Mines-Ponts Mathématiques 1 MP 2023

Pandou

3 mai 2023

1 Étude d'une norme sur $\mathcal{L}(E)$

1. u étant un endomorphisme d'un espace normé de dimension finie, u est continue.
   - Il existe alors $C > 0$ tel que $\forall x \in E, \|u(x)\| \leqslant C\|x\|$. Ainsi, $\left\{\frac{\|u(x)\|}{\|x\|}, x \in E \setminus \{0\}\right\}$ est une partie non vide et majorée (par C) de $\mathbb{R}$, donc admet une borne supérieure.
   - L'ensemble $S = \{x \in E, \|x\| = 1\}$ est compact. En effet, il est fermé comme image réciproque de $\{1\}$ par $\|\cdot\|$ et clairement bornée. Ainsi, u est bornée et atteint ses bornes sur S.

   Ceci justifie l'existence des deux bornes supérieures. Et on a :
$$\sup_{x\in E, x\neq 0} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|} = \sup_{x\in E, x\neq 0} u\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = \sup_{y\in E, \|y\|=1} \|u(y)\|$$
2. Soit $u, v \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
   - Si $|||u||| = 0$, alors $\forall x \neq 0, \frac{\|u(x)\|}{\|x\|} = 0$ et donc $\forall x \neq 0, u(x) = 0$ car $\|\cdot\|$ est une norme. Donc, $u = 0$.
   - Si $x \in E \setminus \{0\}$, on a par inégalité triangulaire de $\|\cdot\|$:
$$\frac{\|(u+v)(x)\|}{\|x\|} \leqslant \frac{\|u(x)\|}{x} + \frac{\|v(x)\|}{x} \leqslant |||u||| + |||v|||$$
     et donc en passant à la borne supérieure, on trouve bien $|||u+v||| \leqslant |||u||| + |||v|||$.
   - On a :
$$|||\lambda u||| = \sup_{x\in E, \|x\|=1} \|\lambda u(x)\| = |\lambda| \sup_{x\in E, \|x\|=1} \|u(x)\| = |\lambda| |||u|||$$

   Ainsi, $|||\cdot|||$ est une norme sur $\mathcal{L}(E)$.
3. Par définition de $|||\cdot|||$, on a $\forall u \in \mathcal{L}(E), \forall x \in E, \|u(x)\| \leqslant |||u||| \|x\|$.
   Soit $u, v \in \mathcal{L}(E)$ et $x \in E$, alors
$$\frac{\|u \circ v(x)\|}{\|x\|} \leqslant |||u||| \frac{\|v(x)\|}{\|x\|} \leqslant |||u||| |||v|||$$
   et en passant à la borne supérieure, on a :
$$|||u \circ v||| \leqslant |||u||| |||v|||$$
   On en déduit alors par une récurrence immédiate sur $k \in \mathbb{N}$ que :
$$|||u^k||| \leqslant |||u|||^k$$

2 Étude de la stabilité en 0 du système linéaire

4. Comme $a \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$, son polynôme caractéristique χ_a est scindé sur $\mathbb{C}$ et on peut donc écrire :
$$\chi_a(X) = \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{m_i}$$

avec $r \in \mathbb{N}^*$, les λ_i sont deux à deux distincts et $m_i \in \mathbb{N}^*$.
Comme les λ_i sont deux à deux distincts, les polynômes $(X-\lambda_i)^{m_i}$ sont deux à deux premiers entre eux et donc le lemme des noyaux donne :

$$\mathrm{Ker}\big(\chi_a(a)\big) = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{Ker}\big((a-\lambda_i \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^n})^{m_i}\big) = \bigoplus_{i=1}^{r} E_i$$

Et par le théorème de Cayley-Hamilton, on a $\chi_a(a) = 0$ et donc :

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{i=1}^{r} E_i$$

5. Soit $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, on écrit $x = (x_1, ..., x_r)$ avec $x_i \in E_i$.

$$\big\|q_i \circ u \circ p_i(x)\big\| = \big\|q_i\big(u(x_i)\big)\big\| = \big\|u(x_i)\big\| \leqslant \|\!|\!| u |\!|\!|_i \|x_i\|$$

