

CCS, Physique–Chimie 1, MP, 2025

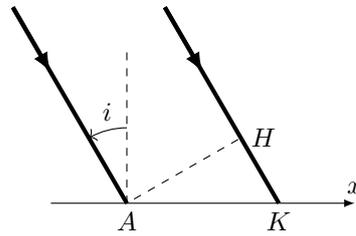
Observation et protection côtières (P084)

Solutions proposées par Paul Roux

A — Principes physiques d'un radar océanographique

I — Modèle optique et loi de Bragg

- Q1. Les rayons qui éclairent les deux miroirs consécutifs décalés de L parviennent sur ceux-ci après un trajet marqué par la différence de marche $\delta = HK = AK \sin i = L \sin i$. Il faut ajouter à cette différence de marche une expression analogue au retour avant de reformer un faisceau parallèle et $\delta = L(\sin i + \sin \theta)$.



- Q2. Il s'agit d'interférences à ondes multiples ; si celles-ci sont assez nombreuses on sait que la lumière est concentrée dans les seules directions correspondant à des interférences constructives, soit $\delta = p\lambda$ où $p \in \mathbb{Z}$ est l'ordre d'interférence ; ceci correspond bien comme demandé à $L(\sin i + \sin \theta) = p\lambda$.

II — Modèle du conducteur parfait

- Q3. Dans le vide ($\rho = 0$ et $\vec{j} = \vec{0}$), les équations de Maxwell prennent la forme $\text{div } \vec{B} = 0$, $\text{div } \vec{E} = 0$, $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ et $\text{rot } \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$. On en déduit $\text{rot } \text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$ mais par ailleurs $\text{rot } \text{rot } \vec{E} = \text{grad } \text{div } \vec{E} - \Delta \vec{E}$; finalement, on retrouve l'équation de d'Alembert $\Delta \vec{E}_i = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}_i}{\partial t^2}$. Reportant dans cette équation l'expression proposée on en déduit la relation de dispersion demandée, $k_i^2 + q_i^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$.

- Q4. Il convient d'abord de valider le modèle conducteur qui permet de traiter les équations de Maxwell dans l'ARQS, sous réserve donc que $\|\vec{j}\| \gg \varepsilon_0 \left\| \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right\|$ ou $\gamma \gg \varepsilon_0 \omega$. On écrira donc $f \ll \gamma \mu_0 c^2 \sim 450 \text{ GHz}$, compte tenu de $\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$. Cette première condition mène à l'expression affirmée par l'énoncé (effet de peau) et l'approximation du conducteur parfait revient à considérer que toutes les dimensions caractéristiques de la propagation vérifient $L \gg \ell_a = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \pi \sigma f}} \sim 8 \text{ cm}$ pour une onde avec $f = 10 \text{ MHz}$. Ce sera évidemment le cas de la profondeur océanique, mais aussi de la longueur d'onde de l'onde dans le vide $\lambda = \frac{c}{f} \sim 30 \text{ m}$. L'ensemble de ces considérations valide le modèle du conducteur parfait.

- Q5. Le champ électrique total au voisinage $y = 0$ de l'interface a pour champ électrique $\vec{E}_{\text{tot}} = A \vec{u}_z e^{-j\omega t} f(x)$ avec $f(x) = e^{jk_i x} + r_0 e^{jk_0 x}$; la condition $f(x) = 0, \forall x$, impose alors $r_0 = -1$ et $k_0 = k_i$. L'application de la relation de dispersion à l'onde réfléchie impose donc $k_i^2 + q_i^2 = \frac{\omega^2}{c^2} = k_0^2 + q_0^2$ donc $g_0 = \pm q_i$; l'onde réfléchie se

propage nécessairement à partir des courants surfaciques qui lui donnent naissance dans le plan $y = 0$ vers le vide donc $q_0 > 0$ et $q_0 = q_i$.

Q6. $\vec{OM} = x\vec{u}_x + h(x)\vec{u}_y + z\vec{u}_z$; l'annulation du champ électrique total en un point de la frontière impose donc $e^{jk_i x - jq_i h(x)} - e^{jk_i x + jq_i h(x)} + r_1 e^{jk_r x + jq_r h(x)} = 0, \forall x$; toutefois un développement au premier ordre fournit $e^{\pm jq_i h(x)} = 1 \pm jq_i h(x)$ d'une part, et le terme en r_1 doit être développé à l'ordre zéro, donc la condition d'annulation à l'interface devient $-2jq_i h(x) + r_1 e^{jk_r x} = 0, \forall x$, comme demandé.

