

## CCS, Physique–Chimie 2, MPI, 2025

Une histoire de tubes (P088)

Solutions proposées par Paul Roux

## A — La diode à vide

I — Caractéristique  $I_a(U_{ac})$  de la diode

- Q1.** En régime stationnaire, les équations de structure (dites de Maxwell–Thomson et de Maxwell–Faraday) se simplifient selon  $\boxed{\operatorname{div} \vec{B} = 0}$  et  $\boxed{\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{0}}$  tandis que les équations aux sources (dites de Maxwell–Gauss et de Maxwell–Ampère) prennent les formes  $\boxed{\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$  et  $\boxed{\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{j}}$ . De l'équation de Maxwell–Faraday on déduit l'existence d'au moins un potentiel (défini à une constante scalaire près)  $V$  tel que  $\boxed{\vec{E} = -\operatorname{grad} V}$ . Reportant dans l'équation de Maxwell–Gauss, et compte tenu que  $\operatorname{div} \operatorname{grad} V = \Delta V$  on obtient la relation de  $\boxed{\text{Poisson}}$ ,  $\boxed{\Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}}$ .
- Q2.** On peut négliger les effets de bord si la hauteur des cylindres formant les électrodes est nettement plus élevée que la distance entre ces électrodes ( $H \gg r_2 - r_1$ ). Cette hypothèse entraîne logiquement l'indépendance vis-à-vis de  $z$ . À l'exception de la grille (hélicoïdale), qui n'est d'ailleurs pas prise en compte ici, les électrodes sont également invariantes de révolution, ce qui entraîne l'indépendance vis-à-vis de  $\theta$ . Finalement,  $\boxed{V = V(r)}$ .
- Q3.** On compare le poids  $P = m_e g \sim 10^{-29}$  N et la force électrique  $F = eE \sim \frac{eU}{d}$  avec une tension  $U \sim 100$  V entre deux électrodes distantes de  $d \sim 3$  mm; on a donc  $F \sim 10^{-15}$  N. On a donc évidemment  $\boxed{F \gg P}$  et on négligera le poids dans tout ce qui suit.
- Q4.** La force  $\vec{F} = -e\vec{E} = +e\operatorname{grad} V$  dérive de l'énergie potentielle  $E_p = -eV$ ; la conservation de l'énergie, en présence de cette seule force conservative, s'écrit donc  $E = \frac{1}{2} m_e v^2 - eV$  avec, lors de l'émission sur la cathode,  $\vec{v} = \vec{0}$  et  $V = V_c = 0$  donc  $E = 0$  et  $\boxed{\frac{1}{2} m_e v^2(r) = eV(r)}$ .
- Q5.** L'équation locale de conservation de la charge découle directement de la divergence de l'équation de Maxwell–Ampère; elle s'écrit  $\boxed{\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0}$ . En régime stationnaire, le vecteur  $\vec{j}$  est donc à  $\boxed{\text{flux conservatif}}$ . Comme  $\vec{j} = \rho \vec{v}$  est radial avec les mêmes invariances que  $\vec{v}$ , on peut alors écrire  $\vec{j} = \rho(r)v(r)\vec{e}_r$  avec un flux conservé  $2\pi r H j(r) = -I_a, \forall r$  (compte tenu de l'orientation choisie pour  $I_a$ ) donc aussi  $\boxed{\rho(r)v(r) = -\frac{I_a}{2\pi r H}}$ . C'est  $\rho(r) < 0$  qui explique le signe  $-$  de cette relation.
- Q6.** On a vu que  $v(r) = +\sqrt{\frac{2e}{m_e} V(r)}$  donc l'équation de Poisson  $\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dV}{dr} \right) = +\frac{I_a}{\varepsilon_0 2\pi r H v(r)}$  s'écrit bien  $\boxed{\frac{d}{dr} \left( r \frac{dV}{dr} \right) = k V^{-1/2}}$  à condition de poser  $\boxed{k = \frac{I_a}{2\pi \varepsilon_0 H} \sqrt{\frac{m_e}{2e}}}$ .
- Q7.** L'équation aux dimensions  $\frac{[V]}{r} = \frac{[k]}{[\sqrt{V}]}$  montre qu'il faut vérifier  $[k^2] = \frac{[V^3]}{[r^2]}$ . Dans l'expression de  $k$ , le terme  $\frac{I_a}{2\pi \varepsilon_0 H}$  a la dimension de  $\frac{[V]}{[t]}$  puisque  $\frac{q}{4\pi \varepsilon_0 r}$  est un potentiel. On a donc déjà établi que  $[k^2] = \frac{[V^2]}{[t^2]} \left[ \frac{m_e}{e} \right]$ ; il reste donc à vérifier que  $\frac{1}{[t^2]} \left[ \frac{m_e}{e} \right] = \frac{[V]}{[r^2]}$ , qui revient à vérifier que  $\left[ m_e \frac{r}{t^2} \right] = \left[ e \frac{V}{r} \right]$ , qui n'est autre que

