

Concours National Commun

Corrigé de l'épreuve de Mathématiques 2

Session 2023 - Filière MP

m.laamoum@gmail.com¹

Exercice

Probabilité qu'une matrice soit diagonalisable

1.1. Étude de la diagonalisabilité d'une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

On considère $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et on pose $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$.

1.1.1. Si $\alpha \neq \beta$, alors A admet deux valeurs propres distinctes donc elle est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1.1.2. Si $\alpha = \beta$ et A est diagonalisable alors elle est semblable à αI_2 par suite elle est égale à αI_2 ce qui est absurde donc A n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1.2. Calcul de la probabilité qu'une matrice aléatoire soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

1.2.1. $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p_1)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X = k) = q_1^{k-1} p_1$, avec $q_1 = 1 - p_1$.

1.2.2. On a $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ donc $U(\Omega) = \{k + h \mid k, h \in \mathbb{N}^*\} = \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

→ Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ on a

$$\mathbb{P}(U = n) = \sum_{k=0}^n \mathbb{P}([X = k] \cap [Y = n - k])$$

X et Y ne prennent pas la valeur 0 donc

$$\mathbb{P}(U = n) = \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}([X = k] \cap [Y = n - k])$$

et les deux variables sont indépendantes

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(U = n) &= \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(X = k) \mathbb{P}(Y = n - k) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} q_1^{k-1} p_1 q_2^{n-k-1} p_2 \quad (\text{avec } q_1 = 1 - p_1, q_2 = 1 - p_2) \\ &= p_1 p_2 q_2^{n-2} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{q_1}{q_2}\right)^{k-1} \quad (q_2^{n-k-1} = q_2^{n-2+(k-1)}) \end{aligned}$$

si $\frac{q_1}{q_2} = 1$ alors $p_1 = p_2$ et $\mathbb{P}(U = n) = (n-1) p_1^2 q_1^{n-2}$ et si $\frac{q_1}{q_2} \neq 1$ alors

$$\mathbb{P}(U = n) = p_1 p_2 q_2^{n-2} \frac{1 - \left(\frac{q_1}{q_2}\right)^{n-1}}{1 - \frac{q_1}{q_2}} = p_1 p_2 \frac{q_1^{n-1} - q_2^{n-1}}{q_2 - q_1}$$

Ainsi

$$\mathbb{P}(U = n) = \begin{cases} (n-1) p_1^2 q_1^{n-2} & \text{si } p_1 = p_2 \\ p_1 p_2 \frac{q_1^{n-1} - q_2^{n-1}}{q_2 - q_1} & \text{si } p_1 \neq p_2 \end{cases}$$

→ Deuxième méthode : On calcule la fonction génératrice $G_U(t) = \sum_{n=2}^{+\infty} \mathbb{P}(U = n) t^n$ pour tout $t \in]-1, 1[$.
Les variables X et Y sont indépendantes donc pour tout $t \in]-1, 1[$ on a $G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t)$, le

1. <https://tinyurl.com/2qyzzrbd>

théorème du produit de Cauchy des séries entières donne le résultat.

Rappelons que $G_X(t) = \frac{p_1 t}{1 - q_1 t}$, $G_Y(t) = \frac{p_2 t}{1 - q_2 t}$.

1.2.3. $V = \min(X, Y)$. On a $V(\Omega) = \mathbb{N}^*$, et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$[V > k] = [X > k] \cap [Y > k]$$

donc $\mathbb{P}(V > k) = \mathbb{P}(X > k, Y > k) = \mathbb{P}(X > k)\mathbb{P}(Y > k)$ (car X et Y sont indépendantes).

De plus

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X > k) &= \sum_{n=k+1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) \\ &= \sum_{n=k+1}^{+\infty} p_1 q_1^{n-1} \quad (q_1 = 1 - p_1) \\ &= \frac{p_1 q_1^k}{1 - q_1} \\ &= q_1^k \end{aligned}$$

de même $\mathbb{P}(Y > k) = q_2^k$, par suite $\boxed{\mathbb{P}(V > k) = (q_1 q_2)^k}$.

Et on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(V = k) &= \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) - \sum_{n=k+1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) \\ &= \mathbb{P}(V > k - 1) - \mathbb{P}(V > k) \\ &= (q_1 q_2)^{k-1} - (q_1 q_2)^k \end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\mathbb{P}(V = k) = (q_1 q_2)^{k-1} (1 - q_1 q_2)}$ et V suit la loi $\mathcal{G}(1 - q_1 q_2)$.

