CENTRALE PSI 2025 - Maths 2

Rothlingshofer Yanic

Contact : Pour toute remarque, suggestion ou signalement d'erreur : yrothlin-24@telecom-paris.fr.
Remarque : Ce document peut contenir des coquilles ou des inexactitudes (fautes de signes, inattentions, etc.). Merci de ne pas tout prendre au pied de la lettre et de me faire part de vos retours (il a été rédigé juste après l'épreuve donc dans la précipitation). Ce document sert principalement à fournir des pistes qu'à prétendre fournir une correction exacte (même si j'essaie d'être le plus rigoureux possible).

Partie A. Deux approches pour une valeur de $1 + 2 + 3 + \cdots$

I. Première approche

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx}$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ est la somme d'une série géométrique de raison e^{-x}, convergente si, et seulement si, $|e^{-x}| < 1$ ce qui équivaut à $x > 0$ d'où $D_f = \mathbb{R}_+^*$. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = \frac{1}{1 - e^{-x}}$$

2. On pose $f_n : x \mapsto e^{-nx}$ qui est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ avec $f_n' : \mapsto ne^{-nx}$.

- On a $\sum f_n$ qui CS sur $\mathbb{R}_+^*$ (question 1).
- Sur $[a, b] \subset \mathbb{R}_+^*$, on a :
$$\|f_n'\|_\infty = ne^{-an} \underset{n\to+\infty}{=} o(1/n^2)$$
par croissance comparée. Ainsi d'après les théorèmes de comparaison, on en déduit que $\sum f_n'$ CN donc CU sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$.

Finalement d'après le théorème de dérivation pour les séries de fonction f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} ne^{-nx} = \frac{e^{-x}}{(1 - e^{-x})^2}$$

3. On utilise le DL en 0 de $x \mapsto e^{-x}$ à l'ordre 2 (ça devrait suffir) puis on trouve :

$$\frac{e^{-x}}{(1 - e^{-x})^2} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{12} + o(1)$$

4. On a d'après la question précédente :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} ne^{-nx} - \frac{1}{x^2} \underset{x\to 0}{=} -\frac{1}{12} + o(1)$$

puis on en déduit la limite qui vaut $-1/12$ en 0^+.

II. Deuxième approche

Soit $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}_+)$ (support compact) tel que $\varphi(0) = 1$. Soit $K > 0$ tel que pour tout $t \geqslant K$, $\varphi(t) = 0$. On pose pour $t \geq 0$, $\psi(t) = t\varphi(t)$. On remarque que ψ et toutes ses dérivées sont à support sur $[0, K[$ ($\psi^{(n)}(K) = 0$ pour tout $n \geq 0$).

II.1. Une généralisation du théorème des sommes de Riemann pour les fonctions de classes $\mathscr{C}^1$.

Soit $f \in \mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$ et $x \in> 0$.

5. On a :

$$a \leq a+nx \leq b \quad \iff \quad 0 \leq n \leq \frac{b-a}{x}$$

donc $0 \leq n \leq \left\lfloor \frac{b-a}{x} \right\rfloor$ (on peut diviser par $x>0$).

6. Par définition de la partie entière, on a :

$$\left\lfloor \frac{L}{x} \right\rfloor \leq \frac{L}{x} < \left\lfloor \frac{L}{x} \right\rfloor + 1$$

puis en multipliant par $x>0$:

$$L < \left\lfloor \frac{L}{x} \right\rfloor x + x$$

d'où le résultat

7. Par la relation de Chasles, on a :

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\left\lfloor \frac{b-a}{x} \right\rfloor} \int_{a+(n-1)x}^{a+nx} f(t)\mathrm{d}t + \int_{a+\left\lfloor \frac{b-a}{x} \right\rfloor x}^{b} f(t)\mathrm{d}t$$

Or :

$$xf(a+nx) = \int_{a-(n-1)x}^{a-nx} f(a+nx)\mathrm{d}t$$

car $f(a+nx)$ est une constante par rapport à t et on intègre sur un segment de longueur x. Ainsi :

$$x\sum_{n=1}^{\left\lfloor \frac{b-a}{x} \right\rfloor x} f(a+nx) - \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\left\lfloor \frac{b-a}{x} \right\rfloor x} \int_{a-(n-1)x}^{a-nx} f((a+nx)-f(t))\mathrm{d}t - \int_{a+\left\lfloor \frac{b-a}{x} \right\rfloor x}^{b} f(t)\mathrm{d}t$$

8. Par inégalité triangulaire, on a :

$$\left| x\sum_{n=1}^{\left\lfloor \frac{b-a}{x} \right\rfloor x} f(a+nx) - \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \right| \leq \sum_{n=1}^{\left\lfloor \frac{b-a}{x} \right\rfloor x} \int_{a-(n-1)x}^{a-nx} |f(a+nx)-f(t)|\mathrm{d}t + \int_{a+\left\lfloor \frac{b-a}{x} \right\rfloor x}^{b} |f(t)|\mathrm{d}t$$

Tout d'abord, f est continue sur le segment $\left[a+\left\lfloor \frac{b-a}{x} \right\rfloor x,\ b\right]$ donc majorée par une constante $M_0>0$. Puis le deuxième termes du second membre peut être majoré tel que :

$$\int_{a+\left\lfloor \frac{b-a}{x} \right\rfloor x}^{b} |f(t)|\mathrm{d}t \leq M_0 \left| (b-a) - \left\lfloor \frac{b-a}{x} \right\rfloor x \right| \leq M_0 x$$

d'après la question précédente avec $L = b-a$.