l'équation aux dimensions du principe fondamental  $m_e \vec{a} = -e\vec{E}$ . Ceci achève de vérifier la cohérence de l'unité de  $k$ .

**Q8.** Pour des dimensions données, la constante  $k$  est proportionnelle à  $V^{3/2}$  d'une part et à  $I_a$  d'autre part. Donc si  $V_a \mapsto V_a \times N$  on aura  $I_a \mapsto I_a \times N^{3/2}$ . De même l'équation de Poisson montre que  $\rho(r)$  est proportionnel à  $V$  donc  $\rho(r) \mapsto \rho(r) \times N$  et le produit  $\rho(r)v(r)$  étant proportionnel à  $I_a$  on aura aussi  $v(r) \mapsto v(r) \times N^{3/2}$ .

**Q9.** Posant  $V(r) = \alpha r^n$  dans l'équation établie plus haut il vient  $\alpha n^2 r^{n-1} = \frac{k}{\sqrt{\alpha} r^{n/2}}$  qui n'est possible que si

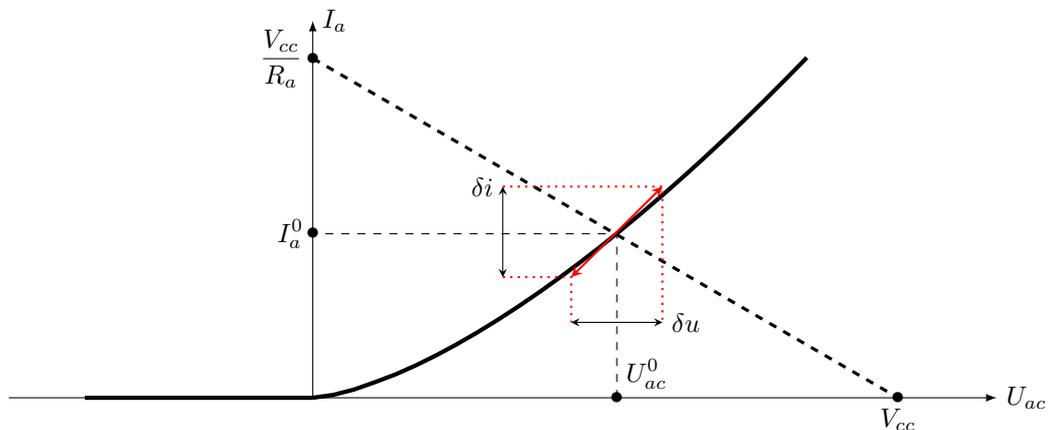
$$n - 1 = -\frac{n}{2} \text{ donc } n = \frac{2}{3} \text{ et } n^2 \alpha^{3/2} = k \text{ donc } \alpha = \left(\frac{9}{4}k\right)^{2/3}.$$

**Q10.**  $U_{ac} = \alpha(r_2 - r_1)^n$  s'écrit aussi  $U_{ac} = \left(\frac{9I_a}{8\pi\epsilon_0 H} \sqrt{\frac{m_e}{2e}}\right)^{2/3} (r_2 - r_1)^{2/3}$  ou, en inversant la relation,  $I_a = \beta U_{ac}^{3/2}$

avec  $\beta = \frac{8\pi\epsilon_0 H}{9(r_2 - r_1)} \sqrt{\frac{2e}{m_e}}$ . Numériquement  $\beta = 2,2 \cdot 10^{-4} \text{ A} \cdot \text{V}^{-3/2}$ .

