CONCOURS
CPGE
EPITA - IPSA - ESME
1 SEUL ET UNIQUE CONCOURS POUR VOUS PRÉPARER À UNE MULTITUDE DE MÉTIERS

Samedi 9 avril 2022

OPTION : MATHÉMATIQUES

MP- PC - PSI - PT - TSI

Durée : 2 heures

Conditions particulières

Calculatrice et documents interdits

Concours CPGE EPITA-IPSA-ESME
2022

Option Mathématiques

On considère un entier naturel $n \geq 3$ et, dans le plan complexe muni de sa structure euclidienne, n points distincts non alignés $M_0, M_1, \ldots, M_{n-1}$ d'affixes notés $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$.
On se propose d'étudier la fonction f associant à tout point M d'affixe z de ce plan complexe le réel :

$$f(M) = \sum_{k=0}^{n-1} \left\| \overrightarrow{M_k\, M} \right\| \qquad \text{ou de façon équivalente :} \qquad f(z) = \sum_{k=0}^{n-1} |z - z_k|.$$

0°) *Préliminaire : l'inégalité triangulaire et son cas d'égalité*
a) Démontrer, pour tous complexes z, z', qu'on a l'inégalité : $|z + z'| \leq |z| + |z'|$.
b) Démontrer qu'on a l'égalité : $|z + z'| = |z| + |z'|$ si et seulement si : $z = 0$ ou : $\exists\, \mu \geq 0,\ z' = \mu\, z$.

1°) *Existence d'un minimum absolu de la fonction f sur le plan*
a) Vérifier pour tout complexe z l'inégalité suivante :

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n-1} |z - z_k| \ \geq\ n\,|z| - f(0).$$

En déduire qu'on a $\lim_{|z| \to +\infty} f(z) = +\infty$, et qu'en particulier : $f(z) > f(0)$ pour $|z| > 2\, f(0)/n$.
b) Justifier l'existence d'un minimum m de f sur la boule fermée de centre 0 et de rayon $2\, f(0)/n$.
Montrer que ce minimum m est un minimum absolu de f sur le plan complexe, et que $m > 0$.

2°) *Unicité du point Ω où la fonction f réalise son minimum*
a) On désigne par f_k la fonction associant à tout complexe z le nombre réel $f_k(z) = |z - z_k|$.
Démontrer, pour tous complexes distincts z, z' et tout réel $\lambda \in\,]\,0,\ 1[$, l'inégalité suivante :

$$f_k(\lambda\, z + (1 - \lambda)\, z') \ \leq\ \lambda\, f_k(z) + (1 - \lambda)\, f_k(z').$$

Etablir que s'il y a égalité dans l'inégalité, les points M_k, M, M' d'affixes z_k, z, z' sont alignés.
b) En déduire, pour tous complexes distincts z, z' et tout réel $\lambda \in\,]\,0,\ 1[$, l'inégalité stricte suivante :

$$f(\lambda\, z + (1 - \lambda)\, z') \ <\ \lambda\, f(z) + (1 - \lambda)\, f(z').$$

c) On suppose que f atteint son minimum absolu m en deux points distincts d'affixes ω et ω'.
Etablir, pour tout réel $\lambda \in\,]\,0,\ 1[$, l'inégalité : $f(\lambda\, \omega + (1 - \lambda)\, \omega') \ <\ m$.
En déduire que f atteint son minimum absolu m en un unique point Ω d'affixe noté ω.
d) On suppose successivement que l'ensemble $\{M_0, M_1, \ldots, M_{n-1}\}$ est stable par :

1. la symétrie orthogonale par rapport à une droite Δ.
A l'aide des résultats précédents, montrer dans ce cas que le point Ω appartient la droite Δ.
On pourra à cet effet raisonner par l'absurde en supposant que le point Ω n'est pas sur Δ, puis introduire le symétrique Ω' de Ω par rapport à Δ, et montrer que $f(\Omega') = f(\Omega)$.

2. la symétrie centrale par rapport à un point I.
A l'aide des résultats précédents, montrer dans ce cas que le point Ω est le point I.
Si $n = 4$, déterminer ainsi le minimum de f lorsque $M_0\, M_1\, M_2\, M_3$ forme un parallélogramme.

3. la rotation de centre I et de mesure $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\, \mathbb{Z}$.
A l'aide des résultats précédents, montrer dans ce cas que le point Ω est le point I.
Déterminer ainsi le minimum de la fonction f lorsqu'on a : $\forall\, k \in [\![0,\ n - 1]\!],\ z_k = \exp\!\left(\frac{2\,k\,i\,\pi}{n}\right)$.