Puis f est $\mathscr{C}^1$ sur tout les $I_n = [a-(n-1)x, a-nx]$ donc pour tout $t \in I_n$, d'après l'IAF il existe $c_n \in]t, nx[$ tel que :

$$|f(a-nx) - f(t)| \leqslant |f'(c_n)||a-nx-t| = |f'(c_n)|x$$

car $-t \leqslant -(a-(n-1)x)$. Or f' est continue sur $[a,b]$ donc on peut poser $M = \sup\limits_{[a,b]} |f'|$. Ainsi on obtient :

$$|f(a-nx) - f(t)| \leq Mx$$

qui ne dépend pas de t. Finalement :

$$\sum_{n=1}^{\left\lfloor \frac{b-a}{x} \right\rfloor x} \int_{a-(n-1)x}^{a-nx} |f(a+nx)-f(t)|\mathrm{d}t \leqslant M \left\lfloor \frac{b-a}{x} \right\rfloor x^3 \leq M(b-a)x^2$$

d'où :

$$0 \leq \left| x\sum_{n=1}^{\left\lfloor \frac{b-a}{x} \right\rfloor x} f(a+nx) - \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \right| \leq M(b-a)x^2 + M_0 x$$

On obtient le résultat par encadrement des limites lorsque $x \to 0$.

II.2. Un développement asymptotique lorsque $x \to 0$ de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n\varphi(nx)$

Soit $x > 0$.
On pose, pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $l \in \mathbb{N}$,

$$R_{k,l}(x) = \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor} \int_{(n-1)x}^{nx} \left(\int_{nx}^{t} \frac{(t-s)^k}{k!} \psi^{(k+1)}(s)\, ds \right) dt.$$

On admet la formule de Taylor avec reste intégral : pour toute fonction f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I, pour tout $a \in I$, pour tout $b \in I$,

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt.$$

9. Je ne sais pas si il faut justifier ou pas (la primitive par le théorème fondamental) mais :

$$\int_0^K \psi(t)' \mathrm{d}t = \psi(K) - \psi(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad \int_0^K \psi''(t)\mathrm{d}t = \psi'(K) - \psi'(0) = -1$$

car $\psi'(K) = 0$ (or du support de ψ') et $\psi'(0) = \varphi(0) + 0\varphi'(0) = 1$.

10. D'après Q8 (avec $a = 0$ et $b = K > 0$) avec ψ qui est $\mathcal{C}^1$ sur $[0, K]$:

$$x \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor} \psi(nx) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} \int_0^K \psi(t)\mathrm{d}t$$

De même avec ψ' qui est $\mathcal{C}^1$ sur $[0, K]$:

$$x \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor} \psi'(nx) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} \int_0^K \psi'(t)\mathrm{d}t = 0$$

et avec ψ'' qui est $\mathcal{C}^1$ sur $[0, K]$:

$$x \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor} \psi''(nx) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} \int_0^K \psi''(t)\mathrm{d}t = -1$$

11. Il suffit d'appliquer la formule de Taylor avec reste intégrale entre $b = t$ et $a = K$ à $\psi^{(l)}$ (pour $l \in \mathbb{N}$) qui est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$ et ne pas oublier que les $\psi^{(l+p)}(K) = 0$ en remplaçant n par $k \in \mathbb{N}$.

12. On sait que les dérivées n^{ieme} de ψ sont continues $\mathbb{R}_+$. En particulier, pour $t \geqslant 0$, pour tout $(k, l) \in \mathbb{N}^2$, on a $|\psi^{(l+k+1)}| \leq M$ sur le segment $[K, t]$ puis d'après la question précédente, on obtient la majoration suivante en appliquant l'inégalité triangulaire à l'intégrale :

$$|\psi^{(l)}(t)| \leqslant M \frac{|K-t|^{k+1}}{k!}$$

ceci étant vrai pour tout t, on obtient :

$$\left| \int_{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor x}^{K} \psi^{(l)}(t)\mathrm{d}t \right| \leqslant M \frac{\left| K - \left\lfloor \frac{K}{x} \right\rfloor x \right|^{k+1}}{(k+1)!} \underset{Q6}{\leqslant} \frac{Mx^{k+1}}{(k+1)!}$$

par croissance de l'application $x \mapsto x^{k+1}$ sur $\mathbb{R}_+$. Finalement :

$$\left| \frac{1}{x^k} \int_{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor x}^{K} \psi^{(l)}(t)\mathrm{d}t \right| \leqslant M \frac{x}{(k+1)!} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$$

ceci étant vrai pour tout $(k, l) \in \mathbb{N}^2$. **Remarque :** Je n'ai pas justifié les majorations dans les intégrales avec les valeurs absolues parce que ce n'est pas très intéressant, pas compliqué et assez chronophage en latex. Il faudrait le faire sur copie (ou au moins le mentionner).

13. Par inégalité triangulaire (comme $t \leqslant nx$) et car $\psi^{(l+k)}$ est bornée par une constante C sur le compact $[0, K]$:

$$|R_{k,l}(x)| \leqslant C \sum_{n=1}^{\left\lfloor \frac{K}{x} \right\rfloor} \int_{(n-1)x}^{nx} \int_{t}^{nx} \frac{|t-s|^k}{k!} \mathrm{d}s\mathrm{d}t$$

puis que $s \mapsto \frac{|t-s|^k}{k!}$ est positif, l'intégrale sur $[t, nx] \subset [(n-1)x, nx]$ est inférieure à celle sur $[(n-1)x, nx]$ puis :

$$R_{k,l}(x)| \leqslant \frac{C}{k!} \sum_{n=1}^{\left\lfloor \frac{K}{x} \right\rfloor} \int_{(n-1)x}^{nx} \int_{(n-1)x}^{nx} |t-s|^k \mathrm{d}s\mathrm{d}t$$

or pour $(t, s) \in [(n-1)x, nx] \times [(n-1)x, nx]$, on a $|t-s| \leqslant x$ puis par croissance de $y \mapsto y^k$ sur $\mathbb{R}_+$, $|t-s|^k \leqslant x^k$. Or les intégrales sont sur des segments de largeur x et on obtient la majoration :

$$|R_{k,l}(x)| \leqslant \frac{C}{k!} \sum_{n=1}^{\left\lfloor \frac{K}{x} \right\rfloor} x^{k+2} \leqslant \frac{C}{k!} x^{k+2} \left\lfloor \frac{K}{x} \right\rfloor \leqslant \frac{CK}{k!} x^{k+1}$$

puis :

$$0 \leqslant \left| \frac{R_{k,l}(x)}{x^k} \right| \leqslant \frac{CK}{k!} x \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$$

d'où le résultat (ceci étant vrai pour tout $(k, l) \in \mathbb{N}^2$).