**Q11.** Dans le cas  $U_{ac} < 0$ , le champ électrique s'oppose au départ des électrons qui restent donc au voisinage de la cathode et ne voyagent pas jusqu'à l'anode ; on a donc dans ce cas  $I_a = 0$ .

**Q12.** On déduit de ce qui précède l'allure du tracé (en traits pleins) :



**Q13.**  $U_{ac}^0 = \left(\frac{I_a^0}{\beta}\right)^{2/3} = 3,1 \text{ V}$ .

## II — Caractéristiques dynamiques de la diode

**Q14.** On a établi  $V(r) = \alpha r^{2/3}$  donc  $v(r) = \sqrt{\frac{2e}{m_e}} \sqrt{\alpha} r^{1/3} = \frac{dr}{dt}$  qui s'intègre en  $\frac{2}{3} \sqrt{\frac{2e\alpha}{m_e}} \tau = r_2^{2/3} - r_1^{2/3}$  soit aussi

$$\tau = \frac{U_{ac}}{\alpha} \frac{3}{2} \sqrt{\frac{m_e}{2e\alpha}} \text{ ou après simplification } \tau = \frac{U_{ac}}{I_a} \frac{4\pi\epsilon_0 H}{3} = 4,3 \text{ ns}.$$

La fréquence de coupure associée correspond à un changement de mode (passante / bloquée) pendant le vol d'un électron soit  $f_c \sim \frac{1}{\tau} \sim 200 \text{ kHz}$ .

**Q15.** L'équation  $U_{ac} = \left(\frac{I_a}{\beta}\right)^{2/3}$  se dérive en  $\delta u = \frac{2}{3\beta^{2/3}} I_a^{-1/3} \delta i$  donc  $r_d = \frac{2}{3(\beta^2 I_a)^{1/3}} = 3,6 \text{ k}\Omega$ .

## III — Polarisation de la diode

**Q16.** Il s'agit évidemment de  $U_{ac} = V_{cc} - R_a I_a$ .

**Q17.**  $R_a = \frac{V_{cc} - U_{ac}^0}{I_a^0} = 5,75 \text{ k}\Omega$ .

**Q18.** Le tracé (en pointillés) de la droite de charge est ajouté au tracé de la caractéristique ci-dessus. La pente de la caractéristique est l'inverse de la résistance dynamique  $r_d$ .

## B — Température des éléments de la triode et émission thermoïonique

### I — Température du filament

Q19.  $R_f = \frac{L}{\gamma\pi r_f^2} = 3,6 \cdot 10^{-2} \Omega$  donc  $P_{el} = \frac{U_f^2}{R_f} = 63 \text{ W}$ .

Q20. Le transfert par conduction exige un contact entre le filament et d'autres éléments conducteurs ; ce contact n'a lieu qu'aux extrémités du filament et on le néglige dans la suite.

Le transfert par convection se fait au moyen d'un fluide intermédiaire qui doit circuler entre le filament et un autre point. Ici le seul fluide présent est l'air, mauvais caloporteur, et nous négligerons aussi le phénomène convectif.

Finalement, le filament se refroidit par rayonnement, c'est-à-dire par émission d'ondes électromagnétiques par le filament.

Q21. La grandeur  $\phi$ , qui s'exprime en watt par mètre carré, est la puissance surfacique émise (rayonnée) par unité d'aire latérale du filament.

Q22. La puissance reçue du fait de l'effet Joule est constante ; c'est la grandeur  $P_{el}$  déterminée précédemment. Pendant le même temps le filament rayonne la puissance  $P_{rad} = S\phi T^4$ , où  $S = 2\pi r_f L$  est l'aire de la surface latérale (cylindrique) du filament. Le bilan de ces deux effets se traduit par une variation de l'énergie interne  $U$  donc de la température  $T$  du filament, selon  $dU = C dT$  où  $C = \mu_w \pi r_f^2 H c$ . Finalement,  $dU = (P_{el} - P_{rad})dt$  soit aussi

$$\frac{r_f \mu_w c}{2\sigma} \frac{dT}{dt} = \frac{\gamma r_f U_f^2}{2L^2 \sigma} - T^4(t) \text{ après simplification.}$$

Q23. Cette expression s'écrit aussi  $\frac{r_f \mu_w c}{2\sigma} \frac{dT}{dt} = T_{eq}^4 - T^4(t)$  donc  $T(t) \rightarrow T_{eq}$  si  $t \rightarrow \infty$  avec  $T_{eq} = \left( \frac{\gamma r_f U_f^2}{2L^2 \sigma} \right)^{1/4}$  soit numériquement  $T_{eq} = 2170 \text{ K}$ .

