CCP - Mathématiques 2 MP 2023

Pandou

26 avril 2023

1 Exercice 1

1. D'après la remarque de l'exercice, pour tout polynôme P, $x \longmapsto P(x)e^{-x}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$, donc $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est bien définie. L'application $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est clairement bilinéaire par linéarité de l'intégrale et est symétrique. Enfin, on a
$$\langle P,P\rangle = \int_0^{+\infty} P(x)^2 e^{-x}\mathrm{d}x \geqslant 0$$
Supposons que $\langle P,P\rangle = 0$, la fonction $x \longmapsto P(x)^2 e^{-x}$ est continue et positive sur $[0,+\infty[$, son intégrale est nulle si, et seulement si, la fonction est identiquement nulle, ie $P = 0$.
Ainsi, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur E.

2. $(1,X)$ est une base de $\mathbb{R}_1[X]$, on l'orthonormalise : Déjà $\|1\| = 1$. Soit $P = aX+b$, on cherche a et b de sorte que $\|P\|^2 = 1$ et $\langle 1,P\rangle = 0$:
$$\left\{\begin{array}{lcl} \langle 1,P\rangle & = & 0 \\ \|P\|^2 & = & 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} \displaystyle\int_0^{+\infty}(ax+b)e^{-x}\mathrm{d}x & = & 0 \\ \displaystyle\int_0^{+\infty}(a^2x^2+2abx+b^2)e^{-x}\mathrm{d}x & = & 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} a+b & = & 0 \\ 2a^2+2ab+b^2 & = & 1 \end{array}\right.$$
ce qui donne $a = -b$ et $a^2 = 1$. On prend $a = 1$, de sorte que $P = X-1$.
Ainsi, $(1, X-1)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_1[X]$.

   Cela permet de calculer $P_F(X^2) = \langle X^2,1\rangle 1 + \langle X^2, X-1\rangle(X-1)$. On a :
$$\langle X^2,1\rangle = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x}\mathrm{d}x = 2$$
et,
$$\langle X^2, X-1\rangle = \int_0^{+\infty} x^2(x-1)e^{-x}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}(x^3-x^2)e^{-x}\mathrm{d}x = 4$$
D'où,
$$P_F(X^2) = 4(X-1)+2 = 4X-2$$

3. Comme $P_F(X^2)$ est orthogonal à $X^2 - P_F(X^2)$, on a par le théorème de Pythagore :
$$\|X^2\|^2 = \|(X^2 - P_F(X^2)) + P_F(X^2)\|^2 = \|X^2 - P_F(X^2)\|^2 + \|P_F(X^2)\|^2$$
ce qui est la relation cherchée.

   On a
$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty}(x^2-ax-b)e^{-x}\mathrm{d}x = \inf_{P\in F}\|X^2-P\|^2$$

or cette borne inférieure est atteinte pour $P = P_F(X^2)$. D'où ,

$$\begin{aligned}\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} (x^2 - ax - b)e^{-x}\mathrm{d}x &= \|X^2 - P_F(X^2)\|^2 \\ &= \|X^2\|^2 - \|P_F(X^2)\|^2\end{aligned}$$

On calcuile

$$\|X^2\|^2 = \int_0^{+\infty} x^4 e^{-x}\mathrm{d}x = 4! = 24$$

et,

$$\|P_F(X^2)\|^2 = \langle X^2, 1\rangle^2 + \langle X^2, X-1\rangle^2 = 4 + 16 = 20$$

et donc, on a

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} (x^2 - ax - b)e^{-x}\mathrm{d}x = 24 - 20 = 4$$

2 Exercice 2

4. Soit $(m,n) \in \mathbb{N}^2$.
   - Si $m > n$, $\big((Z=m)\cap(T=n)\big) = \big((X=m)\cap(Y=n)\big) \sqcup \big((X=n)\cap(Y=m)\big)$ où les deux événements sont disjoints car $m > n$, donc, on a, par indépendance de X et Y :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big((Z=m)\cap(T=n)\big) &= \mathbb{P}\big((X=m)\cap(Y=n)\big) + \mathbb{P}\big((X=n)\cap(Y=m)\big) \\ &= \mathbb{P}(X=m)\mathbb{P}(Y=n) + \mathbb{P}(X=n)\mathbb{P}(Y=m) \\ &= (pq^m)(pq^n) + (pq^n)(pq^m) \\ &= 2p^2q^{n+m}\end{aligned}$$