14. D'après la formule de Taylor, on a entre $b = t$ et $a = nx$:

$$\psi^{(l)}(t) = \psi^{(l)}(nx) + \sum_{k=1}^{p} \frac{(t-nx)^k}{k!} \psi^{(l+k)}(nx) + \int_{nx}^{t} \frac{(t-s)^p}{p!} \psi^{(p+l+1)}(s) \mathrm{d}s$$

d'où (le résultat est évident à partir d'ici mais bon) :

$$\sum_{n=1}^{\left\lfloor \frac{K}{x} \right\rfloor} \int_{(n-1)x}^{nx} (\psi^{(l)}(t) - \psi^{(l)}(nx)) \mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\left\lfloor \frac{K}{x} \right\rfloor} \int_{(n-1)x}^{nx} \sum_{k=1}^{p} \frac{(t-nx)^k}{k!} \psi^{(l+k)}(nx) + \underbrace{\sum_{n=1}^{\left\lfloor \frac{K}{x} \right\rfloor} \int_{(n-1)x}^{nx} \int_{nx}^{t} \frac{(t-s)^p}{p!} \psi^{(p+l+1)}(s) \mathrm{d}s}_{R_{p,l+1}(x)}$$

puis on sort la somme sur k dans le premier terme et on obtient le résultat.

15. Pour $l = 0$ et $p = 2$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\left\lfloor \frac{K}{x} \right\rfloor} \int_{(n-1)x}^{nx} (\psi(t) - \psi(nx)) \mathrm{d}t &= \sum_{n=1}^{\left\lfloor \frac{K}{x} \right\rfloor} \int_{(n-1)x}^{nx} (t-nx)\psi'(nx) \mathrm{d}t + \sum_{n=1}^{\left\lfloor \frac{K}{x} \right\rfloor} \int_{(n-1)x}^{nx} \frac{(t-nx)^2}{2} \psi''(nx) \mathrm{d}t + R_{2,1}(x) \\
&= \sum_{n=1}^{\left\lfloor \frac{K}{x} \right\rfloor} \psi'(nx) \underbrace{\left(\int_{(n-1)x}^{nx} (t-nx) \mathrm{d}t \right)}_{= -\frac{x^2}{2}} + \sum_{n=1}^{\left\lfloor \frac{K}{x} \right\rfloor} \psi''(nx) \underbrace{\left(\int_{(n-1)x}^{nx} \frac{(t-nx)^2}{2} \mathrm{d}t \right)}_{= \frac{x^3}{6}} + R_{2,1}(x)
\end{aligned}$$

d'où l'on sort le résultat en divisant par $x^2 > 0$.

16. On a :

$$\begin{aligned}
x \sum_{n=1}^{\left\lfloor \frac{K}{x} \right\rfloor} \psi'(nx) &= \sum_{n=1}^{\left\lfloor \frac{K}{x} \right\rfloor} \int_{(n-1)x}^{nx} \psi'(nx) + (\psi'(t) - \psi'(t)) \mathrm{d}t \\
&= \sum_{n=1}^{\left\lfloor \frac{K}{x} \right\rfloor} \int_{(n-1)x}^{nx} \psi'(nx) - \psi'(t) \mathrm{d}t + \int_{0}^{\left\lfloor \frac{K}{x} \right\rfloor} \psi'(t) \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Or d'après Q9 :

$$\int_0^K \psi'(t) \mathrm{d}t = \int_0^{\left\lfloor \frac{K}{x} \right\rfloor} \psi'(t) + \int_{\left\lfloor \frac{K}{x} \right\rfloor}^{K} \psi'(t) \mathrm{d}t = 0$$

d'où le résultat.

17. Remarquons que :

$$\sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor} \int_{(n-1)x}^{nx} \psi'(nx) - \psi'(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor} \int_{(n-1)x}^{nx} (-1) \int_{nx}^{t} \psi''(t)\mathrm{d}t$$

or en faisant une IPP avec $u' = 1$ et $v = \psi''$, on obtient :

$$\begin{aligned}\int_{nx}^{t} \psi''(s)\mathrm{d}s &= t\psi''(t) - nx\psi''(nx) - \int_{nx}^{t} s\psi'''(s)\mathrm{d}s \\ &= t\psi''(t) - nx\psi''(nx) + \int_{nx}^{t} (t-s)\psi'''(s)\mathrm{d}s - t\int_{nx}^{t} \psi'''(s)\mathrm{d}s \\ &= (t-nx)\psi''(nx) + \int_{nx}^{t} (t-s)\psi'''(s)\mathrm{d}s\end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor} \int_{(n-1)x}^{nx} \psi'(nx) - \psi'(t)\mathrm{d}t &= -\sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor} \int_{(n-1)x}^{nx} \psi''(nx) \underbrace{\int_{(n-1)x}^{nx} (t-nx)\mathrm{d}t}_{=\frac{-x^2}{2}} + \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor} \int_{(n-1)x}^{nx} \int_{nx}^{t} (t-s)\psi'''(s)\mathrm{d}s \\ &= \frac{x^2}{2} \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor} \psi''(nx) - R_{1,2}(x)\end{aligned}$$

on obtient le résultat en injectant cette expression dans le résultat de la question 16 et en divisant par $x > 0$.