Q24. On peut adimensionner l'équation différentielle en posant  $\theta = T/T_{eq}$  donc  $\frac{r_f \mu_w c}{2\sigma T_{eq}^3} \frac{d\theta}{dt} = 1 - \theta^4(t)$  qui s'écrit aussi

$\tau \frac{d\theta}{dt} = 1 - \theta^4$  avec pour durée caractéristique  $\tau = \frac{r_f \mu_w c}{2\sigma T_{eq}^3} = 0,4 \text{ s}$  : le filament atteint presque immédiatement sa température d'équilibre.

Q25. La longueur d'onde du maximum d'émission est donnée par la loi de Wien,  $\lambda_{max} = 1,33 \mu\text{m}$  : le maximum d'émission est dans l'infrarouge donc le finalement paraîtra rouge.

### II — Température de la cathode et émission thermoïonique

Q26. Le phénomène d'émission thermoïonique est lié à l'état quantique des électrons dans le métal de la cathode, donc à la constante de Planck  $h$ .

Q27. Dans le système international d'unités, en notant  $L, M, T, I$  et  $\vartheta$  les unités de longueur, masse, durée, courant en température, on sait que  $[j] = I \cdot L^{-2}$  car  $i = \int j dS$ ,  $[m] = M$ ,  $[e] = I \cdot T$  car  $i = \frac{dq}{dt}$ ,  $[k_B] = M \cdot L^2 \cdot T^{-2} \cdot \vartheta^{-1}$

car  $k_B T$  est une énergie, qui a même dimension que l'énergie cinétique  $\frac{1}{2}mv^2$ , et enfin  $[h] = M \cdot L^2 \cdot T^{-1}$  puisque  $h\nu$  est une énergie si  $\nu$  est une fréquence. Finalement, on cherche  $A$  sous la forme  $A = 4\pi m^a e^b k_B^c h^d$  donc  $I \cdot L^{-2} \cdot \vartheta^{-2} = M^a \times I^b \cdot T^b \times M^c \cdot L^{2c} \cdot T^{-2c} \cdot \vartheta^{-c} \times M^d \cdot L^{2d} \cdot T^{-d}$ , d'où le système d'équations  $0 = a + c + d$ ,  $-2 = 2c + 2d$ ,  $0 = b - 2c - d$  et  $-2 = -c$ . On en déduit successivement  $c = 2$ ,  $c + d = -1$  donc  $d = -3$ ,  $b = 2c + d = 1$

et enfin  $a = -c - d = 1$  et  $A = 4\pi \frac{m e k_B^2}{h^3} = 1,20 \cdot 10^6 \text{ A} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-2}$ .

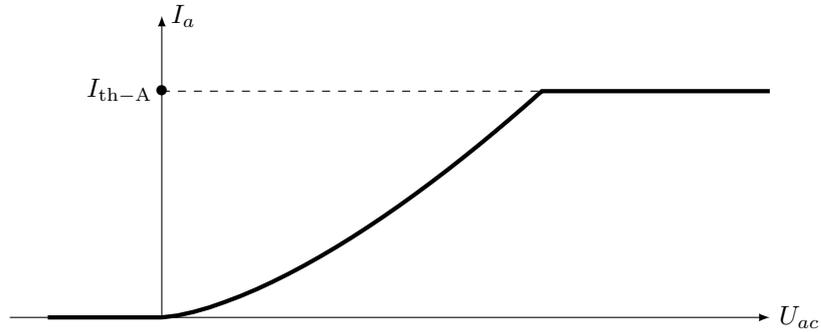
Q28. L'équilibre entre la puissance émise par le filament vers la cathode  $P_{el}$  et le refroidissement de cette-ci par rayonnement par sa surface latérale (sur deux faces, intérieure et extérieure) fournit  $P_{el} = 4\pi r_1 H \sigma T_c^4$  d'où sa

température  $T_c = \left( \frac{P_{el}}{4\pi r_1 H} \right)^{1/4} = 995 \text{ K}$  (ou  $722^\circ\text{C}$ ).

