

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE MP**MATHÉMATIQUES 2****Durée : 4 heures**

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, bleu clair ou turquoise, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
- Ne pas utiliser de correcteur.
- Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.

Les calculatrices sont interdites

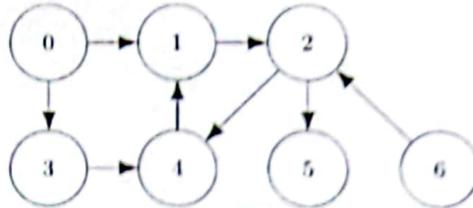
Le sujet est composé d'un exercice d'informatique du tronc commun, d'un exercice et d'un problème de mathématiques.

EXERCICE 1

Hormis Q3 et Q4, les questions de cet exercice sont indépendantes.

Dans cet exercice (informatique du tronc commun), les graphes ont leurs sommets numérotés à partir de 0 et ils sont orientés. On les représente par un dictionnaire d'adjacence.

Par exemple, le graphe :



est représenté par le dictionnaire :

$$d = \{ 0 : [1,3] , 1 : [2] , 2 : [4,5] , 3 : [4] , 4 : [1] , 5 : [], 6 : [2] \}$$

Q1. Écrire en langage Python une fonction `degreMax(d : dict) -> int` qui reçoit en entrée un dictionnaire d'adjacence représentant un graphe orienté et renvoie le degré sortant maximal parmi tous les degrés sortants des sommets du graphe.

Si G est un graphe orienté, on appelle graphe inverse de G le graphe possédant les mêmes sommets ainsi que les mêmes arêtes mais en sens inverse par rapport à celles de G .

Q2. Représenter le graphe inverse du graphe orienté donné en introduction. Écrire en langage Python une fonction `grapheInv(d : dict) -> dict` qui renvoie un dictionnaire d'adjacence du graphe inverse du graphe représenté par d .

On souhaite colorier notre graphe orienté. Les couleurs sont représentées par des entiers naturels. La coloration du graphe est modélisée par une liste L telle que $L[s]$ est égale à la couleur attribuée au sommet s .

Deux sommets du graphe reliés par une arête ne doivent pas être de la même couleur (coloration du graphe valide).

Q3. Écrire en langage Python une fonction `colorationValide(d : dict, L : list) -> bool` qui renvoie `True` si la coloration L du graphe représenté par d est valide et `False` dans le cas contraire.

Q4. Donner la complexité dans le pire des cas de la fonction précédente en fonction du nombre N de sommets et du nombre M d'arêtes. Justifier votre réponse.

On considère deux tables : **FILMS** et **LOCATIONS**. La première contient des informations sur des films et la seconde des informations sur des locations de films par les clients.

La table FILMS contient les attributs suivants :

- codefilm : code d'un film (entier), clé primaire ;
- nomfilm (chaîne de caractères).

La table LOCATIONS contient les attributs suivants :

- codecli : code du client (entier), clé primaire avec l'attribut codefilm ;
- codefilm : code du film (entier), clé primaire avec l'attribut codecli ;
- datedebut : date de début de la location (chaîne de caractères) ;
- duree : durée de la location (flottant).

- Q5. Écrire une requête SQL permettant de connaître la plus grande durée de location parmi tous les films.
- Q6. Écrire une requête SQL permettant d'extraire le code du film, le nom du film et la durée moyenne de location des films qui ont été en moyenne loués moins de 2 jours. Le résultat doit être classé dans l'ordre décroissant des durées moyennes de location.

EXERCICE 2

On définit une suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}[X]$ en posant $P_0 = 1$, $P_1 = X$ et pour tout entier naturel n :

$$P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n.$$

Dans les questions suivantes, n et k sont des entiers naturels.

