# Un corrigé CCP_ maths_1_ 2025

Omar SADIK :

## Ex 1

① $f$ est $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$, donc $f'$ est continue sur $]-1,1[$

$]-1,1[$ est un connexe par arcs de $\mathbb{R}$ et $f'(]-1,1[)$ est l'image directe d'un connexe par arcs par une application continue, donc c'est 1 connexe par arcs de $\mathbb{R}^2$.

② ⓐ Posons $f_1(t) = \begin{cases} 0 & t \in ]-1,0] \\ t^2 \sin\left(\frac{1}{t}\right) ; & t \in ]0,1[ \end{cases}$ on a $f = (f_1, f_2)$,

$$f_2(t) = \begin{cases} 0 & t \in ]-1,0] \\ t^2 \cos\left(\frac{1}{t}\right) ; & t \in ]0,1[ \end{cases}$$

$f$ est dérivable en 0 ssi $f_1$ et $f_2$ sont dérivable en 0,

si $t \in ]0,1[$ : $\dfrac{f_1(t) - f_1(0)}{t - 0} = t \sin\left(\frac{1}{t}\right) \xrightarrow[t \to 0]{} 0$ car $|t \sin(1/t)| \leq |t|$

si $t \in ]-1,0[$ : $\dfrac{f_1(t) - f_1(0)}{t - 0} = 0 \xrightarrow[t \to 0]{} 0$

Donc $f_1$ est dérivable en 0 et $f_1'(0) = 0$

De m̂ $f_2$ est dérivable en 0 et $f_2'(0) = 0$

$f_1$ et $f_2$ sont dérivable sur $]-1,0[$ et sur $]0,1[$ (th généraux)

donc $f$ est dérivable sur $]-1,1[$ et

$$f'(t) = \begin{cases} 0 & t \in ]-1,0] \\ \left(2t \sin(1/t) - \cos\left(\frac{1}{t}\right) ; 2t \cos(1/t) + \sin(1/t)\right) ; & t \in ]0,1[ \end{cases}$$

(b) $t \in ]0,1[$ $\quad \|f'(t)\|_2^2 = \left(2t\sin(1/t) - \cos(1/t)\right)^2 + \left(2t\cos(1/t) + \sin(1/t)\right)^2$

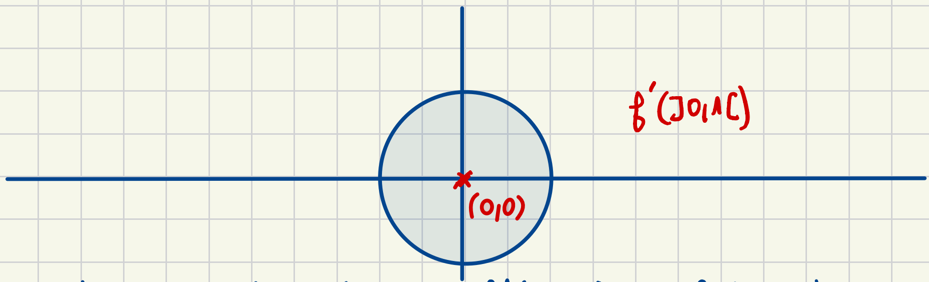
$$= 4t^2 + 1 \geqslant 1$$

Donc $\quad \boxed{\forall t \in ]0,1[ : \quad \|f'(t)\|_2 \geqslant 1}$

et on a: $\quad \forall t \in ]-1,0] : \quad \|f'(t)\|_2 = 0$

Donc $\quad f'(]-1,1[) = f'(]-1,0]) \cup f'(]0,1[)$

$$= \{(0,0)\} \cup f'(]0,1[).$$




Il apparait que $\{(0,0)\} \cup f'(]0,1[) = f'(]-1,1[)$ n'est pas connexe arcs de $\mathbb{R}^2$.

---

**Ex II**

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto (2-x-y)^2 + (1-x)^2 + (1-2x-y)^2$$

(3) $f$ est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ car polynomiale de deux variables.