18. En injectant le résultat de la question 17 dans l'expression de la question 15, on obtient :

$$\frac{1}{x^2} \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor} \int_{(n-1)x}^{nx} (\psi(t) - \psi(nx))\mathrm{d}t = \underbrace{\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{4}\right) x \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor} \psi''(nx)}_{(1)} + \underbrace{\frac{R_{1,2}(x)}{2x} + \frac{1}{2x} \int_{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor}^{K} \psi'(t)\mathrm{d}t + \frac{R_{2,1}(x)}{x^2}}_{(2)}$$

D'après Q12 et Q13, on a $(2) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$. De plus d'après Q10, on a :

$$(1) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{4}\right)(-1) = \frac{1}{12}$$

d'où :

$$\frac{1}{x^2} \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor} \int_{(n-1)x}^{nx} (\psi(t) - \psi(nx))\mathrm{d}t \underset{x \to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{12}$$

19. On part du membre de droite (moins élégant mais plus directe) :

$$\frac{1}{x^2}\left(\int_{0}^{K} \psi(t)\mathrm{d}t - \int_{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor x}^{K} \psi(t)\mathrm{d}t\right) = \frac{1}{x^2} \int_{0}^{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor x} \psi(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{x^2} \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor} \int_{(n-1)x}^{nx} \psi(t)\mathrm{d}t$$

d'où :

$$\begin{aligned}&\frac{1}{x^2}\int_{0}^{K} \psi(t)\mathrm{d}t - \frac{1}{x^2} \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor} \int_{(n-1)x}^{nx} (\psi(t) - \psi(nx))\mathrm{d}t - \frac{1}{x^2}\int_{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor x}^{K} \psi(t)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{x^2} \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor} \int_{(n-1)x}^{nx} \psi(t)\mathrm{d}t - \frac{1}{x^2} \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor} \int_{(n-1)x}^{nx} \psi(t)\mathrm{d}t + \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor} \psi(nx) \\ &= \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor} n\varphi(nx)\end{aligned}$$

car $\psi(nx) = nx\varphi(nx)$.

20. D'après Q12 avec $k = 2$ et $l = 0$, on a :

$$\frac{1}{x^2}\int_{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor x} \psi(t)\mathrm{d}t \underset{x\to 0}{=} o(1) \qquad (\text{car} \longrightarrow 0)$$

Or Q18 :

$$\frac{1}{x^2}\sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor}\int_{(n-1)x}^{nx} (\psi(t)-\psi(nx))\mathrm{d}t \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{12}+o(1)$$

donc avec $A = \int_0^K \psi(t)\mathrm{d}t \in \mathbb{R}$ (car intégrale finie), on a :

$$\sum_{n=1}^{\lfloor \frac{K}{x} \rfloor x} n\varphi(nx) \underset{x\to 0}{=} \frac{A}{x^2} - \frac{1}{12} + o(1)$$

Partie assez facile, pas trop de justification à fournir il faut juste bien poser les calculs.

Partie B. Les sommes infinies au sens de Ramanujan

Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+)$.

I. La formule d'Euler-Maclaurin

On considère la famille de polynômes $(B_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de sorte que

$$B_0 = 1, \quad \forall p \in \mathbb{N}^*,\ B_p' = p\,B_{p-1} \quad \text{et} \quad \int_0^1 B_p(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

On admet dans cette partie l'existence et l'unicité des polynômes B_p. On pose pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$b_p = B_p(0)$$

et $\widetilde{B}_p$ la fonction 1-périodique de sorte que $\widetilde{B}_p$ soit égale à B_p sur $[0, 1[$. Autrement dit, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\widetilde{B}_p(x) \;=\; B_p\big(x - \lfloor x \rfloor\big).$$

On pose, pour tout $p \in \mathbb{N}$ et pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$r_{p,a} \;=\; \int_1^a \frac{\widetilde{B}_p(t)}{p!}\, f^{(p)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

21. On a :

$$B_1'(x) = 1 \times B_0(x) = 1 \qquad \Longrightarrow B_1(x) = x + C$$

or $\displaystyle\int_0^1 B_1 = 0$ d'où $C = -\frac{1}{2}$ puis :

$$B_1(X) = X - \frac{1}{2}$$

De même, on trouve :

$$B_2(X) = X^2 - \frac{1}{2}X - \frac{1}{12}$$

22. Récurrence (calculer la dérivée de $H(X) = (-1)^{p+1}B_{p+1}(1-X)$ et $\int_0^1 H$).

23. On a pour $p \geqslant 2$:

$$B_p(1) - B_p(0) = \int_0^1 B_p'(t)\mathrm{d}t = p\int_0^1 B_{p-1}(t)\mathrm{d}t = 0$$

d'où $b_p = B_p(0) = B_p(1)$. De plus, d'après la question précédente, on a $B_p(1) = (-1)^p B_p(0) = (-1)^p b_p$. Ainsi si $p \geqslant 3$ est impair, on a $b_p = -b_p$ donc $b_p = 0$.

24. Soit $p \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$\forall t \in [k, k+1], \qquad \frac{f^{(p)}(t)}{p!}\widetilde{B}_p(t) = \frac{f^{(p)}(t)}{p!}B_p(t-k) = \frac{f^{(p)}(t)}{p!}\frac{B'_{p+1}(t-k)}{p+1}$$

d'où en intégrant par partie sur $[k, k+1]$ avec $u = f^{(p)}$ et $v' = B'_{p+1}$:

$$\begin{aligned}\int_k^{k+1} \frac{f^{(p)}(t)}{p!}\widetilde{B}_p(t)\mathrm{d}t &= \frac{1}{(p+1)!}\int_k^{k+1} f^{(p)}(t)B'_{p+1}(t-k)\mathrm{d}t \\ &= \frac{B_{p+1}(1)f^{(p)}(k+1) - B_{p+1}(0)f^{(p)}(k)}{(p+1)!} - \frac{1}{(p+1)!}\int_k^{k+1} f^{(p+1)}(t)B_{p+1}(t-k)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

25. En prenant l'expression précédente pour $p = 0$ avec $B_1(1) = \frac{1}{2} = -B_1(0)$, on a en sommant de $k = 1$ à $n - 1 \geqslant 0$:

$$\int_1^n f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}(f(k+1) + f(k)) - \int_1^n \widetilde{B}_1(t)f'(t)\mathrm{d}t$$

or :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1} f(k+1) + f(k) = \sum_{k=1}^{n} f(k) + \sum_{k=1}^{n-2} f(k+1) &= \sum_{k=1}^{n} f(k) + \sum_{k=2}^{n-1} f(k) \\ &= 2\sum_{k=1}^{n} f(k) - (f(n) + f(1))\end{aligned}$$

d'où :

$$\int_1^n f(t)\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} f(k) - \frac{f(n) + f(1)}{2} - r_{1,n}$$

d'où le résultat en basculant les termes de l'autre coté.