1.2.4. La famille $([X = n])_{n \in \mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X < Y) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X < Y] \cap [X = n]) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}([Y > n] \cap [X = n]) \end{aligned}$$

et on a $[Y > n] \cap [X = n] = \bigcup_{k=n+1}^{+\infty} [Y = k] \cap [X = n]$, c'est une réunion disjointe donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([Y > n] \cap [X = n]) &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathbb{P}([Y = k] \cap [X = n]) \\ &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathbb{P}(Y = k) \cdot \mathbb{P}(X = n) \quad (X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes}) \\ &= p_1 p_2 q_1^{n-1} \sum_{k=n+1}^{+\infty} q_2^{k-1} \\ &= p_1 p_2 q_1^{n-1} \frac{q_2^n}{1 - q_2} \\ &= p_1 q_1^{n-1} q_2^n \end{aligned}$$

par suite

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X < Y) &= \sum_{n=1}^{+\infty} p_1 q_1^{n-1} q_2^n \\ &= \frac{p_1 q_2}{1 - q_1 q_2} \end{aligned}$$

qui s'écrit aussi $\boxed{\mathbb{P}(X < Y) = \frac{p_1 (1 - p_2)}{p_1 + p_2 - p_1 p_2}}$.

1.2.5. Soit D l'événement « M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ », d'après la question 1.1 on a $D = [X \neq Y]$ et il s'écrit

$$D = [X > Y] \cup [X < Y]$$

les deux événements sont disjoint donc

$$\mathbb{P}(D) = \mathbb{P}(X > Y) + \mathbb{P}(X < Y)$$

d'après 1.2.4 on a

$$\mathbb{P}(D) = \frac{p_1 q_2 + p_2 q_1}{1 - q_1 q_2}$$

Problème

Calcul de la distance d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ au groupe orthogonal euclidien $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$

1^{ère} Partie

Quelques résultats préliminaires

1.1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a ${}^t({}^tMM) = {}^tMM$, donc tMM est symétrique et pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

$${}^tX ({}^tMM) X = {}^t(MX)(MX) = \|MX\|^2 \geq 0 \quad (\|X\|^2 = \langle X, X \rangle)$$

D'où tMM est symétrique et positive.

1.2. Soit $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, à termes positifs.

1.2.1. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de composantes x_1, \dots, x_n .

On a

$$DX = \begin{pmatrix} d_1 x_1 \\ \vdots \\ d_n x_n \end{pmatrix}$$

donc
$${}^tXDX = \sum_{i=1}^n d_i x_i^2.$$

1.2.2. d_1, \dots, d_n sont positifs donc ${}^tXDX = \sum_{i=1}^n d_i x_i^2 \geq 0$ pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ainsi D est une matrice symétrique positive.

1.3. Caractérisation de la positivité d'une matrice symétrique par le signe de ses valeurs propres

1.3.1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique et positive, d'après le théorème spectral le spectre de A est non vide et inclus dans \mathbb{R} .

Soit λ une valeur propre de A et X un vecteur propre A associé à λ , on a $X \neq 0$ et

$$\begin{aligned} {}^tXAX &= {}^tX(AX) \\ &= \lambda ({}^tXX) \end{aligned}$$

comme ${}^tXAX \geq 0$ et ${}^tXX = \|X\|^2 > 0$ alors $\lambda \geq 0$.

1.3.2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique.

i) D'après le théorème spectral, A est diagonalisable et ses vecteurs propres forment une base orthonormée de \mathbb{R}^n , par suite il existe une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice orthogonale $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telles que ${}^tP.D.P = A$.

ii) Supposons que $Sp(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \subset \mathbb{R}^+$, on a ${}^tP.D.P = A$ avec $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, qui est positive, donc pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

$${}^tX.A.X = {}^tX . {}^tP.D.P.X = {}^t(PX) . D . (PX) \geq 0$$

A est une matrice symétrique positive .

1.4. Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. D'après 1.1 tBB est une matrice symétrique positive et d'après 1.3 il existe une matrice diagonale $\Delta \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, à termes positifs, et une matrice orthogonale $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telles que ${}^tB.B = P\Delta^tP$, alors ${}^tP({}^tBB)P = \Delta$.