Q7. Reportant la forme complexe de $h(x)$ il vient $jq_i h_0 e^{j(k_i - k_v)x} = r_1 e^{jk_r x}$ donc en identifiant les deux fonctions de x , $r_1 = jq_i h_0$ et $k_r = k_i - k_v$. la mesure de r_1 fournit un accès à l'amplitude h_0 des vagues, ou de leur composante de Fourier à la pulsation ω .

Q8. Il suffit de remarquer que pour l'onde incidente, $k_i = \vec{k} \cdot \vec{u}_x = \frac{2\pi}{\lambda} \sin i$, pour l'onde réfléchie $k_r = \vec{k} \cdot \vec{u}_x = -\frac{2\pi}{\lambda} \sin \theta$ (même longueur d'onde car même fréquence que l'onde incidente, se propageant dans le même matériau) donc $\frac{2\pi}{\lambda} (\sin i + \sin \theta) = \frac{2\pi}{L}$ correspond à la loi de Bragg pour l'ordre $p = 1$.

Q9. L'onde incidente comme l'onde réfléchie doivent être quasi-rasantes pour se propager entre l'antenne (à faible hauteur) et l'océan (à grande distance) soit $i = \theta = \frac{\pi}{2}$.

Q10. La longueur d'onde demandée est $L = \frac{\lambda}{2} = \frac{c}{2f} = 12,2 \text{ m}$.

III — Effet Doppler

Q11. Si l'onde est progressive dans le sens de $+\vec{u}_x$ on écrira $h_+(x, t) = h_0 \cos(k_v x - \omega_v t)$ tandis que l'autre sens de propagation s'écrira $h_-(x, t) = h_0 \cos(k_v x + \omega_v t)$. Dans les deux cas la vitesse U s'identifie à la vitesse de phase de l'onde donc $\omega_v = k_v U$.

Q12. Reportant à nouveau $h(x, t)$ dans l'équation établie à l'interface il vient $jq_i h_0 e^{-j(\omega - \omega_v)t} e^{j(k_i - k_v)x} = r e^{-j\omega_r t} e^{jk_r x}$ qui doit être vérifiée $\forall x$ et $\forall t$, d'où on déduit $\omega_r = \omega - \omega_v$ et $k_r = k_i - k_v$ comme ci-dessus.

Q13. On recopie ici $\omega_r - \omega = -Uk_v = -U(k_i - k_r)$ soit encore $\omega_r - \omega = -\frac{U}{c}(\omega + \omega_r)$. Admettant que l'écart $\omega_r - \omega$ reste (en valeur absolue) faible on peut encore écrire cette relation $f_r - f = -2\pi \frac{2U\omega}{c}$ mais $\frac{2\pi c}{\omega} = \lambda$ donc enfin

$f_r - f = -\frac{2U}{\lambda}$; dans le cas d'une onde qui s'éloigne du radar, la fréquence de l'onde réfléchie est diminuée.

Dans l'autre cas (onde se rapprochant du rivage) il suffit de changer U en $-U$ et donc $f_r - f = +\frac{2U}{\lambda}$.

IV — Mesure des courants de surface

Q14. La loi de l'effet Doppler s'écrit encore $f_r - f = \pm f_B$ à condition de poser $f_B = \frac{2}{\lambda} \sqrt{\frac{gL}{2\pi}}$.

Q15. La vitesse des ondes de surface est $\vec{v}' = \pm U\vec{u}_x$ dans le référentiel \mathcal{R}' ; dans le référentiel \mathcal{R} elle s'écrit selon la loi de composition des vitesses $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_e$ où $\vec{v}_e = v_x \vec{u}_x$ est la vitesse d'entraînement. Finalement dans le cas de vagues en approche on aura $\vec{v} = (-U + v_x)\vec{u}_x$ et dans le cas de vagues en éloignement, $\vec{v} = (U + v_x)\vec{u}_x$.

