Concours CPGE EPITA-IPSA-ESME
2022

Corrigé de l'épreuve de Mathématiques (Option - 2h)

0°) *Préliminaire : l'inégalité triangulaire et son cas d'égalité*

a) Pour tous complexes z, z', on a l'inégalité triangulaire : $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ qui se justifie ainsi :

$$|z + z'|^2 = (z + z')\left(\bar{z} + \overline{z'}\right) = |z|^2 + |z'|^2 + z\,\overline{z'} + \bar{z}\,z' = |z|^2 + |z'|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\bar{z}\,z').$$

En posant $\bar{z}\,z' = a + i\,b$, on sait que $\mathrm{Re}(\bar{z}\,z') = a \leq \sqrt{a^2 + b^2} = |\bar{z}\,z'|$, avec égalité si et seulement et seulement si $a = \sqrt{a^2 + b^2}$, c'est à dire si et seulement si $a = \mathrm{Re}(\bar{z}\,z') \geq 0$ et $b = \mathrm{Im}(\bar{z}\,z') = 0$, donc si et seulement si $\bar{z}\,z'$ est un nombre réel positif. Par conséquent, on a donc :

$|z + z'|^2 = |z|^2 + |z'|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\bar{z}\,z') \leq |z|^2 + |z'|^2 + 2\,|\bar{z}\,z'| = |z|^2 + |z'|^2 + 2\,|z|\,|z'| = (|z| + |z'|)^2.$

Ceci implique donc que : $|z + z'| \leq |z| + |z'|$, avec égalité si et seulement si $\bar{z}\,z'$ est réel positif.

b) Il y a égalité si et seulement si $\mathrm{Re}(\bar{z}\,z') = |\bar{z}|\,|z'|$, donc si et seulement si $\bar{z}\,z'$ est réel positif.

Si $z = 0$, la condition est évidemment vérifiée et on a égalité dans l'inégalité triangulaire.

Sinon, l'égalité $\bar{z}\,z' = \lambda \geq 0$ équivaut à $z' = \frac{\lambda}{|z|^2}\,z$, et on a donc $z' = \mu\,z$ avec $\mu \geq 0$.

Inversement, s'il existe $\mu \geq 0$ tel que $z' = \mu\,z$, alors $|z + z'| = (1 + \mu)\,|z| = |z| + |\mu\,z| = |z| + |z'|$.

1°) *Existence d'un minimum absolu de la fonction f sur le plan*

a) Pour tout entier $k \in [\![0, n-1]\!]$ et tout complexe z, on a : $|z| \leq |z - z_k| + |z_k|$.

Il en résulte que : $|z - z_k| \geq |z| - |z_k|$, d'où par sommation et compte tenu de $\sum_{k=0}^{n-1} |z_k| = f(0)$:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n-1} |z - z_k| \geq n\,|z| - \sum_{k=0}^{n-1} |z_k| = n\,|z| - f(0).$$

Par conséquent, on a $\lim_{|z| \to +\infty} f(z) = +\infty$.

En particulier : $f(z) > f(0)$ si $n\,|z| - f(0) > f(0)$, ce qui est réalisé pour $|z| > \frac{2\,f(0)}{n}$.

b) La boule fermée de centre 0 et de rayon $\frac{2\,f(0)}{n}$ étant fermée bornée dans le plan est compacte.

La fonction f étant clairement continue sur le plan, elle y admet donc un minimum $m \leq f(0)$, atteint en un certain point Ω d'affixe ω de cette boule fermée.

Et pour $|z| > \frac{2\,f(0)}{n}$, on a vu que $f(z) > f(0)$, ce qui implique $f(z) > m$ (puisque $f(0) \geq m$).

Ainsi donc, le minimum $m = f(\omega)$ est un minimum global de f sur le plan complexe.

Celui-ci est clairement strictement positif puisque $f(\omega) = \sum_{k=0}^{n-1} |\omega - z_k| > 0$ (sinon, les z_k seraient tous égaux à ω alors qu'ils sont supposés distincts.