   - Si $m = n$, on a $\big((Z=m)\cap(T=n)\big) = (X=m)\cap(Y=m)$, donc, par indépendance de X et Y, on a :

$$\mathbb{P}\big((Z=m)\cap(T=n)\big) = \mathbb{P}(X=m)\mathbb{P}(Y=m) = p^2q^{2m}$$

   - Si $m < n$, comme on a toujours $Z \geqslant T$, l'événement $\big((Z=m)\cap(T=n)\big)$ est impossible, d'où :

$$\mathbb{P}\big((Z=m)\cap(T=n)\big) = 0$$

5. On a alors par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z=m) &= \sum_{n=0}^{m} \mathbb{P}\big((Z=m)\cap(T=n)\big) \\ &= \sum_{n=0}^{m-1} 2p^2q^{n+m} + p^2q^{2m} \\ &= 2p^2q^m \sum_{n=0}^{m-1} q^n + p^2q^{2m} \\ &= 2p^2q^m \frac{1-q^m}{1-q} + p^2q^{2m} \\ &= 2pq^m(1-q^m) + p^2q^{2m}\end{aligned}$$

D'où la loi de Z.

3 Problème

3.1 Partie 1

6. La matrice A est symétrique réelle, donc par le théorème spectral, elle est diagonalisable. On calcule ensiute :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{donc} \qquad \Pi_1^2 = \Pi_1$$

donc, Π_1 est un projecteur, et,

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix} \qquad \text{donc} \qquad \Pi_2^2 = \Pi_2$$

Donc, Π_2 aussi. On a :

$$\Pi_1 + 5\Pi_2 = A, \qquad \Pi_1 + \Pi_2 = I_2 \qquad \text{et} \qquad \Pi_1\Pi_2 = 0$$

7. Si $x \in \mathrm{Ker}\big(P(u)\big)$, alors $(PQ)(u)(x) = (QP)(u)(x) = Q(u) \circ P(u)(x) = 0$. Donc, $x \in \mathrm{Ker}\big((PQ)(u)\big)$.
Comme P et Q sont premiers entre eux, on écrit une relation de Bézout : $PU+QV = 1$. Si $x \in \mathrm{Ker}\big((PQ)(u)\big)$, on écrit
$$x = (QV)(u)(x) + (PU)(u)(x) \in \mathrm{Ker}\big(P(u)\big) + \mathrm{Ker}\big(Q(u)\big)$$
En effet, $P(u)\big((QV)(u)(x)\big) = (PQV)(u)(x) = V \circ (PQ)(u)(x) = 0$. Idem pour le deuxième terme.

Enfin, si $x \in \mathrm{Ker}\big(P(u)\big) \cap \mathrm{Ker}\big(Q(u)\big)$. La relation de Bézout donne :
$$x = (PU)(u)(x) + (QV)(u)(x) = U \circ P(u)(x) + V \circ Q(u)(x) = 0$$
Ainsi, on a la somme directe
$$\mathrm{Ker}\big((PQ)(u)\big) = \mathrm{Ker}\big(P(u)\big) \oplus \mathrm{Ker}\big(Q(u)\big)$$

8. On a $Q_1 = P_2^{k_2}$ et $Q_2 = P_1^{k_1}$ qui sont premiers entre eux car P_1 et P_2 sont premiers entre eux. Ainsi, une relation de Bézout donne deux polynômes $R_1, R_2 \in \mathbb{C}[X]$ tels que $R_1Q_1 + R_2Q_2 = 1$.

9. On a :
$$\begin{aligned} p_i \circ p_j &= (R_iQ_iR_jQ_j)(u)\\ &= (R_iR_j)(u) \circ (Q_iQ_j)(u)\\ &= (R_iR_j)(u) \circ \left(\frac{\pi_u}{P_i^{k_i}}\frac{\pi_u}{P_j^{k_j}}\right)(u)\\ &= (R_iR_j)(u) \circ \left(\frac{\pi_u}{P_i^{k_i}P_j^{k_j}}\right)(u) \circ \pi_u(u)\\ &= 0 \end{aligned}$$
Grâce à la relation de Bézout, on a immédiatement
$$\sum_{i=1}^{m} p_i = \sum_{i=1}^{m} (R_iQ_i)(u) = \mathrm{Id}_E$$
Enfin, on compose cette dernière relation par p_i ce qui donne :
$$\sum_{j=1}^{n} p_i \circ p_j = p_i$$
mais comme $p_i \circ p_j = 0$ si $j \neq i$, cela se réduit à $p_i^2 = p_i$, donc p_i est un projecteur.