On pose $\|x\|_\infty = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant r} \|x_i\|$ qui est une norme sur $\mathbb{C}^n$, donc équivalente à $\|\cdot\|$, il existe donc C tel que $\|\cdot\|_\infty \leqslant C\|\cdot\|$ et donc, on a :

$$\big\|q_i \circ u \circ p_i(x)\big\|` \leqslant \|\!|\!| u |\!|\!|_i \|x\|_\infty \leqslant C \|\!|\!| u |\!|\!|_i \|x\|$$

Et donc, on en déduit que

$$\|\!|\!| q_i u p_i |\!|\!|_c \leqslant C \|\!|\!| u |\!|\!|_i$$

6. Soit $i \in [\![1, r]\!]$ et $x \in E_i$. Comme $(a-\lambda_i \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^n})^{m_i}$ est un polynôme en a, il commute avec a et donc :

$$\big(a-\lambda_i \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^n}\big)^{m_i} \circ a(x) = a \circ \big(a-\lambda_i \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^n}\big)^{m_i}(x) = 0$$

et donc, $a(x) \in \mathrm{Ker}\big((a-\lambda_i \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^n})^{m_i}\big) = E_i$.
Donc, E_i est stable par a.

7. Soit $(i,j) \in [\![1, r]\!]^2$ et $x \in E_j$.
   - Si $i = j$, alors $p_i q_i(x) = p_i(x_i) = x_i$. De sorte que $p_i q_i = \mathrm{Id}_{E_i}$.
   - Si $i \neq j$, alors $p_i q_j(x) = p_i(x_j) = 0$. De sorte que $p_i q_j = 0_{\mathcal{L}(E_j)}$.

   Si $x \in \mathbb{C}^n$, on a $\sum\limits_{i=1}^{r} q_i p_i(x) = \sum\limits_{i=1}^{r} q_i(x_i) = \sum\limits_{i=1}^{r} x_i = x$. Et donc, $\sum\limits_{i=1}^{r} q_i p_i = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^n}$.
8. Soit $x \in \mathbb{C}^n$. D'après, la question 6., on a $a(E_i) \subset E_i$, donc si $x_i \in E_i$, on a $p_i a(x_i) = a(x_i)$. Alors, on a :

$$\sum_{i=1}^{r} q_i a_i p_i(x) = \sum_{i=1}^{r} q_i a_i(x_i) = \sum_{i=1}^{r} a_i(x_i) = \sum_{i=1}^{r} p_i a(x_i) = \sum_{i=1}^{r} a(x_i) = a(x)$$

9. On calcule en utilisant la question 7. :

$$\begin{aligned} a^2 &= \sum_{i=1}^{r} (q_i a_i p_i)^2 + \sum_{i\neq j} (q_i a_i p_i)(q_j a_j p_j) \\ &= \sum_{i=1}^{r} (q_i a_i p_i)(q_i a_i p_i) \\ &= \sum_{i=1}^{r} q_i a_i^2 p_i \end{aligned}$$

Ainsi, par une récurrence immédiate, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, a^n = \sum_{i=1}^{r} q_i a_i^n p_i$$

Et donc, on en déduit que pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} e^{ta} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} a^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} \sum_{i=1}^{r} q_i a_i^n p_i \\ &= \sum_{i=1}^{r} q_i \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} a_i^n \right) p_i \\ &= \sum_{i=1}^{r} q_i e^{t a_i} p_i \end{aligned}$$

10. On écrit : $a_i = (a_i - \lambda_i \mathrm{Id}_{E_i}) + \lambda_i \mathrm{Id}_{E_i}$, et on utilise la sous-multiplicativité de $|||\cdot|||_i$:

$$\begin{aligned} |||e^{ta_i}|||_i &= \left|\left|\left| e^{t(a_i - \lambda_i \mathrm{Id}_{E_i}) + t\lambda_i \mathrm{Id}_{E_i}} \right|\right|\right|_i \\ &= \left|\left|\left| e^{t(a_i - \lambda_i \mathrm{Id}_{E_i})} e^{t\lambda_i \mathrm{Id}_{E_i}} \right|\right|\right|_i \\ &\leqslant \left|\left|\left| e^{t(a_i - \lambda_i \mathrm{Id}_{E_i})} \right|\right|\right|_i \times |||e^{t\lambda_i \mathrm{Id}_{E_i}}|||_i \end{aligned}$$