Dans le premier cas, on a vu que le décalage Doppler est $f_r - f = +\frac{2}{\lambda} \|\vec{v}\|$ soit $f_r - f = +f_B - \frac{2v_x}{\lambda}$ tandis que dans le second cas, $f_r - f = -\frac{2}{\lambda} \|\vec{v}\|$ devient $f_r - f = -f_B + \frac{2v_x}{\lambda}$. Dans les deux cas on a donc $f_D = -\frac{2v_x}{\lambda}$ où $\lambda = \frac{c}{f}$ et finalement $f_D = -\frac{2v_x}{c} f$.

Q16. Manifestement on peut choisir $\Delta f = 0,40 \text{ Hz}$. On a vu que la longueur L vérifie aussi $L = \frac{\lambda}{2}$ donc le décalage

de Bragg serait donné par $f_B = \sqrt{\frac{g}{\pi\lambda}} = 0,12 \text{ Hz}$: ce n'est pas compatible avec la mesure !

On voit apparaître un décalage supplémentaire qui s'identifie comme f_D avec dans le premier cas (à gauche) $f_D = +0,1 \text{ Hz}$ et dans le second (à droite) $f_D = -0,1 \text{ Hz}$; on en déduit donc $v_x = \frac{cf_D}{2f} = \mp 1,2 \text{ m/s}$. Dans le premier cas $v_x < 0$ et le courant de surface s'approche de la côte, dans le second il s'en éloigne.

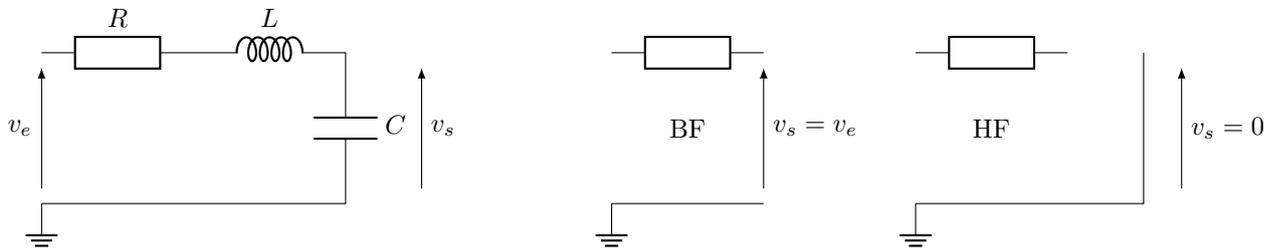
Q17. Avec $v_{x1} = -v_{x2} = -1,2 \text{ m/s}$ on trouve dans difficulté $v_E = -1,1 \text{ m/s}$ et $v_N = -0,8 \text{ m/s}$. Les directions (vers l'ouest et le sud) sont bien compatibles avec le schéma, ainsi que les ordres de grandeur au point M de la carte.

B — Traitement des signaux radar

I — Mesure d'une différence de fréquence par détection synchrone

Q18. $v_i = Kv_1(t)v_2(t)$ s'écrit aussi $v_i(t) = \frac{KAB}{2} [\cos(2\pi(f_1 + f_2)t + \varphi_0) + \cos(2\pi(f_1 - f_2)t - \varphi_0)]$ qui fait bien apparaître deux termes (de même amplitude) de fréquences $f_1 + f_2$ et $|f_1 - f_2|$. Pour se limiter au seul terme de plus basse fréquence $|f_1 - f_2|$ il faut donc utiliser un filtre passe-bas.

Q19. On obtient un filtre passe-bas passif du second ordre avec un circuit RLC série, filtrage en tension condensateur :



Il s'agit bien d'un filtre passe-bas comme on le voit en considérant les équivalents BF (C circuit ouvert, L fil) et HF (C fil, ML circuit ouvert).