1.5. **Produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$**

On a pour tout $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\varphi(A, B) = \text{Tr}({}^tAB) = \text{Tr}({}^t({}^tAB)) = \text{Tr}(A{}^tB) = \text{Tr}({}^tBA) = \varphi(B, A)$$

Donc φ est symétrique, et

$$\varphi(A + \lambda B, C) = \text{Tr}({}^t(A + \lambda B)C) = \text{Tr}({}^tAC) + \lambda \text{Tr}({}^tBC) = \varphi(A, C) + \lambda \varphi(B, C)$$

Par symétrie, φ est bilinéaire, on vérifie que

$$\varphi(A, A) = \text{Tr}({}^tAA) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j}^2 \geq 0$$

par suite $\varphi(A, A) = 0$ si et seulement si $a_{i,j} = 0$ pour tout $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ si et seulement si $A = 0$. Ainsi φ est positif et définie. D'où φ est un produit scalaire .

2^{ème} Partie

Décomposition polaire d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

2.1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; on note A_1, A_2, \dots, A_n les matrices de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ qui forment les colonnes de A et on suppose qu'il existe une matrice diagonale $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, à termes positifs, telle que ${}^tAA = D^2$.

2.1.1. Posons $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ et ${}^tA = (b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ avec $b_{i,j} = a_{j,i}$, on a ${}^tAA = (c_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ avec

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^n b_{i,k}a_{k,j} = \sum_{k=1}^n a_{k,i}a_{k,j}$$

et

$$\sum_{k=1}^n a_{k,i}a_{k,j} = (a_{1,i}, \dots, a_{n,i}) \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix} = {}^tA_iA_j$$

donc $c_{i,j} = {}^tA_iA_j$.

Puis que ${}^tAA = (c_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} = D^2$ alors ${}^tA_iA_j = \begin{cases} d_i^2 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$.

Si $d_i = 0$ alors ${}^tA_iA_j = 0$ pour tout j en particulier pour $i = j$, donc ${}^tA_iA_i = \|A_i\|^2 = 0$ d'où $A_i = 0$.

2.1.2. Soit $I = \{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \mid d_i \neq 0\}$.

Si $I = \emptyset$ alors $A = 0$ et toute base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ convient.

Si $I \neq \emptyset$, posons $E_i = \frac{1}{d_i} A_i$ pour tout $i \in I$, on a alors $\langle E_i, E_j \rangle = {}^t E_i E_j = \begin{cases} d_i^2 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$ et la famille $(E_i)_{i \in I}$ est orthonormée, on la complète en une base, (E_1, \dots, E_n) orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et on a pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $A_i = d_i E_i$.

2.1.3. Soit E la matrice dont la j ième colonne est E_j , ainsi E est une matrice orthogonale.

Posons $E = (b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$, $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ et $D = (D_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$, comme $A_j = d_j E_j$ pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ alors :

$$a_{i,j} = d_j b_{i,j} = \sum_{k=1}^n b_{i,k} D_{k,j}$$

par suite $A = ED$.

2.2. Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2.2.1. D'après 1.1 ${}^t B B$ est une matrice symétrique positive et d'après 1.3 il existe une matrice diagonale

$\Delta = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, à termes positifs, et une matrice orthogonale $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telles que ${}^t P ({}^t B B) P = \Delta$, posons $D = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$, alors $\Delta = D^2$ et ${}^t P {}^t B B P = D^2$.

2.2.2. On a ${}^t P {}^t B B P = {}^t (B P) (B P) = D^2$, d'après 2.1.3 il existe une matrice $E \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $B P = E D$.

Par suite $B P = E {}^t P P D$ et $B = (E {}^t P) (P D {}^t P)$, posons

$$O = E {}^t P \text{ et } S = P D {}^t P$$

Donc $B = OS$ et on a E, P sont orthogonaux donc O est orthogonale, D est diagonale à termes positifs donc S symétrique positive.

2.3. Application

On a $C = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $A = {}^t C C = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

→ Diagonalisation de $A = {}^t C C$:

- Valeurs propres de A :

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda - 6 & -5 & -5 \\ -5 & \lambda - 6 & -5 \\ -5 & -5 & \lambda - 6 \end{vmatrix} \\ &\stackrel{C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3}{=} \begin{vmatrix} \lambda - 16 & -5 & -5 \\ \lambda - 16 & \lambda - 6 & -5 \\ \lambda - 16 & -5 & \lambda - 6 \end{vmatrix} \\ &\stackrel{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{=} \begin{vmatrix} \lambda - 16 & -5 & -5 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 16)(\lambda - 1)^2 \end{aligned}$$

donc $Sp(A) = \{1, 16\}$.