- Q7. Donner le degré et le terme dominant de P_n en fonction de n .
- Q8. Justifier que pour tout réel θ :

$$P_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta).$$

Pour P et Q dans $\mathbb{R}[X]$, on pose :

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt.$$

- Q9. Justifier la convergence de cette intégrale.
- Q10. Démontrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_k[X]$ (ensemble des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ de degré inférieur ou égal à k).
- Q11. Calculer pour n et m entiers naturels, $\int_0^\pi \cos(n\theta) \cos(m\theta) d\theta$.
- Q12. Donner une base orthonormale de $\mathbb{R}_k[X]$ pour ce produit scalaire.

PROBLÈME - Matrices de rang 1

n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On note $M_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles d'ordre n , $M_{n,1}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices colonnes réelles d'ordre n et $M_{1,n}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices lignes réelles d'ordre n .

Partie I - Exemples

On suppose que X_1, X_2, \dots, X_n sont des variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé, indépendantes et toutes de loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. On définit les matrices aléatoires :

$$U = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \text{ et } M = U \times U^T = \begin{pmatrix} X_1^2 & X_1 X_2 & X_1 X_3 & \dots & \dots & X_1 X_n \\ X_2 X_1 & X_2^2 & X_2 X_3 & \dots & \dots & X_2 X_n \\ X_3 X_1 & X_3 X_2 & X_3^2 & \dots & \dots & X_3 X_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ X_n X_1 & X_n X_2 & X_n X_3 & \dots & \dots & X_n^2 \end{pmatrix}.$$

Q13. On pose $Y = \text{rg}(M)$.

Montrer que la variable aléatoire Y suit une loi de Bernoulli de paramètre $1 - (1-p)^n$.

Q14. Reconnaître la loi de la variable aléatoire $\text{Tr}(M)$.

Q15. Vérifier que $M^2 = \text{Tr}(M)M$ et en déduire la probabilité de l'événement « M est une matrice de projection ».

Q16. Dans cette question, on suppose que X_1, X_2, \dots, X_n sont des variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé, indépendantes et toutes de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On définit la matrice aléatoire M comme ci-dessus. Avec ces nouvelles hypothèses, calculer à nouveau la probabilité de l'événement « M est une matrice de projection ».

Q17. On note J la matrice de $M_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. Donner son rang et sa trace, puis la diagonaliser (on précisera une matrice de passage).

Q18. Donner (en le justifiant) une matrice d'ordre 3 de rang 1 non diagonalisable. Préciser sa trace.

Partie II - Résultats généraux

Dans cette partie, A désigne une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ de rang égal à 1.

Q19. On note $C \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ la première colonne non nulle de A . Démontrer qu'il existe une matrice ligne $L \in M_{1,n}(\mathbb{R})$ non nulle telle que $A = C \times L$.

Q20. Calculer le réel $L \times C$ et en déduire que $A^2 = \text{Tr}(A)A$.

Q21. Déterminer le polynôme caractéristique de A ainsi que son polynôme minimal.

Q22. Établir que :

$$A \text{ est diagonalisable } \Leftrightarrow \text{Tr}(A) \neq 0.$$

On note désormais u l'endomorphisme de \mathbb{R}^n canoniquement associé à A .

Q23. On suppose que $\text{Im}(u) \cap \text{Ker}(u) \neq \{0_{\mathbb{R}^n}\}$.

Justifier que $\text{Im}(u) \subseteq \text{Ker}(u)$, puis qu'il existe une base de \mathbb{R}^n dans laquelle u est représenté par la matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & & \\ 1 & 0 & 0 & & (0) \\ 0 & 0 & 0 & & \\ & (0) & & \ddots & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Q24. On suppose que $\text{Im}(u) \cap \text{Ker}(u) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$.

Démontrer qu'il existe une base de \mathbb{R}^n dans laquelle u est représenté par la matrice :

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & & (0) \\ 0 & 0 & 0 & & \\ & (0) & & \ddots & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

où a est un réel non nul.

Q25. Conclure que dans $M_n(\mathbb{R})$ deux matrices de rang 1 sont semblables si et seulement si elles ont la même trace.

FIN

5/5