OMAR SADIK

Exercice I

Exercice II

On définit une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}[X]$ en posant $P_0 = 1, P_1 = X$ et pour tout entier naturel n :

$$P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n$$

Dans les questions suivantes, n et k sont des entiers naturels.

1^o. Donner le degré et le terme dominant de P_n en fonction de n.

2^o. Justifier que pour tout réel θ :

$$P_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$$

Pour P et Q dans $\mathbb{R}[X]$, on pose :

$$\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$

3^o. Justifier la convergence de cette intégrale.

4^o. Démontrer que $\langle,\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_k[X]$ (ensemble des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ de degré inférieur ou égal à k).

5^o. Calculer pour n et m entiers naturels, $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(n\theta)\cos(m\theta)\,d\theta$.

6^o. Donner une base orthonormale de $\mathbb{R}_k[X]$ pour ce produit scalaire.

Problème - Matrices de rang 1

n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On note $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles d'ordre n, $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices colonnes réelles d'ordre n et $\mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices lignes réelles d'ordre n.

Partie I-Exemples

On suppose que $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé, indépendantes et toutes de loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. On définit les matrices aléatoires :

$$U = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \text{ et } M = U \times U^T = \begin{pmatrix} X_1^2 & X_1X_2 & X_1X_3 & \cdots & \cdots & X_1X_n \\ X_2X_1 & {X_2}^2 & X_2X_3 & \cdots & \cdots & X_2X_n \\ X_3X_1 & X_3X_2 & {X_3}^2 & \cdots & \cdots & X_3X_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ X_nX_1 & X_nX_2 & X_nX_3 & \cdots & \cdots & {X_n}^2 \end{pmatrix}.$$

1^o. On pose $Y = \mathrm{rg}(M)$. Montrer que la variable aléatoire Y suit une loi de Bernoulli de paramètre $1-(1-p)^n$.

2°. Reconnaître la loi de la variable aléatoire $\mathbf{Tr}(M)$.

3°. Vérifier que $M^2 = \mathbf{Tr}(M)M$ et en déduire la probabilité de l'événement « M est une matrice de projection ».

4°. Dans cette question, on suppose que $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé, indépendantes et toutes de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On définit la matrice aléatoire M comme ci-dessus. Avec ces nouvelles hypothèses, calculer à nouveau la probabilité de l'événement « M est une matrice de projection ».

5°. On note J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. Donner son rang et sa trace, puis la diagonaliser (on précisera une matrice de passage).

6°. Donner (en le justifiant) une matrice d'ordre 3 de rang 1 non diagonalisable. Préciser sa trace.

Partie II - Résultats généraux

Dans cette partie, A désigne une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang égal à 1.

7°. On note $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ la première colonne non nulle de A. Démontrer qu'il existe une matrice ligne $L \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ non nulle telle que $A = C \times L$.

8°. Calculer le réel $L \times C$ et en déduire que $A^2 = \mathbf{Tr}(A)A$.

9°. Déterminer le polynôme caractéristique de A ainsi que son polynôme minimal.

10°. Établir que :

$$A \text{ est diagonalisable} \iff \mathbf{Tr}(A) \neq 0.$$

On note désormais u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A.

11°. On suppose que $\mathbf{Im}(u) \cap \mathbf{Ker}(u) \neq \{0_{\mathbb{R}^n}\}$. Justifier que $\mathbf{Im}(u) \subseteq \mathbf{Ker}(u)$, puis qu'il existe une base de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle u est représenté par la matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & & & \\ 1 & 0 & 0 & & (0) & \\ 0 & 0 & 0 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & (0) & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

12°. On suppose que $\mathbf{Im}(u) \cap \mathbf{Ker}(u) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$. Démontrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle u est représenté par la matrice :

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & & (0) & \\ 0 & 0 & 0 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & (0) & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

où a est un réel non nul.

13°. Conclure que dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices de rang 1 sont semblables si et seulement si elles ont la même trace.