2°) *Unicité d'un minimum absolu de la fonction f sur le plan*

a) Pour tous complexes distincts z, z' et tout réel $\lambda \in]0, 1[$, on a par inégalité triangulaire :

$$f_k(\lambda z + (1-\lambda) z') = |(\lambda z + (1-\lambda) z') - z_k| = |\lambda(z - z_k) + (1-\lambda)(z' - z_k)|$$
$$\leq \lambda |z - z_k| + (1-\lambda)|z' - z_k| = \lambda f_k(z) + (1-\lambda) f_k(z').$$

D'après la question préliminaire, il y a égalité ci-dessus si et seulement si :

- soit : $\lambda(z - z_k) = 0$, c'est à dire : $z = z_k$, ou : $M = M_k$.
- soit : $\exists\, \mu \geq 0\ : (1-\lambda)(z' - z_k) = \mu\, \lambda(z - z_k)$, c'est à dire : $z' - z_k = \frac{\mu\lambda}{1-\lambda}(z - z_k)$,

Ainsi, s'il y a égalité dans l'inégalité ci-dessus, on a soit $M = M_k$, soit : $\overrightarrow{M_k M'} = \frac{\mu\lambda}{1-\lambda} \overrightarrow{M_k M}$.

Il en résulte que les points M, M', M_k d'affixes z, z' et z_k sont alignés.

b) En sommant les inégalités précédentes pour $0 \leq k \leq n-1$, on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n-1} f_k(\lambda z + (1-\lambda) z') \leq \lambda \sum_{k=0}^{n-1} f_k(z) + (1-\lambda) \sum_{k=0}^{n-1} f_k(z').$$

Ce qui s'écrit encore : $f(\lambda z + (1-\lambda) z') \leq \lambda f(z) + (1-\lambda) f(z')$.

Pour avoir égalité dans cette inégalité, il faut avoir pour tout entier $k \in [\![0, n-1]\!]$ l'égalité :

$$f_k(\lambda z + (1-\lambda) z') = \lambda f_k(z) + (1-\lambda) f_k(z').$$

Ce qui implique, pour tout k, que les points M, M', M_k d'affixes z, z', z_k sont alignés, et comme $z \neq z'$, ceci implique que les points $M_0, M_1, \ldots, M_{n-1}$ sont alignés sur la droite MM'.

Mais ceci contredit le fait que les points $M_0, M_1, \ldots, M_{n-1}$ ont été supposés non alignés.

Ainsi donc, l'inégalité précédente portant sur f est nécessairement stricte.

c) Si f atteint son minimum absolu m en deux points distincts d'affixes ω et ω', on a donc :

$$f(\lambda\omega + (1-\lambda)\omega') < \lambda f(\omega) + (1-\lambda) f(\omega') = \lambda m + (1-\lambda) m = m.$$

Cette inégalité stricte est impossible puisque m est le minimum de f.

Par conséquent, f atteint son minimum absolu en un point Ω du plan et un seul.

d1) Supposons que l'ensemble $\{M_0, M_1, \ldots, M_{n-1}\}$ admette un axe de symétrie Δ.

Si Ω n'appartient pas à Δ, considérons son symétrique Ω' par rapport à Δ.

L'ensemble $\{M_0, M_1, \ldots, M_{n-1}\}$ étant stable par symétrie par rapport à Δ, on en déduit que la symétrie orthogonale par rapport à Δ transforme l'ensemble ci-dessous en le suivant :

- l'ensemble des segments des $n+1$ segments $\{\Omega M_0, \Omega M_1, \ldots, \Omega M_{n-1}\}$
- l'ensemble des segments des $n+1$ segments $\{\Omega' M_0, \Omega' M_1, \ldots, \Omega' M_{n-1}\}$.

Comme une symétrie orthogonale conserve les longueurs, on a donc :

$$f(\Omega) = \sum_{k=0}^{n-1} \left\| \overrightarrow{\Omega \mathrm{M}_k} \right\| = \sum_{k=0}^{n-1} \left\| \overrightarrow{\Omega' M_k} \right\| = f(\Omega').$$

Ainsi, f atteint son minimum en deux points distincts, Ω et Ω' : c'est contradictoire, et on en tire la conclusion que Ω appartient à l'axe de symétrie Δ.

d2) Supposons que l'ensemble $\{M_0, M_1, \ldots, M_{n-1}\}$ admette un centre de symétrie I.

Si Ω est distinct de I, considérons son symétrique Ω' par rapport à I.