26. On prend l'expression précédente et on montre par récurrence que :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \qquad r_{1,n} = \sum_{l=1}^{p} \frac{b_{2l}}{(2l)!}(f^{(2l-1)}(n) - f^{(2l-1)}(1)) + r_{2p+1,n}$$

Supposons que ce soit vrai au rang $p \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned}r_{2p+1,n} = \int_1^n \frac{\widetilde{B}_{2p+1}(t)}{(2p+1)!}f^{(2p+1)}(t)\mathrm{d}t &= \int_1^n \frac{\widetilde{B}'_{2p+2}(t)}{(2p+2)!}f^{(2p+1)}(t)\mathrm{d}t \\ &= \frac{B_{2p+2}(0)f^{(2p+1)}(n) - B_{2p+2}(0)f^{(2p+1)}(1)}{(2p+2)!} - \int_1^n \frac{\widetilde{B}_{2p+2}(t)}{(2p+2)!}f^{(2p+1)}(t)\mathrm{d}t \\ &= \frac{b_{2(p+1)}}{(2(p+1))!}(f^{(2p+1)}(n) - f^{(2p+1)}(1)) - \int_1^n \frac{\widetilde{B}_{2p+2}(t)}{(2p+2)!}f^{(2p+1)}(t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

or en réintégrant par partie le deuxième terme, on obtient :

$$\int_1^n \frac{\widetilde{B}_{2p+2}(t)}{(2p+2)!}f^{(2p+1)}(t)\mathrm{d}t = \frac{b_{2p+3}}{(2p+3))!}(f^{(2p+3)}(n) - f^{(2p+3)}(1)) - \int_1^n \frac{\widetilde{B}_{2p+3}(t)}{(2p+3)!}f^{(2p+3)}(t)\mathrm{d}t$$

or $2p + 3 = 2(p+1) + 1$ impair donc $b_{2p+3} = 0$ d'après Q23 et donc :

$$r_{2p+1,n} = \frac{b_{2(p+1)}}{(2(p+1))!}(f^{(2p+1)}(n) - f^{(2p+1)}(1)) + r_{2(p+1)+1,n}$$

puis en réinjectant ce terme plus haut, le premier rentre dans la somme comme le $p + 1$ième terme et on a bien le $r_{2(p+1)+1,n}$ qui apparaît donc l'hérédité est vérifiée et donc le résultat est vrai par principe de récurrence. Finalement, en remplaçant l'expression de $r_{1,n}$ obtenue dans l'expression de la question précédente, on obtient le résultat.

II. La constante de Ramanujan

On suppose dans cette partie qu'il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p \geq q$:

$$f^{(2p+1)} \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}^+ \qquad \text{et} \qquad f^{(2p+1)}(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0.$$

On pose, sous réserve d'existence,

$$C_0 = \frac{f(1)}{2} - \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} \widetilde{B}_1(t)\,f'(t)\,\mathrm{d}t,$$

et pour tout $p \in \mathbb{N}^*$:

$$C_p = \frac{f(1)}{2} - \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t - \sum_{l=1}^{p} \frac{b_{2l}}{(2l)!} f^{(2l-1)}(1) + \int_1^{+\infty} \frac{\widetilde{B}_{2p+1}(t)}{(2p+1)!} f^{(2p+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

27. Pour tout p, on a $\widetilde{B}_{2p+1}$ qui est 1-périodique donc bornée sur $[1,+\infty[$ puis comme $f^{(2p+1)}$ est intégrable pour tout $p \geqslant q$, l'intégrale (quatrième terme dans l'expression de C_p) est bien définie donc C_p est bien défini car les trois premiers sont bien définis. En reprenant l'IPP précédente comme $\tilde{B}_{2p+2}$ est bornée et $f^{(2p+2)} \longrightarrow 0$ en l'infini, on obtient par une IPP généralisée :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\tilde{B}_{2p+1}(t)}{(2p+1)!} f^{(2p+1)}(t)\mathrm{d}t = -\frac{b_{2(p+1)}}{(2(p+1))!} f^{(2p+1)}(1) - \int_1^{+\infty} \frac{\widetilde{B}_{2p+2}(t)}{(2p+2)!} f^{(2p+1)}(t)\mathrm{d}t$$

puis par la même justification qu'avant car $b_{2p+3} = 0$, on a :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\tilde{B}_{2p+1}(t)}{(2p+1)!} f^{(2p+1)}(t)\mathrm{d}t = -\frac{b_{2(p+1)}}{(2(p+1))!} f^{(2p+1)}(1) + \int_1^{+\infty} \frac{\widetilde{B}_{2(p+1)+1}(t)}{(2(p+1)+1)!} f^{(2(p+1)+1)}(t)\mathrm{d}t$$

Ainsi on obtient :

$$C_{p+1} - C_p = -\frac{b_{2(p+1)}}{(2(p+1))!} f^{(2p+1)}(1) + \int_1^{+\infty} \frac{\widetilde{B}_{2(p+1)+1}}{(2(p+1)+1)!} f^{(2(p+1)+1}(t)\mathrm{d}t - \int_1^{+\infty} \frac{\tilde{B}_{2p+1}(t)}{(2p+1)!} f^{(2p+1)}(t)\mathrm{d}t$$

en injectant l'expression trouve ci-dessus, on obtient :

$$C_{p+1} - C_p = 0$$

d'où pour tout $p \geq q$, $C_p = C_q$.

