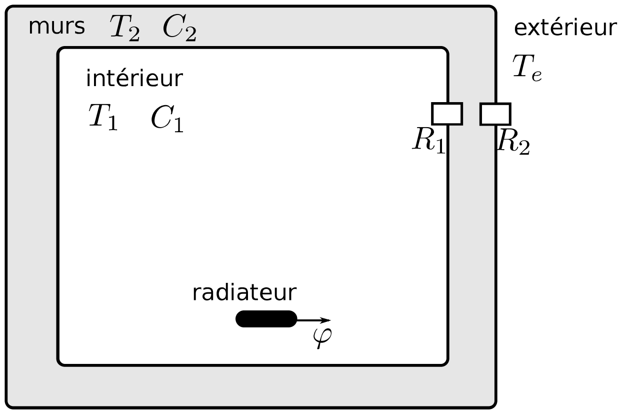
II Comportement thermique d'une habitation

Cette partie s'intéresse à l'isolation thermique d'une maison.

On décrit l'habitation en la décomposant en trois systèmes : le {milieu extérieur}, {l'intérieur}, {les murs}.



– L'intérieur est de l'air de capacité thermique à pression constante C_1 et de température $T_1(t)$.

– Les murs sont de capacité thermique à pression constante C_2 et de température $T_2(t)$.

– Le milieu extérieur agit comme un thermostat à la température T_e.

– On note R_1 la résistance thermique de l'ensemble de l'isolant placé à l'intérieur de la maison, contre les murs. L'intérieur cède donc une puissance thermique $(T_1 - T_2)/R_1$ vers les murs.

– On note R_2 la résistance thermique de l'ensemble de l'isolant placé à l'extérieur de la maison, contre les murs. Les murs cèdent donc une puissance thermique $(T_2 - T_e)/R_2$ vers l'extérieur.

– Le chauffage apporte une puissance thermique φ constante à l'intérieur.

Toutes les évolutions sont isobares, les solides et liquides sont supposés incompressibles et indilatables et les gaz parfaits.

17 - On étudie l'évolution des températures T_1 et T_2. Montrer en justifiant qu'elles suivent les équations différentielles suivantes :

$$C_2 \frac{\mathrm{d}T_2}{\mathrm{d}t} = \frac{T_1 - T_2}{R_1} - \frac{T_2 - T_e}{R_2}, \tag{2}$$

$$C_1 \frac{\mathrm{d}T_1}{\mathrm{d}t} = \varphi - \frac{T_1 - T_2}{R_1}. \tag{3}$$

II.1 Étude 1 : refroidissement lorsque le chauffage est coupé

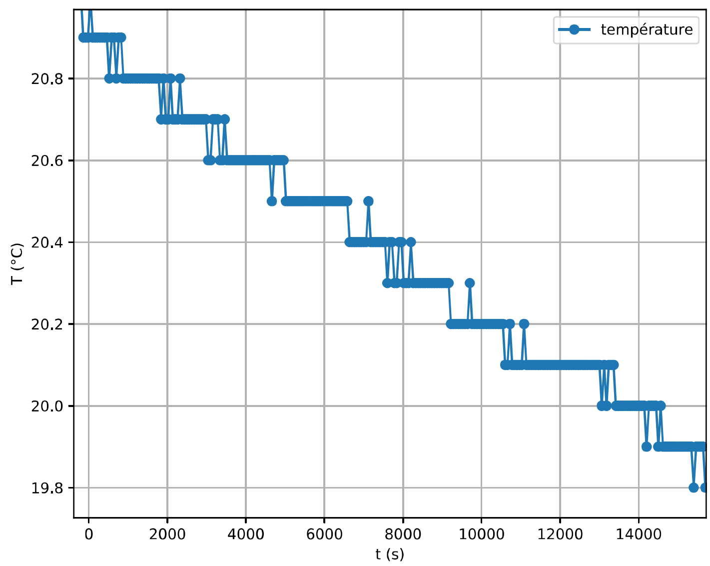
Uniquement dans les **3 questions suivantes**, on suppose le chauffage coupé. De plus, la maison est uniquement isolée par l'intérieur ($R_2 = 0$ et $\forall\, t$, $T_2 = T_e$). Ainsi le problème se ramène à l'équation (3) avec $\varphi = 0$ et $T_2 = T_e =$ constante. La température T_1 à l'instant $t = 0$ est notée T_{10}.

18 - En déduire l'expression de $T_1(t)$. On introduira un temps caractéristique τ.

19 - Effectuer un développement limité à l'ordre 1 en t/τ, pour $t \ll \tau$, de l'expression de $T_1(t)$ ci-dessus obtenue. Montrer alors que $T_1(t)$ est une fonction affine et donner l'expression de sa pente a en fonction de T_{10}, T_e et τ.

20 - L'enregistrement ci-contre a été réalisé dans une habitation. Le chauffage est coupé à l'instant initial. On a $T_e = 0\,°\mathrm{C}$ et $T_{10} = 20{,}9\,°\mathrm{C}$. En déduire une estimation de la grandeur R_1C_1 (attention à son unité).