or l'endomorphisme de E_i $a_i - \lambda_i \mathrm{Id}_{E_i}$ est nilpotente d'ordre au moins m_i, par définition de E_i. Et on a $|||\lambda_i \mathrm{Id}_{E_i}||| = |\lambda_i|$. On en déduit alors que

$$|||e^{ta_i}|||_i \leqslant |e^{t\lambda_i}| \underbrace{\sum_{k=0}^{m_i - 1} \frac{|t|^k}{k!} |||a_i - \lambda_i \mathrm{Id}_{E_i}|||_i^k}_{:= P_i(|t|)}$$

avec $P_i \in \mathbb{R}[X]$.

11. On a, d'après la question 9. et 5. :

$$|||e^{ta}|||_c \leqslant \sum_{i=1}^{r} |||q_i e^{ta_i} p_i|||_c \leqslant \sum_{i=1}^{r} C_i |||e^{ta_i}|||_i$$

On utilise la question précédente et on trouve :

$$|||e^{ta}|||_c \leqslant \sum_{i=1}^{r} C_i |e^{t\lambda_i}| P_i(|t|)$$

On pose $P(t) = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} C_i P_i(t) \in \mathbb{R}[X]$, de sorte qu'on ait bien $P(|t|) \geqslant C_i P_i(|t|)$ pour tout $i \in [\![1, r]\!]$ et on utilise : pour $z \in \mathbb{C}, |e^z| = e^{\mathrm{Re}(z)}$, pour avoir :

$$|||e^{ta}|||_c \leqslant P(|t|) \sum_{i=1}^{r} |e^{t\lambda_i} = P(|t|) \sum_{i=1}^{r} e^{t\mathrm{Re}(\lambda_i)}$$

12. Comme $A \in M_n(\mathbb{R})$, on a $v_{A|\mathbb{R}^n} = u_A$. On en déduit alors que $e^{tv_A}{}_{|\mathbb{R}^n} = e^{tu_A}$ et donc, on a

$$\left\{ \frac{\|e^{tu_A}\|}{\|x\|}, x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \right\} \subset \left\{ \frac{\|e^{tv_A}\|}{\|x\|}, x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \right\}$$

Et donc, en passsant aux bornes supérieures, on a :

$$|||e^{tu_A}|||_r \leqslant |||e^{tv_A}|||_c$$

13. On résoud le problème de Cauchy et on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}, g_{x_0}(t) = e^{tu}(x_0)$$

On suppose que $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_-^* + i\mathbb{R}$. Par la question précédente, il suffit de montrer que $\lim\limits_{t \to +\infty} \left|\left|\left| e^{tv_A} \right|\right|\right|_c = 0$ où v_A est l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé à A. Alors, d'après la question 11., il existe un polynôme réel P tel que

$$\forall t \geqslant 0, \left|\left|\left| e^{tv_A} \right|\right|\right|_c \leqslant P\big(|t|\big) \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} e^{t\mathrm{Re}(\lambda)}$$

Mais comme $\mathrm{Re}\big(\mathrm{Sp}(A)\big) \subset]-\infty, 0[$, on en déduit par croissances comparées que

$$\lim_{t \to +\infty} \left|\left|\left| e^{tv_A} \right|\right|\right|_c = 0$$

Réciproquement, soit λ une valeur propre complexe telle que $\mathrm{Re}(\lambda) \geqslant 0$ et $z_0 \in \mathbb{C}^n$ un vecteur propre de A, alors

$$\left\| e^{tA} z_0 \right\| = e^{t\mathrm{Re}(\lambda)} \|z_0\| \not\longrightarrow 0$$

On écrit $z_0 = x_0 + iy_0$ avec $x_0, y_0 \in \mathbb{R}^n$. Alors, $e^{tA} z_0 = e^{tA} x_0 + i e^{tA} y_0$ et on ne peut pas avoir $e^{tA} x_0, e^{tA} y_0 \longrightarrow 0$ en même temps. Ainsi, on a montré qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $e^{tA} x_0$ ne converge pas vers 0 quand t tend vers $+\infty$.