$(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$

$(x,y)$ est un point critique de $f \iff \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$

$$\iff \begin{cases} -2(2-x-y) - 2(1-x) - 4(1-2x-y) = 0 \\ -2(2-x-y) - 2(1-2x-y) = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 3x + y = 2 & L_1 - L_2 \\ 3x + 2y = 3 & L_2 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = 1/3 \\ y = 1 \end{cases}$$

Donc $\left(\frac{1}{3},1\right)$ est le seul point critique de $f$ sur $\mathbb{R}^2$.

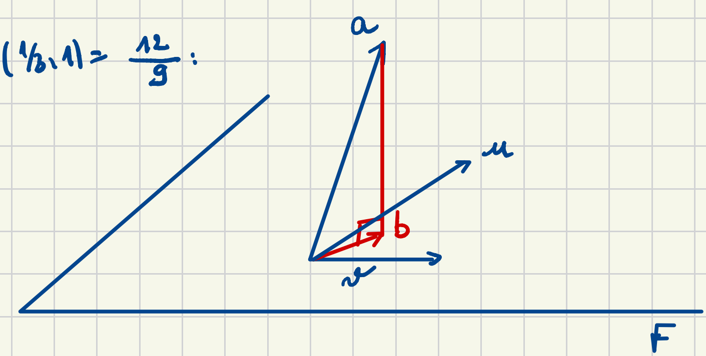
soit $H$ la hessienne de $f$ en $(1/3,1) = (a,b)$

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(a,b) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}.$$

$$\chi_H = X^2 - 16X + 12 = (x-8)^2 - 52$$
$$= \left(X - (8 + 2\sqrt{13})\right)\left(X - (8 - 2\sqrt{13})\right)$$

$Sp(H) \subset \mathbb{R}^{*+}$ et $\mathbb{R}^2$ est 1 ouvert, donc $f$ présente un minimum local en $(x_0,y_0)$ et ce minimum est global (Admis) donc égale à $f(1/3,1) = \frac{12}{9}$.

4




On note $b = p_F(a)$ : $p_F$ = La projection orthogonale sur $F$.

$\exists (y,z) \in F\times F^{\perp} /$ $\quad a = y + z$ et $y = p_F(a) = b$

donc $\quad a = b + z \iff z = a - b \in F^{\perp}$

et $\quad z \in F^{\perp} \iff \langle a-b \mid u\rangle = 0$ et $\langle a-b \mid v\rangle = 0$

Posons, $b(\alpha,\beta,\gamma)$ ses coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$

On a : $\quad a - b = (2-\alpha, 1-\beta, 1-\gamma)$ ;

$u = (1,1,2)$

$v = (1,0,1)$.

On a alors :

$$\begin{cases} (2-\alpha) + (1-\beta) + 2(1-\gamma) = 0 \\ (2-\alpha) + (1-\gamma) = 0 \\ (u, v, b) \text{ est liée car } b \in F \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \alpha+\beta+2\gamma = 5 \\ \alpha+\gamma = 3 \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 1 & 0 & \beta \\ 2 & 1 & \gamma \end{vmatrix} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha+\gamma = 3 \\ \alpha+\beta+2\gamma = 5 \\ \alpha+\beta-\gamma = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \alpha = 4/3 \\ \beta = 1/3 \\ \gamma = \frac{5}{3} \end{cases}$$

On a : $\quad d(a,F)^2 = \|a - p_F(a)\|_2^2 = \|a-b\|_2^2 = \left(2-\frac{4}{3}\right)^2 + \left(1-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(1-\frac{5}{3}\right)^2$

$$= \frac{4}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9} = \frac{4}{3}$$

D'autre part soit $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$(x,y,z) \longmapsto (x+y, x, 2x+y)$

$h$ est 1 application linéaire injective, alors $\dim \operatorname{Im} h = \dim \mathbb{R}^2 = 2$, de plus :

$\operatorname{Im} h = \operatorname{vect}(h(1,0) ; h(0,1)) = \operatorname{vect}((1,1,2) = u ; (1,0,1) = v) = F$

c.à.d : $\boxed{F = h(\mathbb{R}^2) = \{ (x+y, x, 2x+y) / (x,y) \in \mathbb{R}^2 \},}$

donc $d(a,F)^2 = \inf\limits_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} \| a - h(x,y)\|^2$

$$= \inf_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} \left( (2-x-y)^2 + (1-x)^2 + (1-2x-y)^2 \right)$$

$$= \inf_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y)$$

alors $\inf\limits_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y) = \dfrac{4}{3}.$