28. On a :

$$\sum_{k\geq 1}^{\mathcal{R}} 1 = \frac{1}{2} - 1 - 0 + 0 = -\frac{1}{2}$$

puis (pour $f\colon x \mapsto x$, on doit prendre au moins $q = 1$) :

$$\sum_{k\geq 1}^{\mathcal{R}} k = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{b_2}{2} + 0 = -\frac{1}{12}$$

enfin (de même $q = 1$) :

$$\sum_{k\geq 1}^{\mathcal{R}} k^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{b_2}{2} 2 + 0 = 0$$

29. Pour $q = 0$, f' est intégrable et la limite de $r_{1,n}$ en $+\infty$ est bien défini lorsque $n \to +\infty$. D'après Q25, on a :

$$L_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_0^n f(t)\mathrm{d}t = -\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t + \frac{f(1)+f(n)}{2} + \int_1^{+\infty} \widetilde{B}_1(t) f'(t)\mathrm{d}t$$

en passant à la limite avec $f(n) \longrightarrow 0$:

$$\sum_{k\geq 1}^{\mathcal{R}} f(k) = \lim_{n\to+\infty} L_n = \frac{f(1)}{2} - \int_0^1 f(t) + \int_1^{+\infty} \widetilde{B}_1(t) f'(t)\mathrm{d}t = C_0$$

Si $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$ converge, on a en intégrant par partie :

$$\int_1^{+\infty} \widetilde{B}_1(t)f'(t) = -f(1)\widetilde{B}_1(0) - \int_1^{+\infty} \widetilde{B}_1'(t)f(t)\mathrm{d}t$$

or $\widetilde{B}_1'(t) = B_0(t) = 1$ donc :

$$\int_1^{+\infty} \widetilde{B}_1(t)f'(t) = \frac{f(1)}{2} - \int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$$

d'où :

$$\sum_{k\geq 1}^{\mathcal{R}} f(k) = f(1) - \int_0^{+\infty} (t)\mathrm{d}t$$

Partie C. Développements Tayloriens généralisés

On note E l'espace vectoriel normé $C([0,1])$ muni de la norme uniforme. Si $g \in E$, on note $\|g\|_\infty$ la norme uniforme de g sur E. On admettra qu'une forme linéaire φ est continue sur E si et seulement s'il existe une constante $C' \geq 0$ telle que, pour tout $g \in E$,

$$\big|\varphi(g)\big| \leq C' \, \|g\|_\infty.$$

On considère φ une forme linéaire continue sur E vérifiant

$$\varphi\big(t \mapsto 1\big) = 1.$$

Soit $(P_n)_{n\geq 0}$ la suite de polynômes définie par

$$P_0 = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ P_n' = n\,P_{n-1}, \quad \text{et} \quad \varphi(P_n) = 0.$$

On pose de plus, sous réserve d'existence, pour tout $x \in [0,1]$ et tout $t \in \mathbb{R}$,

$$S(x,t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P_k(x)}{k!}\, t^k.$$

f désigne une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

I. Les formules de Taylor généralisées

30. Montrons le par récurrence :

- **Initialisation :** pour l'existence, on prend le $P_0 = 1$, il n'y a pas grand chose d'autre à dire. L'unicité est évidente.

- **Hérédité :** Supposons qu'il existe n tel que P_n est bien défini. Puisque P_n est polynomiale, elle est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ puis par le théorème fondamental, on pose :

$$Q(X) = (n+1)\int_0^X P_n(t)\mathrm{d}t$$

une primitive de P_n. Ainsi tout polynôme H s'écrivant $H(X) = Q(X) + C$ où C est une constante vérifie :

$$H'(X) = (n+1)P_n(X)$$

De plus, $\varphi(H) = 0 = \varphi(Q) + \varphi(C) = \varphi(Q) + C$ impose $C = \varphi(Q)$. On pose alors :

$$P_{n+1}(X) = (n+1)\int_0^X P_n(t)\mathrm{d}t - \varphi\left(X \mapsto (n+1)\int_0^X P_n(t)\mathrm{d}t\right)$$

le fait que C soit fixé en fonction de P_n nous garantit l'unicité. Si on veut le montrer plus précisément, on suppose P_{n+1} et P_{n+1}^* qui existe vérifie bien l'unicité (on applique le procédé de récurrence) avec $P_n = P_n^*$. On a :

$$(P_{n+1} - P_{n+1}^*)' = (n+1)P_n - (n+1)P_n^* = 0$$

puis $P_{n+1} - P_{n+1}^* = C$ constant. Ainsi $\varphi(P_{n+1} - P_{n+1}^*) = C$ or par linéarité de C et comme on doit avoir $\varphi(P_{n+1}) = \varphi(P_{n+1}^*) = 0$, on obtient $C = 0$ d'où l'unicité.

31. On reprend le raisonnement de la question précédente, avec :

$$Q(X) = (n+1)\int_0^X P_n(t)\mathrm{d}t$$

on a $P_{n+1}(X) = Q(X) - \varphi(Q)(X)$. Or φ est une forme linéaire donc par la caractérisation fournie par l'énoncé, il existe $C \geq 0$ tel que pour tout $X \in [0,1]$:

$$|P_{n+1}(X)| \leqslant |Q(X)| + |\varphi(Q)(X)| \leqslant \|Q\|_\infty + C\|Q\|_\infty = (1+C)\|Q\|_\infty$$

or par homogénéité de la norme, $\|Q\|_\infty = (n+1)\|P_n\|_\infty$ d'où le résultat.

