OMAR SADIK

Exercice I

1°. Soit une application $f :]-1,1[\longrightarrow \mathbb{R}^2$ de classe $\mathscr{C}^1$.
Justifier que $f'(]-1;1[)$ est une partie connexe par arcs de $\mathbb{R}^2$.

2°. On considère l'application $f :]-1,1[\longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par :

$$f(t) = \begin{cases} (0,0) & \text{si} \quad t \in]-1,0] \\ \left(t^2 \sin\dfrac{1}{t}, t^2 \cos\dfrac{1}{t}\right) & \text{si} \quad t \in]0,1[\end{cases}$$

On note pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\|(x,y)\|_2 = \sqrt{x^2+y^2}$.

a/ Démontrer que f est dérivable en 0 puis sur l'intervalle $]-1,1[$.
Préciser le vecteur $f'(t)$ pour tout $t \in]-1,0]$ et pour tout $t \in]0,1[$.

b/ Démontrer que $\forall t \in]0,1[, \|f'(t)\|_2 \geqslant 1$ et en déduire que $f'(]-1,1[)$ n'est pas connexe par arcs de $\mathbb{R}^2$.
On pourra tracer la boule unité de $\mathbb{R}^2$ pour la norme $\|\|_2$ et on acceptera un dessin pertinent comme preuve.

Exercice II

On pose pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (2-x-y)^2 + (1-x)^2 + (1-2x-y)^2$.
On se propose de déterminer le réel $\min\limits_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y)$ par deux méthodes différentes.

3°. **Première méthode**
Déterminer le seul point critique de la fonction f sur $\mathbb{R}^2$. Démontrer à l'aide d'une matrice Hessienne que f admet en ce point un minimum local. En admettant que ce minimum est global, donner la valeur du $\min\limits_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y)$.

4°. **Deuxième méthode**
Sur l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^3$, on note le produit scalaire canonique par $\langle . \mid . \rangle$ et sa norme associée par $\|(x,y,z)\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.
On note $a = (2,1,1)$, $u = (1,1,2)$, $v = (1,0,1)$ et $F = \text{vect}\{u,v\}$.
On note $b \in F$ le projeté orthogonal du vecteur a sur le sous-espace vectoriel F.
Justifier que $\langle a-b \mid u\rangle = \langle a-b \mid v\rangle = 0$ et en déduire le vecteur b.
Déterminer la valeur de $\min\limits_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y)$.

PROBLÈME

Autour du théorème de comparaison avec une intégrale

Dans ce problème, on se propose de démontrer le théorème de comparaison avec une intégrale, puis de traiter des exemples et des applications. On terminera par deux contre-exemples.

Partie I - Théorème de comparaison avec une intégrale

Dans cette partie, f est une fonction continue, positive et décroissante sur $\mathbb{R}^+$. on pose, pour tout entier naturel $n, S_n = \sum_{k=0}^{n} f(k), J_n = \int_0^n f(t)dt$ et pour tout entier k non nul, $I_k = \int_{k-1}^{k} f(t)dt$.

5°. Préciser la monotonie des suites (S_n) et (J_n), puis démontrer que pour tout entier k non nul, $f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)\mathrm{d}t \leqslant f(k-1)$.

6°. Démontrer que pour tout entier n non nul, $S_n - f(0) \leqslant J_n \leqslant S_{n-1}$.

7°. Démontrer enfin les deux résultats :

1) f est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, si et seulement si, la série $\sum f(n)$ converge.
2) La série $\sum_{n\geqslant 1} \left[\int_{n-1}^{n} f(t)\mathrm{d}t - f(n)\right]$ converge.

8°. Un exemple.

On pose pour $\alpha > 0$ et $x \in [2, +\infty[, f(x) = \dfrac{1}{x(\ln x)^\alpha}$.

a/ Étudier la monotonie de la fonction f, calculer $\int_2^x f(t)$ dt et en déduire la nature de la série

$$\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$$

b/ Dans le cas où $\alpha = 2$, déterminer en fonction de $\ln 2$, un encadrement de $\sum_{n=2}^{+\infty} \dfrac{1}{n(\ln n)^2}$.

9°. Une application.

On pose pour n entier naturel non nul, $T_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} - \ln n$.

a/ En utilisant le résultat **(2)** de la question $Q7$, établir que la suite (T_n) converge. On notera γ sa limite (constante d'Euler).

b/ Justifier que, au voisinage de $+\infty$, $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$ et en déduire un équivalent au voisinage de $+\infty$ de $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$.

10°. Une application sur une série de fonctions.

On considère la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} g_n$ où pour tout $x \in]0, +\infty[, g_n(x) = \dfrac{x}{n^2 + x^2}$.

a/ Étudier la convergence normale de cette série de fonctions sur $]0, +\infty[$.

b/ On pose pour x fixé non nul, $f(t) = \dfrac{x}{t^2 + x^2}$.

Établir que, pour n entier non nul, $\int_1^{n+1} f(t)\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(k) \leqslant \int_0^n f(t)\mathrm{d}t$.

c/ En déduire que, pour tout x non nul, $\dfrac{\pi}{2} - \arctan\dfrac{1}{x} \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x) \leqslant \dfrac{\pi}{2}$.

d/ Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x)$.

La série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} g_n$ converge-t-elle uniformément sur $]0, +\infty[$?

Partie II - Contre-exemples

11°. On pose pour $x \in [1,+\infty[$, $f(x) = |\sin(2\pi x)|$.

a/ Calculer pour n entier naturel non nul, $\displaystyle\int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t$.

On pourra remarquer que $\displaystyle\int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_n^{n+\frac{1}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{n+\frac{1}{2}}^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t$.

On note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière du réel x.

b/ Établir que pour $x \in [1,+\infty[$, $\displaystyle\int_1^x |\sin(2\pi t)|\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{2}{\pi}(\lfloor x \rfloor - 1)$.

La fonction f est-elle intégrable sur $[1,+\infty[$? Que dire de la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f(n)$?

12°. On se propose de construire un contre-exemple d'une fonction f continue, positive et intégrable sur $[1,+\infty[$ telle que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f(n)$ diverge.

Pour tout entier n non nul, trouver un réel a_n de sorte que le triangle de base $[n-a_n, n+a_n]$ et de hauteur 1 ait une aire égale à $\dfrac{1}{n^2}$.

Dessiner l'allure d'une courbe de fonction f définie et continue sur $[1,+\infty[$ de la manière suivante : chaque entier naturel n non nul a pour image 1 et autour de chaque n (sur chaque intervalle $[n-a_n, n+a_n]$) tracer l'allure du triangle de base $[n-a_n, n+a_n]$ et de hauteur 1.

Enfin, la fonction est nulle en dehors de tous les intervalles $[n-a_n, n+a_n]$. Démontrer que cette fonction f fournit un contre-exemple.