---

## Problème

$f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ ; $\mathcal{C}^0$

(5) : $n \in \mathbb{N}$ ; $S_{n+1} - S_n = f(n) \geq 0$ donc $(S_n)_n$ est croissante.

$$J_{n+1} - J_n = \int_0^{n+1} f(t)dt - \int_0^n f(t)dt = \int_n^{n+1} f(t)dt \geq 0$$

donc $(J_n)_{n\geq 0}$ est croissante :

$k \geq 1$, $0 \leq k-1 \leq t \leq k \Longrightarrow f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(t)dt \leq f(k-1)$ ($f$ est $\searrow$)

$$\boxed{\forall k \geq 1,\ f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(t)dt \leq f(k-1)}$$

(6) $k \geq 1 \Longrightarrow \sum\limits_{k=1}^{n} f(k) \leq \sum\limits_{k=1}^{n} \int_{k-1}^{k} f(t)dt \leq \sum\limits_{k=1}^{n} f(k-1)$

$\Longrightarrow S_n - f(0) \leq \int_0^n f(t)dt \leq S_{n-1}$ $(k-1 = l)$

(7) (1) Supp $f$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, alors : la suite $\left(\int_0^n f(t)dt\right)_{n\geq 0}$

est cv, et borné, donc la suite $(S_n)_{n\geq 0}$ est bornée.

Car $\quad 0 \leq S_n \leq f(0) + J_n : \quad \forall n \geq 0$

or $f \geq 0$ sur $\mathbb{R}^+$ donc la série $\sum_{n\geq 0} f(n)$ est à termes positifs et sa suite des sommes partielles est majorée, donc elle est cv.

• Si $\sum f(n)$ cv, alors $(S_n)_n$ est majorée, donc $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ cv car

$$\forall n \geq 1 : \quad \int_0^n f(t)dt \leq S_{n-1}.$$

② de la question ⑤ : $\forall n \geq 1, \quad 0 \leq \int_{n-1}^{n} f(t)dt - f(n) \leq f(n-1) - f(n)$

or $\sum_{n\geq 1} \left( f(n-1) - f(n) \right)$ est cv car télescopique et $(f(n))_{n\geq 0}$ cv

⑧ $f : [2,+\infty[ \longrightarrow \mathbb{R} \quad ; \quad \alpha > 0 ;$

$$x \longmapsto \frac{1}{x(\ln x)^\alpha}$$

ⓐ $x \longmapsto x(\ln x)^\alpha$ est croissante sur $[2,+\infty[$ :

En effet : $\quad 2 \leq x \leq y \Longrightarrow 0 < \ln x \leq \ln y$

$$\Longrightarrow (\ln x)^\alpha \leq (\ln y)^\alpha \qquad (\alpha > 0)$$

$$\Longrightarrow 0 < x(\ln x)^\alpha \leq y(\ln y)^\alpha$$

$$\Longrightarrow f(y) \leq f(x)$$

$$\int_2^x f(t)dt = \int_2^x (\ln t)'(\ln t)^{-\alpha} dt = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} \left[(\ln t)^{-\alpha+1}\right]_2^x & (\alpha \neq 1) \\ \left[\ln|\ln t|\right]_2^x & \alpha = 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}\left[(\ln 2)^{1-\alpha} - (\ln x)^{1-\alpha}\right] & \alpha \neq 1 \\ \ln|\ln x| - \ln(\ln 2) & \alpha = 1 \end{cases}$$

donc $\int_2^{+\infty} f(t)dt$ cv $\Longleftrightarrow \alpha > 1$

d'après Q7 : ① $f$ intégrable sur $[2,+\infty[$ $\iff \sum\limits_{n\geq 2} f(n)$ cv

càd $\int_2^{+\infty} |f(t)|\,dt$ cv $\iff \sum\limits_{n\geq 2} f(n)$ cv ;

or $f\geq 0$

Dc $\sum \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ cv $\iff \alpha > 1$ ;