32. D'après la question précédente, on a :

$$\|P_n\|_\infty \leqslant n!(1+C)^n\|P_0\|_\infty = n!(1+C)^n$$

puis on pose $\widetilde{f}_n(t) = \frac{P_n(x)}{n!}t^n$, on a pour $x \in [0,1]$:

$$|f_n(t)| \leqslant \frac{\|P_n\|_\infty}{n!}|t|^n \leqslant |t(1+C)|^n$$

d'où pour tout $|t| < 1+C$, on a $\sum f_n$ qui CN donc $S(x,t)$ est bien définit. Ainsi $R = \frac{1}{1+C} > 0$ convient (il y a peut être voir sûrement mieux).

33. Soit $t \in]-R,R[$, on pose pour $x \in [0,1]$ $f_n(x,t) = \frac{P_n(x)}{n!}t^n$. On a

- $\sum f_n(x,t)$ CS sur $[0,1]$ (par rapport à x) d'après la question précédente.
- On a :

  $$\|f_n\|_\infty \leqslant |t(1+C)|^n$$

  or $|t(1+C)| < 1$ donc $\sum f_n$ CN puis CU sur $[0,1]$ (on considère toujours par rapport à $x \mapsto f_n(x,t)$ avec t fixé).

Finalement, on en déduit que $x \mapsto S(x,t)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.

34. On sait que $x \mapsto S(x,t)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ et sur cet intervalle, on a :

$$S'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P_k'(x)}{k!}t^k = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{P_k'(x)}{k!}t^k = t\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{P_{k-1}(x)}{(k-1)!}t^{k-1}$$

d'où $x \mapsto S(x,t)$ vérifie l'équation différentielle :

$$S'(x,t) = tS(x,t)$$

dont la solution vaut :

$$S(x,t) = \alpha(t)e^{tx}$$

En effet, il faut bien considérer S comme une fonction de deux variables vérifiant l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial S}{\partial x} = tS$$

dont la constante devant l'exponentielle est une fonction constante par rapport à x mais pas nécessairement par rapport à t.

35. Soit$t \in]-R,R[$. Soit $N \geqslant 1$, on a par linéarité de φ :

$$\varphi\left(x \mapsto S_N(x) = \sum_{k=0}^{N} \frac{P_k(x)}{k!}t^k\right) = \sum_{k=0}^{N} \frac{\varphi(x \mapsto P_k(x))}{k!}t^k = \varphi(x \mapsto P_0) = 1$$

car $P_0 = 1$ et $\varphi(P_k) = 0$ pour tout $k \geq 1$. Puisque φ est continue et que S_N converge à l'infini, on a par caractérisation de la continuité de φ en $x \mapsto S(x,t)$ et par unicité de la limite :

$$\varphi(x \mapsto S(x,t)) = 1$$

on obtient par linéarité de φ :

$$\alpha(t) = \frac{1}{\varphi(x \mapsto e^{tx})}$$

De plus, on montre facilement que $\varphi(x \mapsto e^{tx}) = 1$ en utilisant le développement en série entière de e^{tx} d'où $\alpha(t) = 1$

36. En prenant la forme linéaire sur E définition par $\varphi(x \mapsto f(x)) = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$, qui vérifie $|\varphi(f)| \leqslant \|f\|_\infty$ donc φ est continue. (B_n) est définie de même que la suite (P_n) donc d'après Q31, elle existe et elle est unique. On pose alors formellement :

$$G(x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n(x)}{n!} t^n$$

D'après tout ce qui précède, $x \mapsto G(x,t)$ est bien définie et $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$. On a alors :

$$G(x,t) = \frac{1}{\varphi(x \mapsto e^{tx})} e^{tx}$$

Ainsi pour $t \neq 0$, on a :

$$\varphi(x \mapsto e^{tx}) = \int_0^1 e^{tx}\mathrm{d}t = \frac{1}{t}(e^t - 1)$$

d'où :

$$\forall t \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[\backslash\{0\}, \qquad G(x,t) = \frac{t}{e^t - 1} e^{tx}$$

puis :

$$G(x,0) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n(x)}{n!} 0^n = B_0(x) = 1$$

On en déduit que g est développable en série entière au voisinage de 0 avec pour $t \neq 0$:

$$g(t) = \frac{te^{tx}}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n(x)}{n!} t^n$$

37. Par récurrence, on intègre par partie $\displaystyle\int_y^x \frac{P_p(x+y-t)}{p!} f^{(p+1)}(t)\mathrm{d}t$ avec $u = f^{(p+1)}$ et $v' = \frac{P_p(x+y-t)}{p!}$. Le résultat tombe rapidement.

38. Soit x fixé et $p \in \mathbb{N}$ (donc la variable est en y). Par linéarité de φ, on on obtient (car $\varphi(y \mapsto f(x)) = f(x)\varphi(y \mapsto 1) = f(x)$) :

$$f(x) = \varphi(y \mapsto f(y)) + \sum_{k=1}^{p} \left(\frac{P_k(x)}{k!} \varphi(y \mapsto f^{(k)}(y)) - \frac{f^{(k)}(x)}{k!} \varphi(y \mapsto P_k(y)) \right) + \varphi\left(y \mapsto \int_y^x \frac{P_p(x+y-t)}{p!} f^{(p+1)}(t)\mathrm{d}t \right)$$

or les $\varphi(y \mapsto P_k(y)) = 0$ d'où le résultat car $\varphi(y \mapsto f(y))$ correspond au terme de rang $k = 0$ dans la somme.