3°) *Expression du gradient de la fonction f*

Lorsque $z = x + i\,y$ avec x, y réels, on conviendra d'écrire indifféremment $f(z)$ ou $f(x, y)$, et de même $f_k(z)$ ou $f_k(x, y)$ pour $0 \leq k \leq n-1$. On a ainsi, en posant $z_k = x_k + i\,y_k$:

$$f_k(z) = |z - z_k| \quad \text{ou} \quad f_k(x, y) = \sqrt{(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2}$$

a) Etablir que le plan privé des points $M_0, M_1, \ldots, M_{n-1}$ d'affixes $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$ est un ouvert U.

b) Préciser les dérivées partielles de f_k sur U par rapport à ses deux variables x et y.
Etablir que les fonctions f_k sont de classe C^1 sur U.
Préciser l'affixe du gradient de f_k sur U en fonction du complexe $z - z_k$.

c) Justifier que f est de classe C^1 sur l'ouvert U, puis préciser l'affixe de son gradient en fonction des complexes $z - z_0, z - z_1, \ldots, z - z_{n-1}$.

4°) *Recherche de l'unique point Ω où la fonction f admet son minimum*

a) Etablir que le minimum m de la fonction f peut être atteint soit en l'un des points M_k d'affixe z_k, soit (s'il existe) en un point d'affixe $z \notin \{z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}\}$ vérifiant la relation : $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{z-z_k}{|z-z_k|} = 0$.

b) On suppose qu'il existe un tel point C d'affixe $c \notin \{z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}\}$ vérifiant : $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{c-z_k}{|c-z_k|} = 0$.
Etablir l'égalité suivante pour tout complexe z : $\sum_{k=0}^{n-1} |c - z_k| = \sum_{k=0}^{n-1} \overline{z - z_k}\,\frac{c-z_k}{|c-z_k|}$.
En déduire que : $\forall\, z \in \mathbb{C},\ f(c) \leq f(z)$.
En conclure que C est alors l'unique point Ω en lequel f réalise son minimum absolu.

c) Etablir qu'il existe au plus un tel complexe $c \notin \{z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}\}$ vérifiant : $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{c-z_k}{|c-z_k|} = 0$.
Ainsi, f atteint son minimum en ce point C s'il existe, et sinon en l'un des points $M_0, \ldots, M_{n-1}$.

5°) *Localisation du point Ω dans le cas d'un polygone convexe*

a) On considère une droite Δ du plan, un point M situé d'un côté de Δ (mais n'appartenant pas à Δ), un point A situé de l'autre côté de Δ, et le point M' symétrique de M par rapport à Δ.
Représenter ces éléments sur une même figure, ainsi que le point I d'intersection de AM et Δ.
En exploitant l'inégalité triangulaire, justifier l'inégalité : $AM' \leq AM$.

b) On suppose que les points $M_0, M_1, \ldots, M_{n-1}$, pris dans cet ordre, forment un polygone convexe.
En posant $M_n = M_0$, on montre que, pour tout entier $i \in [\![0, n-1]\!]$, les points $M_0, M_1, \ldots, M_{n-1}$ sont toujours dans un même demi-plan fermé F_i délimité par la droite $M_i M_{i+1}$, et l'intersection de ces n demi-plans fermés $F_0, F_1, \ldots, F_{n-1}$ est le polygone $M_0 M_1 \ldots M_{n-1}$ (intérieur et côtés).
Déduire de 5.a) que le point Ω appartient à l'intérieur ou aux côtés du polygone $M_0 M_1 \ldots M_{n-1}$.

6°) *Etude d'un exemple*

On considère dans cette question un réel $x > 0$ et les trois points A, B, C d'affixes i, x, $-x$.

a) Montrer que le point Ω appartient au segment OA où le point O désigne l'origine.

b) Calculer $f(M_t)$ en fonction de t et x, où M_t est le point d'affixe $i\,t$, avec $0 \leq t \leq 1$.
Pour quelle valeur de $t \in [0, 1]$ l'expression $f(M_t)$ est-elle minimale?
En déduire en fonction de x le point Ω minimisant la fonction f dans le cas de ce triangle ABC.

c) Démontrer enfin qu'on a $\Omega = A$ si et seulement si l'angle $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ est supérieur ou égal à $\frac{2\pi}{3}$.