Q29. Les courants demandés sont  $I_{th-F} = 2\pi r_1 H j_F$  et  $I_{th-A} = 2\pi r_1 H j_A$  avec des courants volumiques donnés par la loi de Richardson,  $j_F = AT_c^2 \exp\left(-\frac{W_F}{k_B T_c}\right)$  et  $j_A = AT_c^2 \exp\left(-\frac{W_A}{k_B T_c}\right)$  où  $W_F = W_{Ni}$  et  $W_A = W_{BaO}$ . Il

vient  $I_{th-F} = 7,6 \cdot 10^{-11} \text{ A}$  négligeable comme on pouvait le souhaiter et  $I_{th-A} = 51 \text{ mA}$ , valeur nettement plus élevée que l'idéal, et qui ne peut être atteinte avec ce générateur. Une partie des électrons ne fait donc pas le parcours total jusqu'à l'anode.

**Q30.** Le courant calculé ci-dessus est une limite qui ne peut être dépassée; elle impose donc de reprendre le tracé de la caractéristique avec une saturation :



## C — Amplificateur de tension à triode

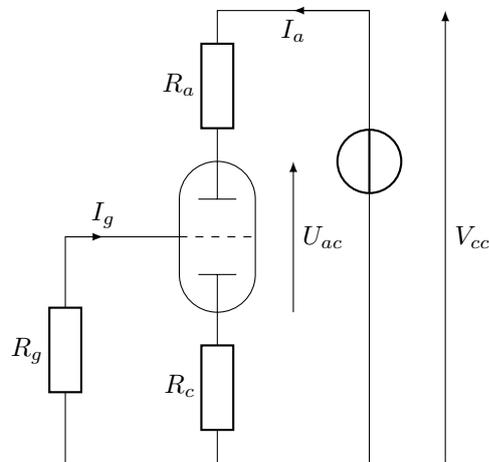
### I — Montage amplificateur de tension à triode et principe d'analyse

**Q31.** C'est la présence de la triode, élément **non linéaire**, qui empêche l'application du théorème de superposition.

**Q32.** C'est  $V_{cc} \gg \max(|v_e|)$  qui permet ce traitement perturbatif.

### II — Étape 1

**Q33.** De  $i = \frac{dq}{dt}$  on déduit en régime permanent  $i = 0$  dans un condensateur : il est alors équivalent à un **circuit ouvert** d'où le schéma :



**Q34.** La géométrie de la grille ne permet de capter qu'une faible partie des électrons émis par la cathode chauffée; on va donc négliger le courant de grille dans tout ce qui suit.

**Q35.** Puisque  $I_g = 0$ ,  $U_{gc} = \frac{1}{\mu} \left[ \left( \frac{I_a}{\beta'} \right)^{2/3} - U_{ac} \right]$  donc  $U_{gc}^0 = -2 \text{ V}$ . On a aussi  $I_c = I_a$  donc  $V_{cc} - U_{ac} = (R_a + R_c)I_a$  soit  $R_a + R_c = 83,3 \text{ k}\Omega$  tandis que, dans la maille de gauche à courant  $I_g$  nul,  $R_c I_a + U_{gc} = 0$  et  $R_c = -\frac{U_{gc}}{I_a} = 1,67 \text{ k}\Omega$  et finalement  $R_a = 81,6 \text{ k}\Omega$ .  $R_g$  n'intervient pas puisque  $I_g$  est négligeable.

**Q36.** Finalement  $V_s = V_{cc} - R_a I_a$  donc  $V_s^0 = 252 \text{ V}$ .

## III — Étape 2

**Q37.** La fréquence du signal variable est de l'ordre de 1 kHz soit  $f \ll f_c$  où la fréquence de coupure liée aux temps de vol a été estimée plus haut à  $f_c = 200$  kHz. Le comportement de la diode à la fréquence  $f$  est donc quasi-statique.