Q20. On traite le filtre comme un diviseur de tension, $H = \frac{v_s}{v_e} = \frac{1/jC\omega}{1/jC\omega + R + jL\omega}$ (on notera qu'au contraire de la première partie on a repris ici la notation complexe $\exp[+j\omega t]$) soit aussi $H = \frac{1}{1 + jRC\omega - LC\omega^2}$ qu'on met

aussi sous la forme canonique $H = \frac{H_0}{1 + jx/Q - x^2}$ avec $H_0 = 1$, $x = \omega/\omega_0$ où la pulsation caractéristique est

$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et le facteur de qualité $Q = \frac{1}{RC\omega_0} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$. On souhaite un filtrage sans résonance avec une

fonction de transfert la plus proche possible de ses asymptotes dans le diagramme de Bode; on notera donc que $|H|^2 = \frac{1}{1 + x^4 + x^2(\frac{1}{Q^2} - 2)}$ vérifie cette contrainte si on choisit $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Il faut alors choisir une fréquence

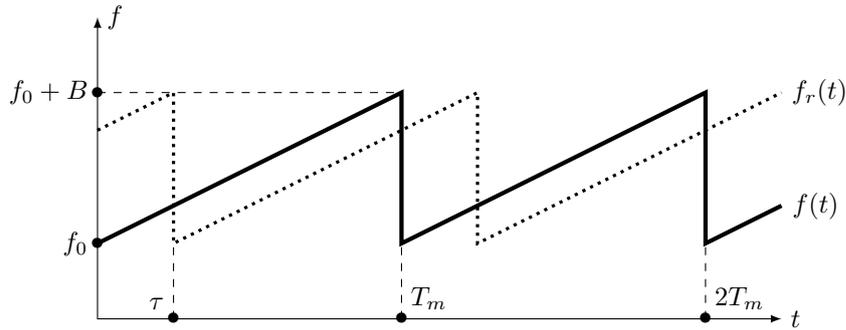
de coupure de l'ordre de $f_0 \leq f_1 \simeq f_2$ pour couper à coup sûr les hautes fréquences $f_1 + f_2$ en laissant passer le signal de très faible fréquences $|f_1 - f_2|$. Ces deux contraintes ne permettent pas de fixer les trois paramètres R , L et C et on va donc imposer $R = 1 \text{ k}\Omega$ (valeur courante au laboratoire) et on a alors $LC = \frac{1}{4\pi f_0^2}$ et

$\frac{L}{C} = R^2 Q^2 = \frac{R^2}{2}$; prenant $f_0 = 10 \text{ kHz}$ on trouve facilement $L = 112 \text{ mH}$ et $C = 225 \text{ nF}$ qui sont toutes deux aussi des valeurs courantes au laboratoire.

Q21. On change maintenant $2\pi f_1 t$ en $2\pi f_1 t + \frac{\pi}{2}$; on obtient donc $v_d(t) = \frac{KAB}{2} \cos(2\pi(f_1 - f_2)t - \varphi_0)$ et donc $v_{dQ} = \frac{KAB}{2} \cos\left(2\pi(f_1 - f_2)t + \frac{\pi}{2} - \varphi_0\right)$ qui s'écrit aussi $v_{dQ}(t) = -\frac{KAB}{2} \sin(2\pi(f_1 - f_2)t - \varphi_0)$. La seule connaissance du cosinus donne l'angle en valeur absolue mais la présence des deux fonctions trigonométriques permet de connaître l'angle exact et donc le signe de $f_1 - f_2$.

II — Mesure de distance par modulation de fréquence

- Q22.** $f(t) = f_0 + \frac{Bt}{T_m}$ sur une période $0 \leq t \leq T_m$; on a en particulier $f(0) = f_0$ et $f(T_m) = f_0 + B$; on complète ensuite (traits pleins) par périodicité :



- Q23.** Puisque le signal électromagnétique se propage dans l'air, assimilé au vide, donc à la célérité c , le temps τ est la durée de l'aller-et-retour et $\tau = \frac{2d}{c} = 66 \mu\text{s} \ll T_m$. On en déduit le tracé demandé, avec $f_r(t) = f(t - \tau)$ (en pointillés sur le tracé ci-dessus). Attention, l'écart choisi pour ce tracé est $\tau = T_m/4$ et non pas $T_m/10$, de manière à augmenter la lisibilité.

- Q24.** L'écart de fréquence entre f et $f - r$ est constant (au signe près) et vaut $\Delta f = \pm B \frac{\tau}{T_m}$ donc après détection et filtrage $f_d = \frac{2B}{cT_m} d$ soit une mesure possible de $d = \frac{cf_d T_m}{2B}$.