10. Les polynômes $(X-\lambda_i)^{\alpha_i}$ sont deux à deux premiers entre eux, car les λ_i sont distincts. Alors, par le lemme de décomposition des noyaux et le théorème de Cayley-Hamilton, on a
$$E = \mathrm{Ker}\big(\chi_u(u)\big) = \bigoplus_{i=1}^{m} \mathrm{Ker}\big((u-\lambda_i\mathrm{Id})^{\alpha_i}\big) = \bigoplus_{i=1}^{m} N_i$$

11. D'après la question 9., on a $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} p_i(x) \in \mathrm{Im}(p_1) + ... + \mathrm{Im}(p_m)$.
Soit $x = y_1 + ... + y_m$ avec $y_i \in \mathrm{Im}(p_i)$. Pour chaque i, on prend x_i tel que $y_i = p_i(x_i)$ de sorte que
$$x = \sum_{i=1}^{m} p_i(x_i)$$

Si $j \in [\![1, m]\!]$, on applique p_j à cette relation, en utilisant le fait que $p_j \circ p_i = 0$ si $i \neq j$, on a :

$$p_j(x) = p_j^2(x_j) = p_j(x_j) = y_j$$

Ceci détermine les coefficients y_j de façon unique. Ainsi, on a la somme directe

$$E = \mathrm{Im}(p_1) \oplus ... \oplus \mathrm{Im}(p_m)$$

12. On commence par remarquer que les racines de π_u sont les racines de χ_u et donc, on a $P_i = (X - \lambda_i)$ et $k_i \leqslant \alpha_i$ car χ_u est anunlateur de u. On a une inclusion : soit $y \in \mathrm{Im}(p_i)$, on écrit $y = p_i(x)$. Alors, on a :

$$\begin{array}{rcl} \left(u - \lambda_i \mathrm{Id}_E\right)^{\alpha_i}(y) & = & \left((X-\lambda_i)^{\alpha_i} R_i Q_i\right)(u)(x) \\ & = & \left(R_i (X-\lambda_i)^{\alpha_i - k_i} \pi_u\right)(u)(x) \\ & = & 0 \end{array}$$

car $\pi_u(u)(x) = 0$. Ainsi, on a $\mathrm{Im}(p_i) \subset N_i$.
Or, on a

$$E = \bigoplus_{i=1}^{m} \mathrm{Im}(p_i) = \bigoplus_{i=1}^{m} N_i$$

Si au moins une inclusion était stricte, on ne pourrait pas avoir la dernière égalité. Ainsi, on a toujours des égalités : $\mathrm{Im}(p_i) = N_i$.

3.2 Partie II

13. Comme u est diagonalisable, dans une base $\mathcal{B}$, on a :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_1, ..., \lambda_m, ..., \lambda_m)$$

On remarque alors que $\displaystyle\prod_{i=1}^{m}(X - \lambda_i)$ est annulateur de u. De plus, les racines de π_u sont celles de χ_u, on en déduit donc que

$$\pi_u = \prod_{i=1}^{m}(X - \lambda_i)$$

14. Le théorème de décomposition en éléments simples permet de dire qu'il existe $a_1, ..., a_m$ des réels tels que

$$\frac{1}{\pi_u} = \sum_{i=1}^{m} \frac{a_i}{X - \lambda_i}$$

En multipliant par $X - \lambda_j$, on a

$$\frac{1}{Q_j(X)} = \frac{X - \lambda_j}{\pi_u} = a_j + \sum_{i \neq j} \frac{a_i(X - \lambda_j)}{X - \lambda_i}$$

En évaluant en $X = a_j$, on trouve $a_j = \dfrac{1}{Q_j(\lambda_j)} = \theta_j$. Ainsi,

$$\frac{1}{\pi_u} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\theta_i}{X - \lambda_i} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\theta_i}{P_i}$$