39. Si $g \in E$, g est continue sur $[0,1]$ donc $\|g\|_\infty$ existe (car g continue sur un compact) et $|g(0)| \leq \|g\|_\infty$ d'où $|\varphi(g)| \leq \|g\|_\infty$. Ainsi d'après la caractérisation de l'énoncé, φ est continue. Avec cette application φ, l'expression précédente devient :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{p} \frac{P_k(x)}{k!} f^{(k)}(0) + \int_0^x \frac{P_p(x-t)}{p!} f^{(p+1)}(t)\mathrm{d}t$$

40. Soit $j \in \mathbb{N}$, on reprend Q38 en posant $g\colon x \mapsto f(x+j)$, on obtient :

$$g(x) = \sum_{k=0}^{p} \frac{P_k(x)}{k!} \varphi(y \mapsto g^{(k)}(y)) + \varphi\left(y \mapsto \int_y^x \frac{P_p(x+y-t)}{p!} g^{(p+1)}(t)\mathrm{d}t \right)$$

on évalue en $x = 0$ puis on fait le changement de variable $u = t + j$ dans l'intégrale et on obtient le résultat. ($g^{(k)}(y) = f^{(k)}(y+j)$). En effet :

$$\varphi\left(y \mapsto \int_y^0 \frac{P_p(y-t)}{p!} f^{(p+1)}(t+j)\mathrm{d}t \right) = \varphi\left(y \mapsto \int_{y+j}^{j} \frac{P_p(y-t+j)}{p!} f^{(p+1)}(u)\mathrm{d}u \right)$$

puis en inversant les bornes, on fait sortir le facteur négatif (-1).

II. Formule d'Euler-Boole

41. Avec φ défini de cette manière, on a par IT $|\varphi(g)| \leq \|g\|_\infty$ donc $C = 1$. Ainsi d'après Q32, $R = \frac{1}{1+C} = \frac{1}{2}$ fonctionne. De plus, on a vu que pour $t \in]-R, R[$, en posant :

$$G(x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{E_n(x)}{n!} t^n$$

$x \mapsto G(x,t)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ et d'après Q34 et Q35, on a :

$$G(x,t) = \alpha(t) e^{tx}$$

avec $\alpha(t) = \frac{1}{\varphi(x \mapsto e^{tx})}$ où ici :

$$\varphi(x \mapsto e^{tx}) = \frac{1}{2}(1 + e^t)$$

d'où le résultat.

Remarque : tout ce qu'on fait ici se justifie à partir des résultats démontrés dans la partie I mais sur la copie il faudrait peut être justifier davantage certaines choses comme par exemples la bonne définition des E_n,...

42. On a :

$$G(1-x,t) = \frac{2e^{t(1-x)}}{e^t+1} = e^t \frac{2e^{-tx}}{e^t+1} = \frac{2e^{-tx}}{e^{-t}+1} = G(x,-t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n E_n(x)}{n!} t^n$$

or :

$$G(1-x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{E_n(1-x)}{n!} t^n$$

puis par unicité du développement en SE, sur $]-R, R[$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \frac{E_n(1-x)}{n!} = \frac{(-1)^n E_n(x)}{n!}$$

d'où le résultat.

43. On applique Q40. Pour les termes dans la somme, pas de soucis. Pour le deuxième terme :

$$\varphi\left(y \mapsto \int_j^{y+j} \frac{E_p(y-t+j)}{p!} f^{(p+1)}(u)\mathrm{d}u\right) = \frac{1}{2}\left(\int_j^j \ldots + \int_j^{j+1} \frac{E_p(1-(t-j))}{p!} f^{(p+1)}(t)\mathrm{d}t\right)$$
$$= \frac{1}{2}0 + \frac{1}{2}\int_j^{j+1} \frac{(-1)^p E_p(t-j)}{p!} f^{(p+1)}(t)\mathrm{d}t$$

On remplace dans l'expression de Q40 et on obtient le résultat.

44. D'après la question précédente en multipliant par $(-1)^{j-1}$, on obtient :

$$(-1)^{j-1} f(j) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{p} \frac{e_k}{k!}((-1)^{j-1} f^{(k)}(j) - (-1)^j f^{(k)}(j+1)) + \frac{(-1)^{j+p}}{2}\int_j^{j+1} \frac{E_p(t-j)}{p!} f^{(p+1)}(t)\mathrm{d}t$$

On somme pour $j=1$ à $j=n$, commençons par calculer le premier terme :

$$\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=0}^{p} \frac{e_k}{k!}((-1)^j f^{(k)}(j) - (-1)^{j-1} f^{(k)}(j+1)) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{p} \frac{e_k}{k!}\sum_{j=1}^{n}((-1)^{j-1} f^{(k)}(j) - (-1)^j f^{(k)}(j+1))$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{p} \frac{e_k}{k!}(f^{(k)}(1) - (-1)^n f^{(k)}(n+1))$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{p} \frac{e_k}{k!} f^{(k)}(1) + \frac{(-1)^{n-1}}{2}\sum_{k=0}^{p} \frac{e_k}{k!} f^{(k)}(n+1)$$

puis (sur les intervalles $[j, j+1]$, $\lfloor t \rfloor = j$) :

$$\sum_{j=1}^{n}\int_j^{j+1} \frac{(-1)^{j+p} E_p(t-j)}{p!} f^{(p+1)}(t)\mathrm{d}t = \sum_{j=1}^{n}\int_j^{j+1} \frac{\widetilde{E}_p(t)}{p!} f^{(p+1)}(t)\mathrm{d}t$$
$$= \int_1^{n+1} \frac{\widetilde{E}_p(t)}{p!} f^{(p+1)}(t)\mathrm{d}t$$

En injectant les deux résultats obtenus dans l'expression ci-dessus de $\sum_{j=1}^{n}(-1)^j f(j)$, on obtient :

$$\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}f(j) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{p}\frac{e_k}{k!}f^{(k)}(1) + \frac{(-1)^{n-1}}{2}\sum_{k=0}^{p}\frac{e_k}{k!}f^{(k)} + \frac{1}{2}\int_1^{n+1}\frac{\widetilde{E}_p(t)}{p!}f^{(p+1)}(t)\mathrm{d}t(n+1)$$

d'où le résultat.

Remarque : Il y a beaucoup de questions (notamment vers la fin) où il n'y a presque rien à faire, je pense qu'une manière de faire aurait été de sauter les questions sur lesquelles on perd trop de temps et de récupérer des points par ci par là mais je pense qu'une copie qui traite le sujet de manière linéaire serait très fortement valorisée.