ⓑ $\alpha = 2 > 1$, donc $\sum\limits_{n\geq 2} \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ cv ; , soit $S = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$ ;

et Q5 $\Longrightarrow$ $S - f(2) \leq \int_2^{+\infty} f(t)\,dt \leq S$

$\Longrightarrow \int_2^{+\infty} f(t)\,dt \leq S \leq f(2) + \int_2^{+\infty} f(t)\,dt$

or $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t(\ln t)^2}\,dt = \left[\frac{-1}{\ln t}\right]_2^{+\infty} = \frac{1}{\ln 2}$ ;

Dc
$$\frac{1}{\ln 2} \leq \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2} \leq \frac{1}{2(\ln 2)^2} + \frac{1}{\ln 2}$$

⑨ $n \geq 1$, $T_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$,

ⓐ Ici $f(t) = \frac{1}{t}$ ; $f\geq 0$ et $\searrow$ et $\mathcal{C}^0$ sur $[1,+\infty[$,

donc $\sum\limits_{n\geq 2} \left[\int_{n-1}^{n} f(t)\,dt - f(n)\right]$ cv

Car $\sum\limits_{n\geq 2} \left[\ln n - \ln(n-1) - \frac{1}{n}\right]$ cv ;

donc sa suite des sommes partielles est cv

$n\geq 2$, $\sum\limits_{k=2}^{n} \left(\ln k - \ln(k-1) - \frac{1}{k}\right) = \ln n - \sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{k} = -T_n + 1$ ;

Donc $(T_n)_{n\geq 1}$ est cv : $\gamma = \lim\limits_{n\to+\infty} T_n$ :

ⓑ $T_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \gamma$ ; donc $T_n - \gamma = o(1)$

Càd $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{+\infty}{=} \ln n + \gamma + o(1) :$$

or $\gamma \underset{+\infty}{=} o(\ln n)$

Donc $$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n}$$

⑩ a) $\sum\limits_{n\geq 1} g_n$ cvn sur $]0,+\infty[$ $\iff$ $\sum\limits_{n\geq 0} \|g_n\|_\infty$ cv

$x \geq 0$ ; $$g_n'(x) = \frac{n^2+x^2-2x^2}{(n^2+x^2)^2} = \frac{n^2-x^2}{(n^2+x^2)^2} ;$$

| $x$ | $0$ | $n$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g_n(x)$ | $0$ ↗ | $g_n(n)$ | ↘ $0$ |

; alors $\|g_n\|_\infty = g_n(n) = \frac{1}{2n}$

or $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ cv : donc $\sum\limits_{n\geq 1} g_n$ ne cvn sur $]0,+\infty[$.

ⓑ $f(t) = \dfrac{x}{t^2+x^2}$ : $x > 0$.

On a : $f$ est $\geq 0$ ↘ et $\mathcal{C}^0$ sur $[0,+\infty[$ ;

d'après Q5 : $\forall k \geq 1$ : $$f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(t)\,dt \leq f(k-1)$$

alors $$\sum_{k=1}^{n} f(k) \leq \int_0^n f(t)\,dt \quad \text{et} \quad \int_1^{n+1} f(t)\,dt \leq \sum_{k=2}^{n+1} f(k-1) = \sum_{k=1}^{n} f(k)$$

Donc $$\int_1^{n+1} f(t)\,dt \leq \sum_{k=1}^{n} f(k) \leq \int_0^n f(t)\,dt$$

ⓒ $x > 0$ : $$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x}{k^2+x^2} = \sum_{k=1}^{n} g_k(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sum_{k=1}^{+\infty} g_k(x) ;$$

donc $$\int_1^{+\infty} f(t)\,dt \leq \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x) \leq \int_0^{+\infty} f(t)\,dt:$$

or $$\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{x}{t^2+x^2}\,dx = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+\left(\frac{t}{x}\right)^2}\,dt$$

$$= \Big[\arctan(t/x)\Big]_0^{+\infty}$$

alors $$\frac{\pi}{2} - \arctan(1/x) \leq \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x) \leq \frac{\pi}{2}; \qquad x>0:$$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan(1/x) = 0$ ; donc:

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x) = \frac{\pi}{2}}$$

On a: . $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ; $g_n$ est $\mathcal{C}^0$ sur $]0,+\infty[$

