k^4\frac{Ke^{-kt}}{(1-e^{-kt})^4}$$

Et donc, on a

$$\begin{aligned}\left|h(t,\theta) - e^{-\frac{\sigma_t^2\theta^2}{2}}\right| &\leqslant \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{|\theta|^3}{3}k^3K^{\frac{3}{4}}\frac{e^{-\frac{3}{4}kt}}{(1-e^{-kt})^3} + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\theta^4}{8}k^4K\frac{e^{-kt}}{(1-e^{-kt})^4} \\ &\leqslant \frac{|\theta|^3}{3}K^{\frac{3}{4}}S_{3,\frac{3}{4}}(t) + \frac{\theta^4}{8}KS_{4,1}(t)\end{aligned}$$

Ce qui est légèrement mieux que ce qui est demandé.

24. On a d'après 11. :

$$\begin{aligned}\sigma_t^2 &= S_{2,1}(t) \\ &= \frac{1}{t^3}\int_0^{+\infty}\frac{x^2e^{-x}}{(1-e^{-x})^2}\mathrm{d}x + O\left(\frac{1}{t^2}\right) \\ &\sim \frac{\pi^2}{3t^3}\end{aligned}$$

d'où le résultat :

$$\sigma_t \sim \frac{\pi}{\sqrt{3}t^{\frac{3}{2}}}$$

D'après 11., on en déduit aussi que

$$m_t = \frac{1}{t^2}\int_0^{+\infty}\frac{xe^{-x}}{1-e^{-x}}\mathrm{d}x + O\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{\pi^2}{6t^2} + O\left(\frac{1}{t}\right)$$

Ainsi, on a

$$j(t,u) = \zeta(t,u)h\left(t,\frac{u}{\sigma_t}\right)$$

D'après 23., on a

$$\left|h\left(t,\frac{u}{\sigma_t}\right) - e^{-\frac{u^2}{2}}\right| \leqslant K^{\frac{3}{4}}\frac{|u|^3}{|\sigma_t|^3}\times O\left(\frac{1}{t^4}\right) + K\frac{u^4}{\sigma_t^4}\times O\left(\frac{1}{t^5}\right) = O(\sqrt{t}) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$$

D'autre part, on a

$$\exp\left(\frac{iu}{\sigma_t}O\left(\frac{1}{t}\right)\right) = \exp\left(O\left(\sqrt{t}\right)\right) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 1$$

Ainsi, on en déduit que

$$j(t,u) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} e^{-\frac{u^2}{2}}$$

25. La fonction $\theta \longmapsto \dfrac{1-\cos\theta}{\theta^2}$ est continue sur $[-\pi,\pi]$ où elle a été prolongée par continuité en 0 par la valeur $\dfrac{1}{2}$. Elle ne s'annule pas sur $[-\pi,\pi]$ et y est donc strictement positive. Ainsi, elle est minorée par un réel $\alpha > 0$. On peut être un peu plus fin en remarquant que cette fonction est minimale en $\theta = \pm\pi$ et donc que

$\frac{2}{\pi^2}$ convient et est optimal.

On a, pour t assez proche de 0, $e^{-t} \in \left[\frac{1}{2}, t\right[$, d'où :

$$\begin{aligned}
\left|h(t,\theta)\right| &= \left|\frac{P(e^{-t}e^{i\theta})}{P(e^{-t})}\right| \\
&\leqslant \exp\left(-\frac{1-\cos\theta}{6(1-e^{-t})^3}\right) \quad \text{ou} \quad \leqslant \exp\left(-\frac{1}{3(1-e^{-t})}\right) \\
&\leqslant \exp\left(-\frac{\alpha\theta^2}{6(1-e^{-t})^3}\right) \quad \text{ou} \quad \leqslant \exp\left(-\frac{1}{3(1-e^{-t})}\right) \\
&= \exp\left(-\frac{\alpha}{6t^3+o(t^3)}\theta^2\right) \quad \text{ou} \quad \leqslant \exp\left(-\frac{1}{3t+o(t)}\right)
\end{aligned}$$

On a $\frac{\alpha}{6} \leqslant \frac{\pi^2}{3}$ pour $\alpha = \frac{2}{\pi^2}$ établi précédemment. On en déduit qu'asymptotiquement, on a $\exp\left(-\frac{\alpha}{\theta^2}6(1-e^{-t})^3\right) \geqslant e^{-\beta(\sigma_t\theta)^2}$ pour une certaine constante β.

De même, on a $\frac{1}{3} \leqslant \frac{\pi^{2/3}}{3^{1/3}}$ et asymptotiquement, on a la même conclusion.

26. On a

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi\sigma_t}^{\pi\sigma_t} j(t,u)\mathrm{d}u &= \int_{-\pi\sigma_t}^{\pi\sigma_t} \zeta(t,u)h\left(t,\frac{u}{\sigma_t}\right)\mathrm{d}u \\
&= \int_{\mathbb{R}} \zeta(t,u)h\left(t,\frac{u}{\sigma_t}\right)\mathbb{1}_{u\in[-\pi\sigma_t,\pi\sigma_t]}\mathrm{d}u
\end{aligned}$$

Et on applique le théorème de convergence dominée :

$$\begin{aligned}
\left|\zeta(t,u)h\left(t,\frac{u}{\sigma_t}\right)\mathbb{1}_{u\in[-\pi\sigma_t,\pi\sigma_t]}\right| &\leqslant \left|h\left(t,\frac{u}{\sigma_t}\right)\right| \\
&\leqslant e^{-\beta u^2} \quad \text{ou} \quad e^{-\gamma u^{2/3}}
\end{aligned}$$

qui est une domination indépendante de t, d'où

$$\lim_{t\to 0}\int_{-\pi\sigma_t}^{\pi\sigma_t} j(t,u)\mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\mathrm{d}u = \sqrt{2\pi}$$

7 La conclusion

27. On rappelle la formule (1) avec $t = \frac{\pi}{\sqrt{6n}}$.

$$p_n = \frac{e^{\pi\sqrt{\frac{n}{6}}}P(e^{-\frac{\pi}{\sqrt{6n}}})}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-n\theta}\frac{P(e^{-\frac{\pi}{\sqrt{6n}}+i\theta})}{P(e^{-\frac{\pi}{\sqrt{6n}}})}\mathrm{d}\theta$$

D'après la formule admise, on a

$$P(e^{-\frac{\pi}{\sqrt{6n}}}) \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{\sqrt{6n}\times 2\pi}}\exp\left(\frac{\sqrt{6n}\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{(6n)^{1/4}}\exp\left(\sqrt{\frac{n}{6}}\pi\right)$$