L'ensemble $\{M_0, M_1, \ldots, M_{n-1}\}$ étant stable par symétrie par rapport à I, on en déduit que la symétrie centrale par rapport à I transforme l'ensemble ci-dessous en le suivant :

- l'ensemble des segments des $n+1$ segments $\{\Omega M_0, \Omega M_1, \ldots, \Omega \mathrm{M}_{n-1}\}$
- l'ensemble des segments des $n+1$ segments $\{\Omega' M_0, \Omega' M_1, \ldots, \Omega' M_{n-1}\}$.

Comme une symétrie centrale conserve les longueurs, on a donc :

$$f(\Omega) = \sum_{k=0}^{n-1} \left\| \overrightarrow{\Omega \mathrm{M}_k} \right\| = \sum_{k=0}^{n-1} \left\| \overrightarrow{\Omega' M_k} \right\| = f(\Omega').$$

Ainsi, f atteint son minimum en deux points distincts, Ω et Ω' : c'est contradictoire, et on en tire la conclusion que Ω est le centre de symétrie I.

Dans le cas d'un parallélogramme, on sait que les diagonales se coupent en leur milieu I.
Donc la symétrie par rapport à I laisse invariant le parallélogramme $M_0 M_1 M_2 M_3$.
Le minimum de la fonction f est donc atteint en $\Omega = I$ et ce minimum est égal à la somme des longueurs des deux diagonales puisque : $\sum_{k=0}^{3} \left\| \overrightarrow{\Omega \mathrm{M}_k} \right\| = \left\| \overrightarrow{M_0 M_2} \right\| + \left\| \overrightarrow{M_1 M_3} \right\|$.

d3) Supposons que l'ensemble $\{M_0, M_1, \ldots, M_{n-1}\}$ est stable par une rotation de centre I.
Si Ω est distinct de I, considérons son image Ω' par cette rotation de centre I.
Cette rotation de centre I transforme donc l'ensemble ci-dessous en le suivant :
- l'ensemble des segments des $n+1$ segments $\{\Omega \mathrm{M}_0, \Omega \mathrm{M}_1, \ldots, \Omega \mathrm{M}_{n-1}\}$
- l'ensemble des segments des $n+1$ segments $\{\Omega' M_0, \Omega' M_1, \ldots, \Omega' M_{n-1}\}$.

Comme une rotation conserve les longueurs, on a donc :

$$f(\Omega) = \sum_{k=0}^{n-1} \left\| \overrightarrow{\Omega \mathrm{M}_k} \right\| = \sum_{k=0}^{n-1} \left\| \overrightarrow{\Omega' M_k} \right\| = f(\Omega').$$

Ainsi, f atteint son minimum en deux points distincts, Ω et Ω' : c'est contradictoire, et on en tire la conclusion que Ω est le centre I de la rotation.

Pour le polygone régulier de sommets M_k d'affixe $z_k = e^{\frac{2 k i \pi}{n}}$, l'ensemble $\{M_0, M_1, \ldots, M_{n-1}\}$ est invariant par la rotation de centre O et de mesure $2\pi/n$.
Le minimum de la fonction f est donc atteint en $\Omega = O$ et ce minimum est égal à :

$$f(\Omega) = \sum_{k=0}^{n-1} \left\| \overrightarrow{\Omega \mathrm{M}_k} \right\| = \sum_{k=0}^{n-1} \left\| \overrightarrow{OM_k} \right\| = n.$$

3°) *Expression du gradient de la fonction f*

a) Pour $z = x + i\,y$ et $z_k = x_k + i\,y_k$, on a donc posé : $f_k(z) = |z - z_k| = \sqrt{(x-x_k)^2 + (y-y_k)^2}$.
Ces n fonctions f_k $(0 \leq k \leq n-1)$ sont clairement continues sur le plan complexe entier.
L'ensemble réduit à un point M_k est fermé (par exemple, on a $M_k = f_k^{-1}(\{0\})$ et c'est donc l'image réciproque du fermé $\{0\}$ par la fonction continue f_k). Puis la réunion des n fermés $\{M_k\}$ constitue encore un fermé, et donc son complémentaire U est un ouvert du plan.

b) Les dérivées partielles de f_k sont pour $z \neq z_k$, c'est à dire pour $(x, y) \neq (x_k, y_k)$:

$$\frac{\partial f_k}{\partial x}(x, y) = \frac{x - x_k}{\sqrt{(x-x_k)^2 + (y-y_k)^2}} \quad ; \quad \frac{\partial f_k}{\partial y}(x, y) = \frac{y - y_k}{\sqrt{(x-x_k)^2 + (y-y_k)^2}}.$$