III — Questions liées à l'échantillonnage

III.1 — Analyse spectrale par TFD

- Q25.** Le critère de Nyquist $f_e = \frac{1}{T_e} > 2f_{\text{max}}$ impose que la fréquence de l'échantillonnage f_e doit être supérieure au double de la plus grande des fréquences du spectre du signal échantillonné $f(t)$. S'il n'est pas vérifié, les valeurs de $S(f_k)$ seront translatées par repliement à l'intérieur de l'intervalle de représentation (de 0 à $f_e/2$).

On se prémunit contre un tel repliement en imposant au signal, avant l'échantillonnage, un filtrage passe-bas qui supprime toutes les composantes qui dépassent la fréquence maximale autorisée $f_e/2$.

- Q26.** Le spectre de gauche a une bien meilleure résolution spectrale et l'abscisse des pics y est donc bien plus significative; au contraire sur le spectre de droite, chaque pic agrège plusieurs composantes de fréquences voisines, ce qui donne une fausse valeur de l'amplitude de ces composantes.

Dans le spectre de gauche on distingue 10 intervalles tous les 50 Hz donc $\delta f = 5 \text{ Hz}$ tandis que dans celui de droite on observe de même $\delta f = 20 \text{ Hz}$. Ces valeurs sont cohérentes avec les données de l'énoncé car

$\delta f = f_{k+1} - f_k = \frac{1}{N_e T_e}$; dans le premier cas $N_e = 100$, $T_e = 2 \text{ ms}$ donc $\delta f = 5 \text{ Hz}$ et dans le second cas $N_e = 100$, $T_e = 0,5 \text{ ms}$ donc $\delta f = 20 \text{ Hz}$.

III.2 — Limite et résolution en vitesse

- Q27.** La fréquence maximale mesurable est donnée par la condition de Nyquist, $f_{\text{max}} = \frac{1}{2T_m} = 1,9 \text{ Hz}$. Comme

$$0 < f_D < 1,9 \text{ Hz} \text{ et } f_D = -2 \frac{v_x}{c} f \text{ on aura aussi } 0 < |v_x| < c \frac{f_{D,\text{max}}}{2f} = 9,5 \text{ m/s}.$$

- Q28.** On aura ici $\delta f = \frac{1}{NT_m} = 9,3 \cdot 10^{-4} \text{ Hz}$ donc $\Delta v_x = \frac{c}{2f} \delta f = 5 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}$.

III.3 – Limite et résolution en distance

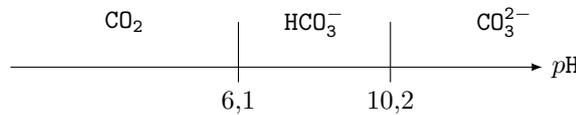
Q29. De la même manière $f_{d \max} = \frac{M}{2T_m}$ puisque M échantillons sont pris pendant une durée T_m . Comme on a vu que $f_d = \frac{2Bd}{cT_m}$, $\frac{M}{2} = \frac{2Bd_{\max}}{c}$ impose $M = \frac{4Bd_{\max}}{c} = 83$ mais pour l'algorithme FFT on choisit une puissance de 2, donc au moins $M = 128$.

Q30. On a ici $\delta f_d = \frac{1}{T_m} = 3,8 \text{ Hz}$ donc $\Delta d = \frac{cT_m \delta f_d}{2B} = \frac{c}{2B} = 1,2 \text{ km}$. Il est probablement possible de changer la valeur de B , donc la vitesse du balayage en fréquence.

C — Protection du littoral par dépôt électrolytique

I — Composition de l'eau de mer

Q31. $K_{A1} = \frac{[\text{HCO}_3^-][\text{H}^+]}{[\text{CO}_2]}$ pour $\text{CO}_2 + \text{H}_2\text{O} = \text{HCO}_3^- + \text{H}^+$ donc $\frac{[\text{CO}_2]}{[\text{HCO}_3^-]} \gg 1$ pour $p\text{H} < pK_{A1} = 6,1$; de même $\frac{[\text{HCO}_3^-]}{[\text{CO}_3^{2-}]} \gg 1$ pour $p\text{H} < pK_{A2} = 10,2$ d'où le diagramme :



et l'espèce prédominante dans l'eau de mer est l'ion HCO_3^- .