14. On note $\rho = \min\left\{\mathrm{Re}(\lambda), \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\right\} > 0$. On réutilise la question 11. et 12. : pour $t \geqslant 0$, on a par croissances comparées :

$$\left|\left|\left| e^{tu} \right|\right|\right|_r \leqslant CP(t) \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} e^{t\mathrm{Re}(\lambda)} \leqslant rCP(t) e^{-\rho t} = O\left(e^{-\frac{\rho}{2} t}\right)$$

et $\alpha = \dfrac{\rho}{2}$ convient.

On en déduit que

$$\forall t \geqslant 0, \left\| g_{x_0}(t) \right\| \leqslant \left|\left|\left| e^{tu} \right|\right|\right|_r \|x_0\| \leqslant C_2 \|x_0\| e^{-\alpha t}$$

3 Démonstration du théorème de Lyapounov

15. On utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz : pour $t \geqslant 0$ et $x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$\left|\left\langle e^{ta}(x) | e^{ta}(y) \right\rangle\right| \leqslant \|e^{ta}(x)\| \|e^{ta}(y)\| \leqslant \left|\left|\left| e^{ta} \right|\right|\right|_r^2 \|x\| \|y\| = O(e^{-2\alpha t})$$

grâce à la question 14.. Et donc, par comparaison, on en déduit que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left\langle e^{ta}(x) | e^{ta}(y) \right\rangle \mathrm{d}t$ converge absolument.
L'application b est clairement bilinéaire et symétrique. De plus, on a

$$b(x, x) = \int_0^{+\infty} \left\| e^{ta}(x) \right\|^2 \mathrm{d}t \geqslant 0$$

L'application $t \longmapsto \left\| e^{ta}(x) \right\|^2$ est continue et positive et donc son intégrale est positive si, et seulement si, $\forall t \geqslant 0, e^{ta} x = 0$. En particulier, si $t = 0$, cela donne $x = 0$.
Donc, b est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

16. Soit $x \in \mathbb{R}^n$ et $h \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$q(x + h) = q(x) + 2b(x, h) + q(h) = q(x) + 2b(x, h) + o(h)$$

En effet, comme b est un produit scalaire, q est une norme sur $\mathbb{R}^n$ et donc est équivalente à la norme euclidienne : il existe $C > 0$ tel que $q(h) \leqslant C\|h\|^2 = o(h)$. On en déduit que q est différentiable en x et que

$$\mathrm{d}q(x) \cdot h = 2b(x, h)$$

Ainsi, on calcule en reconnaissant une primitive :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{d}q(x)\cdot a(x) & = & 2b\big(x,a(x)\big) \\ & = & 2\displaystyle\int_0^{+\infty}\big\langle e^{ta}(x)|e^{ta}\circ a(x)\big\rangle \\ & = & \big[\|e^{ta}(x)\|^2\big]_0^{+\infty} \\ & = & -\|x\|^2 \end{array}$$

En effet, en utilisant la règle de la chaîne : $\dfrac{\mathrm{d}\|e^{ta}(x)\|^2}{\mathrm{d}t}=2\left\langle e^{ta}(x),\dfrac{\mathrm{d}e^{ta}(x)}{\mathrm{d}t}\right\rangle=2\big\langle e^{ta}(x)|e^{ta}\circ a(x)\big\rangle$.

17. On utilise encore la règle de la chaîne. Notons $\varphi=q\circ f_{x_0}:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^n\mathbb{R}$ et alors, on a

$$\begin{array}{rcl} \varphi'(t) & = & \mathrm{d}q\big(f_{x_0}(t)\big)\cdot f'_{x_0}(t) \\ & = & 2b\big(f_{x_0}(t),f'_{x_0}(t)\big)` \\ & = & 2b\big(f_{x_0}(t),\varphi\big(f_{x_0}(t)\big)\big) \\ & = & 2b\big(f_{x_0}(t),a\big(f_{x_0}(t)\big)\big)+2b\big(f_{x_0}(t),\varepsilon\big(f_{x_0}\big)(t)\big) \\ & = & -\big\|f_{x_0}(t)\big\|^2+2b\big(f_{x_0}(t),\varepsilon\big(f_{x_0}\big)(t)\big) \end{array}$$

(Petite erreur de parenthésage dans l'énoncé : $\varepsilon(f_{x_0})(t)$ et non pas $\varepsilon\big(f_{x_0}(t)\big)$).