. $\forall n \geq 1$ : $\lim\limits_{x\to+\infty} g_n(x) = 0$

. Supp $\sum g_n$ cvu sur $]0,+\infty[$ ; le th de la double s'applique et $\lim\limits_{x\to+\infty} \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim\limits_{x\to+\infty} g_n(x) = 0$

absurde, donc $\sum g_n$ ne cvu sur $]0,+\infty[$

11) $x \in [1,+\infty[$ , $f(x) = |\sin(2\pi x)|$.

a) $f$ est 1 périodique ; donc pour $n \geq 1$ : $\int_n^{n+1} f(t)\,dt = \int_0^1 f(t)\,dt$

or $$\int_0^1 f(t)\,dt = \int_0^{1/2} \sin(2\pi x)\,dx - \int_{1/2}^1 \sin(2\pi x)\,dx$$

$$= \frac{-1}{2\pi}\Big[\cos(2\pi x)\Big]_0^{1/2} + \frac{1}{2\pi}\Big[\cos(2\pi x)\Big]_{1/2}^1$$

$$= \frac{-1}{2\pi}(-1-1) + \frac{1}{2\pi}(1+1)$$

$$= \frac{2}{\pi}$$

$$\boxed{\forall n \geq 1, \quad \int_n^{n+1} f(t)\,dt = \frac{2}{\pi}}$$

(b) Soit $x \geq 1$ :

<u>1er Cas</u> : Supp : $1 \leq x < 2$ ; alors $[x] = 1$

et $\displaystyle\int_1^x |\sin(2\pi x)|\,dx \geq 0 = \frac{2}{\pi}\left([x]-1\right).$

<u>2ème Cas</u> : Supp : $2 < x$, alors

$$\int_1^x |\sin(2\pi x)|\,dx = \sum_{n=2}^{[x]} \int_{n-1}^{n} |\sin(2\pi x)|\,dx + \int_{[x]}^{x} |\sin(2\pi x)|\,dx$$

$$= \sum_{n=2}^{[x]} \frac{2}{\pi} + \int_0^{x-[x]} |\sin(2\pi x)|\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left([x]-1\right) + \int_0^{x-[x]} |\sin(2\pi x)|\,dx$$

$$\geq \frac{2}{\pi}\left([x]-1\right) + 0$$

D'où le résultat : $f$ est $\geq 0$ et $\mathcal{C}^0$ sur $[0,+\infty[$

Donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,dt \geq \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\pi}\left([x]-1\right) = +\infty$ car

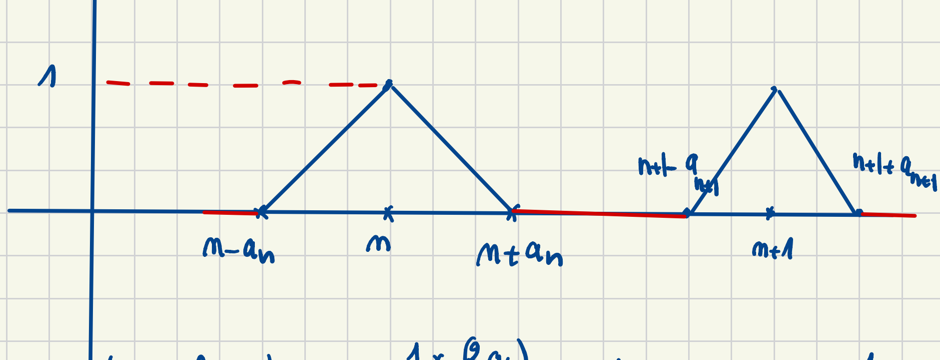
$[x] \leq x < x+1$ et $[x] \underset{+\infty}{\sim} x$ :

Donc $f$ est non intégrable sur $[1,+\infty[$ :

Mais $\forall n \in \mathbb{N}^*$ : $f(n) = |\sin(2\pi n)| = 0$ ( $\sin$ est $2\pi$ périodique).

Donc $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f(n)$ cv de somme nulle.

(12)




l'aire de ce triangle est $\Delta_n = \dfrac{1 \times (2a_n)}{2} = \dfrac{1}{n^2} \iff a_n = \dfrac{1}{n^2}$

alors $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$ : donc cette fonction positive est intégrable sur $[1,+\infty[$

Mais $f(n) = 1$ pour tout $n \geqslant 1$, donc $\sum f(n)$ Diverge grossièrement.

Pour vos remarques sadikoulmeki@yahoo.fR