Q32. L'énoncé fournit la constante $K_{S1} = [\text{Ca}^{2+}][\text{CO}_3^{2-}]$ de l'équation-bilan de dissolution (D_1), $\text{CaCO}_3 = \text{Ca}^{2+} + \text{CO}_3^{2-}$; il faut aussi écrire le bilan acido-basique (AB_2), $\text{HCO}_3^- = \text{H}^+ + \text{CO}_3^{2-}$ de constante K_{A2} et l'auto-protolyse de l'eau, $\text{H}_2\text{O} = \text{OH}^- + \text{H}^+$, notée (P) et de constante d'équilibre K_e pour obtenir l'équation-bilan de formation du carbonate, $-(D_1) + (AB_2) - (P)$, de constante d'équilibre $K = \frac{K_{A2}}{K_{S1}K_e}$ donc $pK = 10,2 - 8,4 - 14 = -12,2$ donc $K = 10^{12,2} \gg 1$: la réaction est totale.

Q33. Déterminons le quotient des activités de la réaction de précipitation, $Q = \frac{1}{[\text{Ca}^{2+}][\text{HCO}_3^-][\text{OH}^-]}$ avec $[\text{OH}^-] = 10^{-5,9} \text{ mol/L}$ car $p\text{H} = 8,1$, $[\text{HCO}_3^-] = \frac{0,20}{84} = 2,4 \cdot 10^{-3} \text{ mol/L}$ et $[\text{Ca}^{2+}] = \frac{1,46}{147} = 9,9 \cdot 10^{-3} \text{ mol/L}$. Finalement, $Q = 3,3 \cdot 10^{10}$ et $Q < K$ donc la réaction devrait se produire jusqu'à la disparition du réactif limitant... Comme ça n'est pas le cas il y a effectivement blocage cinétique.

Q34. Dans l'eau étudiée $[\text{Mg}^{2+}] = \frac{6,75}{246,5} + \frac{2,4}{95,2} = 5,3 \cdot 10^{-2} \text{ mol/L}$ donc l'apparition du précipité aura lieu selon $\text{Mg}^{2+} + 2\text{OH}^- = \text{MgOH}_2$ si $[\text{OH}^-] \geq \sqrt{\frac{K_{S2}}{[\text{Mg}^{2+}]}} = 1,55 \cdot 10^{-5} \text{ mol/L}$ soit $p\text{H} > 9,2$.

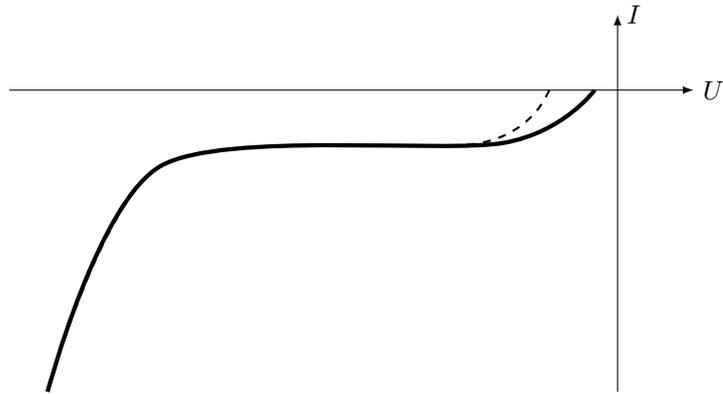
II — Électrolyse de l'eau de mer et réactions cathodiques

Q35. Il s'agit du couple $\text{O}_2 + 4\text{H}^+ + 4\text{e}^- = 2\text{H}_2\text{O}$ donc d'après la loi de Nernst $E = 1,23 + \frac{0,06}{4} \log(p_{\text{O}_2}) - 0,06 p\text{H}$ soit $E = 0,73 \text{ V}$.