- Base orthonormée de vecteurs propres de A :

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1(A) \Leftrightarrow x + y + z = 0$$

soit $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in E_1(A)$ et $X_2 \in E_1(A)$ orthogonale à X_1 .

Donc $X_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x-y \end{pmatrix}$ et $\langle X_1, X_2 \rangle = 0$ par suite $x = y$ et $X_2 = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, prenons par exemple $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Une base orthonormée de $E_1(A)$ est donnée par :

$$V_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, V_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

On a $E_{16}(A) = (E_1(A))^\perp$, il est donc engendré par $V_3 = V_1 \wedge V_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Donc $A = P\Delta^tP$ avec $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ et $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$

Par suite $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ et $E = CPD^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & -\frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$.

Ainsi

$$O = EP = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } S = P.D.^tP = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

3^{ème} Partie

Application à un calcul de distance

3.1.

3.1.1. L'application $M \mapsto {}^tM$ est linéaire en dimensions finies donc elle est continue.

3.1.2. Posons $f : M \mapsto {}^tMM$. Soit

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M &\mapsto ({}^tM, M) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \psi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ (A, B) &\mapsto A.B \end{aligned}$$

on a $f = \psi \circ \varphi$, φ est linéaire en dimensions finies donc elle est continue et ψ est bilinéaire en dimensions finies donc elle est continue, ainsi f est continue.

3.1.3. On a

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) &= \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}); {}^tMM = I_n\} \\ &= \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}); f(M) = I_n\} \\ &= f^{-1}(\{I_n\})\end{aligned}$$

$\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est l'image réciproque la partie fermée $\{I_n\}$ par une application continue donc c'est une partie fermée.

De plus pour tout M dans $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ on a $\|M\|_2 = \sqrt{\text{Tr}({}^tMM)} = \sqrt{\text{Tr}(I_n)} = \sqrt{n}$, donc $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est bornée .

3.2. On est en dimension finie donc $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un compact et l'application $M \mapsto A - M$ est continue (elle est somme d'une application constante et une application linéaire), donc elle est bornée et atteint ses bornes sur $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, ainsi la borne inférieure existe et elle est atteinte.

3.3. Soit $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ on a

$$\begin{aligned}\|\Omega A\|_2^2 &= \text{Tr}({}^t(\Omega A) (\Omega A)) \\ &= \text{Tr}({}^tA \cdot {}^t\Omega \cdot \Omega \cdot A) \quad ({}^t\Omega \cdot \Omega = I_n) \\ &= \text{Tr}({}^tA \cdot A) \\ &= \|A\|_2^2\end{aligned}$$

d'où $\|\Omega A\|_2 = \|A\|_2$.

De même

$$\begin{aligned}\|A\Omega\|_2^2 &= \text{Tr}({}^t(A\Omega) (A\Omega)) \\ &= \text{Tr}((A\Omega)^t (A\Omega)) \\ &= \text{Tr}(A \cdot \Omega \cdot {}^t\Omega \cdot {}^tA) \quad (\Omega \cdot {}^t\Omega = I_n) \\ &= \text{Tr}(A \cdot {}^tA) \\ &= \text{Tr}({}^tA \cdot A) \\ &= \|A\|_2^2\end{aligned}$$

d'où $\|A\Omega\|_2 = \|A\|_2$.

3.4. Soient $O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique et positive telles que $A = OS$.

3.4.1. Soit $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, en déduire que $d(A, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})) = d(S, \mathcal{O}_n(\mathbb{R}))$

On a

$$\|A - \Omega\|_2^2 = \|OS - \Omega\|_2^2 = \|O(S - O^{-1}\Omega)\|_2^2$$

$O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ donc $\|O(S - O^{-1}\Omega)\|_2^2 = \|S - O^{-1}\Omega\|_2^2$ par suite

$$\|A - \Omega\|_2 = \|S - O^{-1}\Omega\|_2$$

Ainsi

$$d(A, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})) = \inf_{M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})} \|A - M\|_2 = \inf_{M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})} \|S - O^{-1}M\|_2$$

Comme $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un groupe, alors $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = \{O^{-1}M, M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})\}$, d'où

$$\boxed{d(A, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})) = \inf_{M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})} \|S - M\|_2 = d(S, \mathcal{O}_n(\mathbb{R}))}$$

3.4.2. S est une matrice symétrique réelle , d'après le théorème spectral elle est diagonalisable , donc il existe D une matrice diagonale et P une matrice orthogonale telles que $S = PDP^{-1}$.