Ces dérivées sont continues sur le plan privé de M_k, donc sur U, et f_k est de classe C^1 sur U.
Enfin, le gradient sur U de la fonction f_k en $(x,\ y) \neq (x_k,\ y_k)$ est donc :

$$\frac{\partial f_k}{\partial x}(x,\ y) + i\,\frac{\partial f_k}{\partial y}(x,\ y) = \frac{(x-x_k)+i(y-y_k)}{\sqrt{(x-x_k)^2+(y-y_k)^2}} = \frac{z-z_k}{|z-z_k|}.$$

c) Comme $f = \sum_{k=0}^{n-1} f_k$, f est bien de classe C^1 sur le plan privé des points $M_0,\ M_1,\ \dots,\ M_{n-1}$.
Et par somme, l'affixe de son gradient sur U est donc :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-x_k)+i(y-y_k)}{\sqrt{(x-x_k)^2+(y-y_k)^2}} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{z-z_k}{|z-z_k|}.$$

4°) *Recherche de l'unique point* Ω *où la fonction* f *admet son minimum*

a) Le minimum m de la fonction f peut être atteint en l'un des points M_k d'affixe z_k, mais sinon il est atteint en un point de l'ouvert U du plan complémentaire des points $M_0,\ M_1,\ \dots,\ M_{n-1}$.
Dans ce cas, comme la fonction f est C^1, ses dérivées partielles et son gradient s'y annulent :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{z-z_k}{|z-z_k|} = 0 \qquad \text{ou de façon équivalente :} \qquad \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\overrightarrow{M_k M}}{\|\overrightarrow{M_k M}\|} = \vec{0}.$$

b) On suppose qu'il existe $c \in \mathbb{C} \setminus \{z_0,\ z_1,\ \dots,\ z_{n-1}\}$ vérifiant l'égalité : $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{c-z_k}{|c-z_k|} = 0$.

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, il vient en écrivant $z - z_k = (z-c) + (c-z_k)$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \overline{z-z_k}\,\frac{c-z_k}{|c-z_k|} = \sum_{k=0}^{n-1} \overline{(z-c)+(c-z_k)}\,\frac{c-z_k}{|c-z_k|}$$

$$= \overline{z-c} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{c-z_k}{|c-z_k|} + \sum_{k=0}^{n-1} \overline{c-z_k}\,\frac{c-z_k}{|c-z_k|} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\overline{c-z_k}\,(c-z_k)}{|c-z_k|} = \sum_{k=0}^{n-1} |c-z_k|.$$

Par inégalité triangulaire, il vient alors pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$f(c) = \sum_{k=0}^{n-1} |c-z_k| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |z-z_k|\,\frac{|c-z_k|}{|c-z_k|} = \sum_{k=0}^{n-1} |z-z_k| = f(z).$$

Ainsi, si un tel point C d'affixe c existe, la fonction f y réalise son minimum.
D'après 2°, le point C d'affixe c est donc l'unique point Ω en lequel f réalise son minimum.

c) On en déduit qu'il existe au plus un complexe $c \notin \{z_0,\ z_1,\ \dots,\ z_{n-1}\}$ vérifiant : $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{c-z_k}{|c-z_k|} = 0$.

En effet, s'il en existe deux, ils réalisent tous deux le minimum de f, ce qui est impossible.
Ainsi, deux cas peuvent se produire :
- soit il existe un point C d'affixe $c \notin \{z_0,\ z_1,\ \dots,\ z_{n-1}\}$ où le gradient de f s'annule.
  Ce point est alors unique, et c'est le point Ω où la fonction f est minimale.
- soit un tel point C n'existe pas et alors le point Ω est l'un des points $M_0,\ \dots,\ M_{n-1}$.