Ceci permet d'écrire une relation de Bézout en multipliant cette dernière égalité par π_u :

$$1 = \sum_{i=1}^{m} \theta_i \frac{\pi_u}{P_i} = \sum_{i=1}^{m} \theta_i Q_i$$

Ainsi, par définition de la question 9., on a

$$p_i = \theta_i Q_i(u) = \frac{Q_i(u)}{Q_i(\lambda_i)}$$

15. On a :

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{Q_i(X)}{Q_i(\lambda_i)} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \prod_{j\neq i} \frac{X-\lambda_j}{\lambda_i-\lambda_j}$$

On reconnait là l'interpolation de Lagrange : c'est l'unique polynôme de degré au plus $m-1$ qui donne λ_k quand évalué en λ_k pour tout $k \in [\![1, m]\!]$. X est un autre polynôme vérifiant cette propriété et donc, on a

$$X = \sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda_i Q_i(X)}{Q_i(\lambda_i)}$$

Et on évalue cette dernière relation en u pour trouver :

$$u = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{Q_i(u)}{Q_i(\lambda_i)} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i p_i$$

16. (a) La matrice A est symétrique réelle, donc diagonalisable d'après le théorème spectral. On calcule $A^2 = 4I_4$.

(b) Ainsi, $\pi_A(X) = X^2 - 4$ qui est annulateur de A et de degré minimal (car les polynômes de degré 1 n'annulent pas A). On a $Q_1(X) = X-2$ (associé à la valeur propre -2) et $Q_2(X) = X+2$ (associé à la valeur propre 2). On a :

$$\Pi_1 = \frac{Q_1(A)}{Q_1(-2)} = -\frac{1}{4}(A-2I_4) \qquad \text{et} \qquad \Pi_2 = \frac{Q_2(A)}{Q_2(2)} = \frac{1}{4}(A+2I_4)$$

Ainsi, on a

$$A = -2\Pi_1 + 2\Pi_2 \qquad \text{avec} \qquad \Pi_1 = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \Pi_2 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

(c) On a $\Pi_1\Pi_2 = 0 = \Pi_2\Pi_1$ et donc, on a

$$A^q = 2^q(\Pi_2 - \Pi_1)^q = 2^q\left(\Pi_2^q + (-1)^q \Pi_1^q\right)$$

17. On note $m = \deg(\pi_v)$, alors la famille $(\mathrm{Id}, v, ..., v^{m-1})$ est libre. En effet, si on avait une relation de liaison de cette famille, on aurait un polynôme $P \in \mathbb{R}_{m-1}[X]$ tel que $P(v) = 0$, mais comme π_v est de degré m, on a forcément $P = 0$ et donc la relation de liaison est triviale.
On montre que cette famille est surjective : Si $u \in \mathbb{C}[v]$, on écrit $u = P(v)$ avec $P \in \mathbb{R}[X]$. On écrit la division euclidienne de P par π_v : $P = Q\pi_v + R$ avec $\deg(R) \leqslant m-1$. Alors, on écrit $R = \sum_{i=0}^{m-1} a_i X^i$ et on trouve :

$$u = (Q\pi_v)(v) + R(v) = R(v) = \sum_{i=0}^{m-1} a_i v^i$$

Donc, $(\mathrm{Id}, v, ..., v^{m-1})$ est génératrice. Ainsi, $(\mathrm{Id}, v, ..., v^{m-1})$ est une base de $\mathbb{C}[v]$, donc

$$\dim\left(\mathbb{C}[v]\right) = m = \deg(\pi_v)$$

18. Si u est diagonalisable, on a $\deg(\pi_u) = m$. D'après la question 15., on a

$$u = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i p_i$$

Donc, la famille $(p_1, ..., p_m)$ est une famille génératrice de cardinal m de l'espace $\mathbb{C}[u]$ de dimension m, donc il s'agit d'une base de $\mathbb{C}[u]$.

19. Non. On considère u un endomorphisme nilpotent d'ordre $p \geqslant 2$. Alors, $\pi_u = X^p$ et on en déduit que u admet un seul projecteur spectral. Or, $\mathbb{C}[u]$ est de dimension $p > 1$.

20. Par linéarité, on en déduit que pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, on a

$$P(u) = \sum_{i=1}^{m} P(\lambda_i) f_i$$

On prend pour P le polynôme $P = \prod_{i=1}^{m} (X - \lambda_i)$, on en déduit que $P(u) = 0$ et P est scindé à racines simples, donc u est diagonalisable.