Et on a

$$\begin{aligned}
 d(A, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})) &= d(S, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})) \\
 &= \inf_{M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})} \|S - M\|_2 \\
 &= \inf_{M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})} \|PDP^{-1} - M\|_2 \\
 &= \inf_{M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})} \|D - P^{-1}MP\|_2 \quad (\text{d'après 3.3}) \\
 &= \inf_{M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})} \|D - M\|_2 \quad (\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = \{P^{-1}MP, M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})\})
 \end{aligned}$$

d'où $d(A, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})) = d(D, \mathcal{O}_n(\mathbb{R}))$.

3.5. On pose $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

3.5.1. S est une matrice symétrique positive, donc d'après la question 1.3.1, on a $\lambda_1 \geq 0, \dots, \lambda_n \geq 0$.

3.5.2. Soit $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, posons $D = \Delta^2$ avec $\Delta = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$ on a

$$\text{Tr}(D\Omega) = \langle \Delta, \Delta\Omega \rangle$$

l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$\text{Tr}(D\Omega) \leq \|\Delta\|_2 \|\Delta\Omega\|_2.$$

d'après 3.3 $\|\Delta\Omega\|_2 = \|\Delta\|_2$ donc

$$\text{Tr}(D\Omega) \leq \|\Delta\|_2^2 = \sum_{k=1}^n \lambda_k.$$

3.5.3. Soit $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned}
 \|D - \Omega\|_2^2 &= \text{Tr}({}^t(D - \Omega)(D - \Omega)) \\
 &= \text{Tr}({}^tDD) - \text{Tr}({}^tD\Omega) - \text{Tr}({}^t\Omega D) + \text{Tr}({}^t\Omega\Omega) \\
 &= \sum_{k=1}^n \lambda_k^2 - 2\text{Tr}(\Omega D) + \text{Tr}(I_n) \\
 &= \sum_{k=1}^n \lambda_k^2 - 2\text{Tr}(\Omega D) + n
 \end{aligned}$$

3.5.4. D'après la question précédente, on a

$$\begin{aligned}
 d(D, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})) &= \inf_{\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})} \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k^2 - 2\text{Tr}(\Omega D) + n \right) \\
 &= \sum_{k=1}^n \lambda_k^2 + n + 2 \inf_{\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})} (-\text{Tr}(\Omega D))
 \end{aligned}$$

remarquons que $\inf_{\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})} (-\text{Tr}(\Omega D)) = \sup_{\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})} \text{Tr}(\Omega D)$ donc

$$d(D, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})) = \sum_{k=1}^n \lambda_k^2 + n + 2 \sup_{\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})} \text{Tr}(\Omega D)$$

De la question 3.5.2 on a pour tout $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ $\text{Tr}(D\Omega) \leq \sum_{k=1}^n \lambda_k$, avec égalité pour $\Omega = I_n$ donc

$$\sup_{\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})} \text{Tr}(\Omega D) = \sum_{k=1}^n \lambda_k.$$

Par suite

$$\begin{aligned}
 d(D, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})) &= \sum_{k=1}^n \lambda_k^2 + n - 2 \sum_{k=1}^n \lambda_k \\
 &= \sum_{k=1}^n (\lambda_k - 1)^2
 \end{aligned}$$

écrivons

$$\sum_{k=1}^n (\lambda_k - 1)^2 = \text{Tr}({}^t(D - I_n)(D - I_n)) = \|D - I_n\|_2^2$$

donc $d(A, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})) = \|D - I_n\|_2^2$.

Par suite

$$\begin{aligned} d(A, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})) &= d(D, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})) \\ &= \|D - I_n\|_2^2 \\ &= \|P^{-1}(D - I_n)P\|_2^2 \\ &= \|S - I_n\|_2^2 \\ &= \|SO - O\|_2^2 \\ &= \|A - O\|_2^2 \end{aligned}$$

d'où $d(A, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})) = \|A - O\|_2^2$.

3.6. Application : $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

On a d'après la question 2.3 $-C = OS$ (!!!) avec

$$O = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad S = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

donc $C = (-O)S$, d'après 3.5.4, $d(C, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})) = \|C + O\|_2$, ce qui donne

$$C + O = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad {}^t(C + O)(C + O) = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -3 \\ -3 & 3 & 3 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

d'où $d(C, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})) = 3$.

•••FIN•••