Cette grandeur est caractéristique de l'inertie thermique de l'habitation.



II.2 Étude 2 : régime stationnaire

On étudie cette fois le comportement en régime stationnaire (toutes les températures sont constantes). Le chauffage est donc allumé, et on attend suffisamment longtemps pour que T_1 et T_2 se stabilisent. $T_e = 0\,°\mathrm{C}$ est également constante. On pourra partir des équations (2) et (3).

21 - Exprimer les températures T_1 et T_2 en fonction de R_1, R_2, φ et T_e.

22 - Dans le cas d'une isolation par l'intérieur, il n'y a pas d'isolant à l'extérieur des murs ($R_2 = 0$). En étudiant les relevés de consommation électrique sur un mois d'hiver, on constate qu'il faut en moyenne fournir une puissance thermique $\varphi = 1{,}0\,\mathrm{kW}$ pour maintenir $T_1 = 20\,°\mathrm{C}$ alors que $T_e = 0\,°\mathrm{C}$. En déduire une estimation de R_1.

II.3 Étude 3 : régime permanent sinusoïdal

Des deux études précédentes on retiendra $C_1 = 2 \times 10^7\,\mathrm{J \cdot K^{-1}}$ (tient compte de l'air intérieur, du mobilier, des dalles), $C_2 \simeq 10C_1$ typiquement pour des murs en parpaings. Les valeurs de R_1 et R_2 dépendent du type d'isolation : $R_1 = 2 \times 10^{-2}\,\mathrm{K \cdot W^{-1}}$ et $R_2 = 0$ si l'isolation est à l'intérieur des murs, et l'inverse si l'isolation est à l'extérieur des murs.

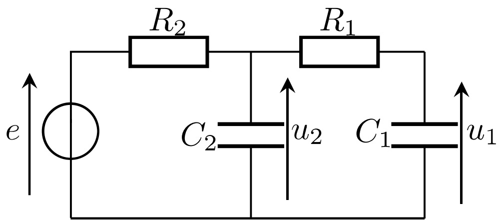
On étudie maintenant l'évolution des températures suite à l'alternance jour-nuit. La température extérieure n'est plus constante et varie avec une période de 24 h selon $T_e(t) = T_{e,\text{moyen}} + \Delta T_0 \cos \omega t$.

23 - Donner la valeur numérique de la pulsation ω.

Les questions qui précèdent suggèrent une analogie électrique. On admet que le problème thermique étudié est mathématiquement équivalent à l'étude du circuit électrique ci-dessous, où :

- le générateur $e(t) = E_0 \cos(\omega t)$ représente $T_e(t) - T_{e,\text{moyen}} = \Delta T_0 \cos \omega t$,
- la tension $u_1(t)$ représente la différence entre $T_1(t)$ et sa valeur en régime stationnaire,
- la tension $u_2(t)$ représente la différence entre $T_2(t)$ et sa valeur en régime stationnaire.

La capacité C_1 représente l'intérieur de la maison, qui se "charge" et se "décharge" à mesure que son énergie interne augmente ou diminue. De même pour C_2 qui réprésente les murs.



On se place en régime sinusoïdal forcé à la pulsation ω. La tension $u_1(t) = U_{10} \cos(\omega t + \varphi)$ est représentée par $\underline{u}_1(t) = U_{10} \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + \varphi)}$ où $\mathrm{j}^2 = -1$.

24 - On note $\underline{Z}_{\text{éq}}$ l'impédance équivalente à l'ensemble C_2, R_1 et C_1. Donner son expression en fonction de ω, C_2, R_1 et C_1.

25 - Lorsqu'on considère une impédance $\underline{Z}_1$ et une impédance $\underline{Z}_2$ en dérivation, et que $|\underline{Z}_1| \gg |\underline{Z}_2|$, quelle approximation sur l'impédance équivalente à l'ensemble peut-on faire ? On attend une justification.

26 - Pour la suite, comme $C_2 \gg C_1$, on admet que $\underline{Z}_{\text{éq}} \approx \dfrac{1}{\mathrm{j}C_2\omega}$.

En utilisant cette approximation, montrer que $\underline{H} = \dfrac{\underline{u}_1}{\underline{e}}$ peut s'écrire $\underline{H} = \dfrac{1}{\left(1 + \mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_1}\right)\left(1 + \mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_2}\right)}$ avec ω_1 et ω_2 des pulsations à exprimer en fonction des capacités et résistances.

27 - Donner l'expression du gain en décibel de ce filtre en fonction de ω, ω_1 et ω_2.