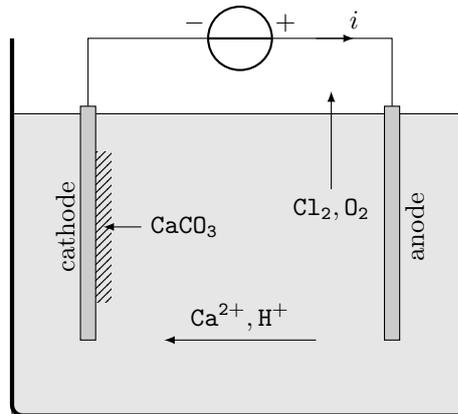
Q36. Il s'agit du couple $2\text{H}^+ + 2\text{e}^- = \text{H}_2$ donc $E = -\frac{0,06}{2} \log(p_{\text{H}_2}) - 0,06 p\text{H}$ soit $E = -0,49 \text{ V}$.

Q37. La réaction observée est une réaction de réduction et les réductions possibles sont celles de O_2 en H_2O puis, à potentiel plus bas, celle de H_2O en H_2 . Le domaine (a) correspond à $-0,79 < E < -0,23 \text{ V}$; on observe donc la réduction du dioxygène dissous, $\text{O}_2 + 4\text{H}^+ + 4\text{e}^- \rightarrow 2\text{H}_2\text{O}$. Le domaine (b) correspond à $E < -0,79 \text{ V}$; on observe donc la réduction de l'eau, $2\text{H}^+ + 2\text{e}^- \rightarrow \text{H}_2$ avec production de bulles de dihydrogène.

Q38. Si la concentration en O_2 était plus faible, le potentiel rédox du premier couple serait plus bas, donc la première partie de la courbe serait décalée vers la gauche (courbe en pointillés ci-dessous) :

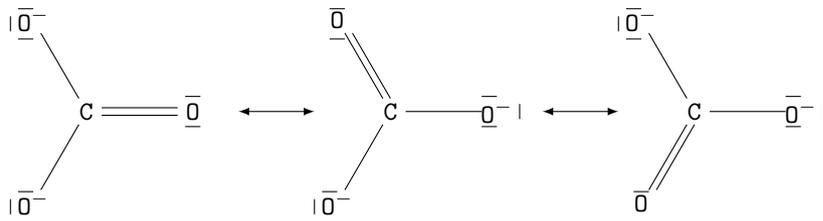


- Q39.** La production du carbonate de calcium CaCO_3 est thermodynamiquement favorable dans l'eau de mer, mais cinétiquement bloquée ; la réduction de l'eau de mer lève manifestement ce blocage.
 À tension plus basse, la réduction de l'eau provoque aussi une forte augmentation du pH ; elle permet donc aussi la précipitation de $\text{Mg}(\text{OH})_2$ (qui n'est thermodynamiquement favorable que pour $\text{pH} > 9,1$).
- Q40.** On peut envisager l'oxydation de l'eau en O_2 selon $2\text{H}_2\text{O} \rightarrow 4\text{H}^+ + 4\text{e}^- + \text{O}_2$; avec une valeur de potentiel standard assez proche on peut aussi envisager l'oxydation des ions chlorure en dichlore, selon $2\text{Cl}^- \rightarrow \text{Cl}_2 + 2\text{e}^-$.
- Q41.** La cathode, siège de la réduction, est aussi le point d'arrivée des électrons donc de départ du courant. Elle doit être reliée au point de potentiel le plus bas du générateur qui assure l'électrolyse :



III — Structure cristalline du dépôt de carbonate de calcium

- Q42.** L'atome de carbone présente 4 électrons de valence, l'atome d'oxygène 6. On peut donc proposer des formules de Lewis localisant les charges $-$ sur deux des trois atomes d'oxygène :



- Q43.** La géométrie plane découle de la règle d'éloignement maximal de trois doublets liants équivalents. Les angles entre liaisons sont rigoureusement égaux entre eux et à $\frac{2\pi}{3}$.
- Q44.** Le cristal est formé d'un assemblage d'ions calcium et carbonate donc sa stabilité est assurée par des liaisons ioniques entre les ions.
- Q45.** La masse volumique de l'aragonite est celle d'une maille rhomboédrique, $\rho = 4 \frac{\mathcal{M}_{\text{CaCO}_3}}{\mathcal{N}_A abc} = 2,93 \text{ g/cm}^3$. Plus dense que la calcite, l'aragonite est donc plus stable à haute pression, comme demandé.