18. On utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$b\big(f_{x_0},\varepsilon(f_{x_0})\big)\leqslant\sqrt{q\circ f_{x_0}}\sqrt{q\circ\varepsilon(f_{x_0})}$$

$\varepsilon(y)\underset{y\to0}{\longrightarrow}0$. Ainsi, si $\eta>0$ est fixé, il existe $\alpha>0$ tel que si $q(y)<\alpha$, alors $\sqrt{q\circ\varepsilon(f_{x_0})}\leqslant\eta$ et donc, on a

$$2b\big(f_{x_0},\varepsilon(f_{x_0})\big)\leqslant2\eta q(f_{x_0})$$

De plus, par équivalence des normes, il existe une constante $C>0$ telle que $Cq(y)\leqslant\|y\|^2$ et donc, on choisit $\eta=\dfrac{C}{4}$, ainsi par le paragraphe précédent, il existe $\alpha>0$ tel que si

$$q\big(f_{x_0}(t)\big)\qquad\text{alors,}\qquad-\|f_{x_0}(t)\|^2+2b\big(f_{x_0}(t),\varepsilon(f_{x_0})(t)\big)\leqslant-\underbrace{(C-2\varepsilon)}_{:=\beta}q\big(f_{x_0}(t)\big)$$

19. On suppose que $q(x_0)<\alpha$. Supposons qu'on ait réussi à montrer que $\forall t\geqslant0,q\big(f_{x_0}(t)\big)\leqslant\alpha$, alors dans ce cas, en reprenant la notation de la question 17., on a

$$\forall t\geqslant0,\varphi'(t)\leqslant-\beta\varphi(t)$$

Et donc, $t\longmapsto e^{\beta t}\varphi(t)$ a une dérivée négative et docn, on a

$$\forall t\geqslant0,e^{\beta t}\varphi(t)\leqslant e^{\beta\times0}\varphi(0)=q(x_0)$$

et donc,

$$\forall t\geqslant0,\varphi(t)=q\big(f_{x_0}(t)\big)\leqslant e^{-\beta t}q(x_0)$$

On note $\mathcal{T}=\big\{T>0,\forall t\in[0,T],q\big(f_{x_0}(t)\big)\leqslant\alpha\big\}$.
$\mathcal{T}$ est non vide : en effet, comme $q(x_0)=q(f_{x_0}(0))<\alpha$ et donc par continuité, il existe $\varepsilon>0$ tel que si $t\leqslant\in[0,\varepsilon]$, $q(f_{x_0})(t)\leqslant\alpha$. On peut donc considérer $T^*=\sup\mathcal{T}\in[0,+\infty]$.

On suppose que $T^*<+\infty$. Alors, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe alors $T_0>T^*$ tel que $\forall t\in[T^*,T_0],q\big(f_{x_0}(t)\big)\leqslant\alpha$ et donc, on aurait $\forall[0,T_0],q\big(f_{x_0}(t)\big)\leqslant\alpha$, ce qui contredit la maximalité de T^*. Ainsi, on a $T^*=+\infty$ et donc :

$$\forall t\geqslant0,q\big(f_{x_0}(t)\big)\leqslant\alpha$$

20. Comme $\sqrt{q}$ est une norme, il existe $C_1,C_2>0$ tel que

$$\forall x\in\mathbb{R}^n,\sqrt{q(x)}\leqslant C_2\|x\|\qquad\text{et}\qquad\|x\|\leqslant C_1\sqrt{q(x)}$$

On prend $\widetilde{\alpha}=\dfrac{\sqrt{\alpha}}{C_2}$. Ainsi, si $x\in B(0,\widetilde{\alpha})$, alors $q(x)\leqslant C_2^2\widetilde{\alpha}^2=\alpha$. Alors, en réutilisant la question 19. :

$$\|f_{x_0}(t)\|\leqslant C_1\sqrt{q\big(f_{x_0}(t)\big)}\leqslant C_1\sqrt{q(x_0)}e^{-\frac{\beta}{2}t}\leqslant C_1C_2e^{-\frac{\beta}{2}t}\|x_0\|$$