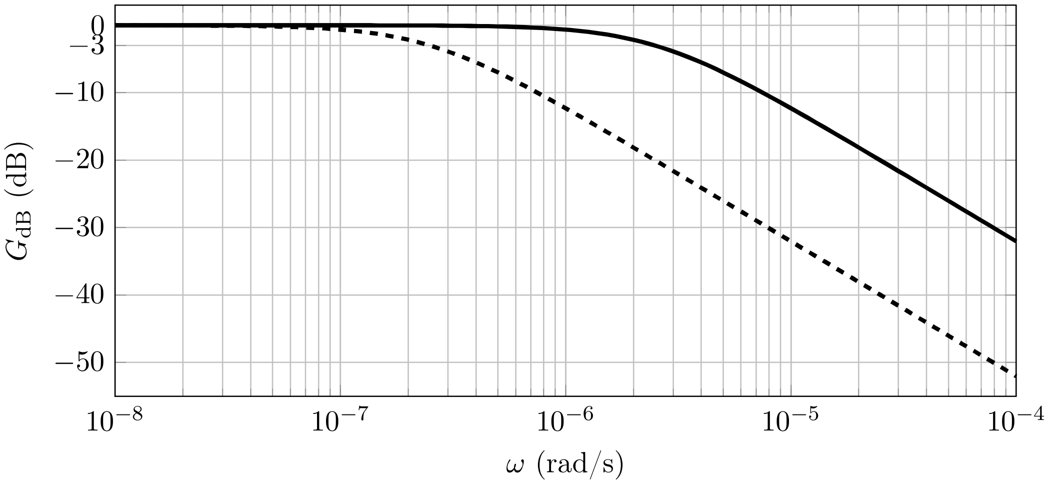
28 - Donner la pente des asymptotes haute et basse fréquence du diagramme de Bode en amplitude.

29 - Donner l'expression du déphasage entre $u_1(t)$ et $e(t)$. Donner sa valeur pour ω petit et pour ω grand.

On obtient les valeurs numériques suivantes :

- Cas d'une isolation par l'intérieur : $\omega_1 = 2{,}5 \times 10^{-6}$ rad/s et $\omega_2 = +\infty$.
- Cas d'une isolation par l'extérieur : $\omega_1 = +\infty$ et $\omega_2 = 2{,}5 \times 10^{-7}$ rad/s.

Les deux diagrammes de Bode en amplitude, l'un correspondant à l'isolation par l'intérieur et l'autre à l'isolation par l'extérieur, sont tracés ci-contre.



30 - Identifier les deux courbes : laquelle correspond à l'isolation par l'intérieur et laquelle correspond à l'isolation par l'extérieur ?

31 - On suppose une amplitude $\Delta T_0 = 10\,°\mathrm{C}$ pour la variation de température extérieure, ce qui dans notre analogie électrique se traduit par une amplitude $E_0 = 10\,\mathrm{V}$ pour le signal $e(t)$.

On considère le cas d'une isolation par l'intérieur. En vous aidant du diagramme de Bode, et en arrondissant à la dizaine la plus proche la valeur de G_{dB}, donner la valeur de l'amplitude U_{10} de $u_1(t)$.

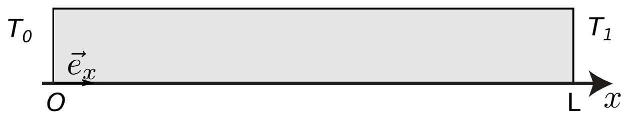
32 - Faire de même pour le cas de l'isolation par l'extérieur, et conclure sur l'avantage de celle-ci.

33 - Dans les deux cas (isolation intérieure ou extérieure), l'argument de la fonction de transfert vaut environ $-\pi/2$ pour la pulsation considérée ici. $u_1(t)$ est-il en avance ou en retard par rapport à $e(t)$? De quelle fraction de période ? Traduire ceci en heures.

III Résistance thermique

La partie précédente utilise le formalisme des résistances thermiques, et on se propose ici de le justifier.
On considère un matériau de longueur L et de section S. Les grandeurs ne dépendent que de l'abscisse x et du temps. En $x = 0$ la température vaut T_0, et en $x = L$ elle vaut T_1. On rappelle l'équation de diffusion thermique : $\left(\dfrac{\partial T}{\partial t}\right)_x = \kappa \left(\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_t$.

Ici κ est la diffusivité thermique du matériau.
On notera également λ sa conductivité thermique.



34 - Donner l'unité de κ. Par analyse dimensionnelle, donner une expression du temps caractéristique τ de variation de la température dans le matériau en fonction de κ et de L.

Dans la suite, on suppose que le temps de variation des sources est suffisamment petit devant τ pour pouvoir se placer en régime stationnaire : la température T ne dépend pas du temps.

35 - Simplifier alors l'équation de diffusion thermique, puis la résoudre pour obtenir $T(x)$ dans le matériau en fonction de x, T_1, T_0 et L.

36 - Donner l'expression du vecteur densité de flux thermique en fonction de T_1, T_0, L, $\vec{e}_x$, et d'une caractéristique du matériau.

37 - On note φ le flux thermique (ou puissance thermique) à travers une tranche du matériau de normale $\vec{e}_x$, compté positif en allant de $x = 0$ à $x = L$. Donner son expression.

38 - En déduire un analogue de la loi d'Ohm : $T_0 - T_1 = R \times \varphi$ avec R la résistance thermique, dont on donnera l'expression en fonction des caractéristiques du matériau.