5°) *Localisation du point Ω dans le cas d'un polygone convexe*

a) On considère une droite Δ du plan, un point M situé d'un côté de Δ (mais n'appartenant pas à Δ), un point A situé du côté opposé de Δ, et le point M' symétrique de M par rapport à Δ.
Le point I d'intersection de AM et Δ est donc situé entre A et M et on a : $AM = AI + IM$.
De plus, par symétrie, IM se transforme en IM' et on a donc : $IM = IM'$.
Il en résulte que $AM = AI + IM' \geq AM'$ par inégalité triangulaire dans le triangle AIM'.

b) Le polygone $M_0\, M_1\, \ldots\, M_{n-1}$ (intérieur et côtés) est l'intersection des n demi-plans fermés F_i qui sont délimités par les droites $M_i\, M_{i+1}$ et contiennent tous les points $M_0, M_1, \ldots, M_{n-1}$.
Supposons que le point Ω n'appartient pas à ce polygone $M_0\, M_1 \ldots M_{n-1}$ (intérieur et côtés).
Il existe $i \in [\![0, n-1]\!]$ tel que Ω appartient au complémentaire du demi-plan fermé F_i délimité par la droite $M_i\, M_{i+1}$ et contenant tous les points $M_0, M_1, \ldots, M_{n-1}$.
Introduisons le symétrique Ω' de Ω par rapport à $M_i\, M_{i+1}$, qui est donc distinct de Ω puisque Ω n'est pas dans F_i alors que Ω' l'est évidemment.
D'après la question 5.a), on sait que $\Omega' M_k \leq \Omega \mathrm{M}_k$ pour $0 \leq k \leq n-1$, et donc $f(\Omega') \leq f(\Omega)$.
Comme $m = f(\Omega)$ est le minimum de f, on a donc $f(\Omega') = f(\Omega) = m$. C'est contradictoire car f atteint son minimum en un point et un seul.
Donc pour tout côté $M_i\, M_{i+1}$ avec $0 \leq i \leq n-1$ et $M_n = M_0$, les points $M_0, M_1, \ldots, M_{n-1}$ et Ω appartiennent au même demi-plan fermé F_i délimité par la droite $M_i\, M_{i+1}$ et Ω appartient bien à l'intersection des demi-plans fermés F_i qui est le polygone $M_0\, M_1 \ldots M_{n-1}$ (intérieur et côtés).

6°) *Etude d'un exemple*

a) D'après les deux questions précédentes, le point Ω qui réalise le minimum de la fonction f appartient au triangle ABC (côtés compris), ainsi qu'à l'axe de symétrie Oy de ce triangle.
Il appartient donc au segment $[OA]$ et a un affixe de la forme $i\,t$ avec $0 \leq t \leq 1$.

b) Si M_t est le point d'affixe $i\,t$, avec $0 \leq t \leq 1$, on a : $f(M_t) = 1 - t + 2\sqrt{x^2 + t^2}$.
La dérivée de cette fonction par rapport à t : $-1 + \dfrac{2\,t}{\sqrt{x^2+t^2}} = \dfrac{2\,t - \sqrt{x^2+t^2}}{\sqrt{x^2+t^2}} = \dfrac{3\,t^2 - x^2}{\sqrt{x^2+t^2}\left(2\,t + \sqrt{x^2+t^2}\right)}$.
Cette expression est négative pour $0 \leq t \leq \frac{x}{\sqrt{3}}$, positive pour $t \geq \frac{x}{\sqrt{3}}$, et comme $t \in [0, 1]$, on a :

- si $x \geq \sqrt{3}$, alors $\frac{x}{\sqrt{3}} \geq 1$, et donc $t \mapsto f(M_t)$ est décroissante sur $[0, 1]$.

La fonction est ainsi minimale en $t = 1$ et on a : $\Omega = M_1 = A$ et $m = f(A) = 2\sqrt{x^2+1}$.

- si $0 < x < \sqrt{3}$, la dérivée s'annule en $\frac{x}{\sqrt{3}}$, qui appartient bien à $[0, 1]$.

La fonction $t \mapsto f(M_t)$ est décroissante sur $\left[0, \frac{x}{\sqrt{3}}\right]$, croissante sur $\left[\frac{x}{\sqrt{3}}, 1\right]$.
La fonction est ainsi minimale en $t = \frac{x}{\sqrt{3}}$ et on a : $\Omega = M_{\frac{x}{\sqrt{3}}}$ et $m = f(\Omega) = 1 + x\sqrt{3}$.

c) Si θ est la mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}\right) = \left(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AC}\right)$ appartenant à $]\,0, \frac{\pi}{2}[$, on a : $\tan(\theta) = x$.
Ainsi donc, le point Ω est en A si et seulement si $x = \tan(\theta) \geq \sqrt{3} = \tan(\pi/3)$, c'est à dire si et seulement si $\pi/3 \leq \theta < \pi/2$, ou si et seulement si $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = 2\,\theta \geq 2\,\pi/3$.