**Q38.** On propose un développement de la relation  $I_a = \beta' (\mu U_{gc} + U_{ac})^{3/2}$  en notant  $I_a = I_a^0 + i_a$ ,  $U_{gc} = U_{gc}^0 = u_{gc}$  et  $U_{ac} = U_{ac}^0 = u_{ac}$ . au premier ordre ce développement prend la forme  $i_a = u_{gc} \frac{\partial I_a}{\partial U_{gc}} + u_{ac} \frac{\partial I_a}{\partial U_{ac}}$  donc

$$g_m = \left( \frac{\partial I_a}{\partial U_{gc}} \right)_0 = \frac{3}{2} \beta' \mu (\mu U_{gc}^0 + U_{ac}^0)^{1/2} \text{ qu'on écrira } g_m = \frac{3\beta' \mu}{2} \left( \frac{I_a^0}{\beta''} \right)^{1/3} \text{ ou } g_m = \frac{3\mu}{2} \beta'^{2/3} I_a^0{}^{1/3}. \text{ Un calcul presque identique montre que } \frac{1}{r_a} = \frac{3}{2} \beta'^{2/3} I_a^0{}^{1/3}.$$

**Q39.**  $g_m r_a = \mu \gg 1$ ; ceci signifie que l'influence de  $u_g$  (proportionnelle à la conductance  $g_m$ ) est beaucoup plus importante que celle de  $u_a$  (inversement proportionnelle à la résistance  $r_a$ ), conformément à ce qui est indiqué dans l'énoncé.

**Q40.**  $g_m = 3,5 \text{ mS}$  et  $r_a = 28 \text{ k}\Omega$ .

## IV — Étape 3

**Q41.**  $v_s = u_{ac}$  dépend de  $u_{gc} = v_e$  et de  $i_a = -\frac{v_s}{R_a}$  selon  $-\frac{v_s}{R_a} = \frac{v_s}{r_a} + g_m v_e$ ; finalement  $v_s = A_V v_e$  où le gain en tension est  $A_V = -\frac{g_m r_a R_a}{r_a + R_a}$ . Il est négatif (amplificateur inverseur, comme tant d'autres) et vaut  $A_V = -73$  soit aussi  $20 \log_{10} |A_V| = +37 \text{ dB}$ .

**Q42.** En l'absence de courant de grille,  $u_{gc}$  forme un diviseur de tension,  $u_{gc} = \frac{R_g}{R_g + r_e} v_e$ . Les relations précédentes sont inchangées si  $R_g \gg r_e$ .

## V — Distorsion harmonique de l'amplificateur

**Q43.** Il s'agit du second ordre du développement,  $\xi = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 I_a}{\partial U_{gc}^2} \right) = \frac{3}{8} \beta' \mu^2 (\mu U_{gc} + U_{ac})^{-1/2}$  soit  $\xi = \frac{3}{8} \beta' \mu^2 \left( \frac{I_a}{\beta'} \right)^{-1/3}$  qu'on écrit donc  $\xi = \frac{3\mu^2 \beta'^{4/3}}{8 I_a^{1/3}}$  donc numériquement  $\xi = 1,7 \cdot 10^{-3} \text{ A} \cdot \text{V}^{-2}$ .

**Q44.** Les relations  $i_a = -\frac{v_s}{R_a}$ ,  $v_s = u_{ac}$  et  $v_e = u_{gc}$  restent vérifiées donc  $u_s(t) = -\frac{r_a R_a}{r_a + R_a} (g_m v_e(t) + \xi v_e^2(t))$ .

**Q45.** Recopiant  $\sin^2(\omega t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2\omega t)$ , le signal  $v_s(t)$  comporte trois composantes spectrales; l'une est continue,  $v_{s0} = -\frac{r_a R_a}{r_a + R_a} \frac{\xi}{2} U^2$ ; la suivante est la composante « ordinaire », de même pulsation que le signal d'entrée,  $v_{s1}(t) = -\frac{r_a R_a}{r_a + R_a} g_m U \sin(\omega t)$  et enfin la dernière  $v_{s2}(t) = \frac{r_a R_a}{r_a + R_a} \frac{\xi}{2} U^2 \cos(2\omega t)$  est de pulsation  $2\omega$ .

**Q46.**  $DH_2$  est le rapport des deux amplitudes des termes de pulsations  $2\omega$  et  $\omega$  donc  $DH_2 = \frac{\xi U}{2g_m}$ . Numériquement on trouve respectivement  $DH_2 = 2,5\%$  pour  $U = 0,1 \text{ V}$ ,  $DH_2 = 5,0\%$  pour  $U = 0,2 \text{ V}$  et  $DH_2 = 7,4\%$  pour  $U = 0,3 \text{ V}$ . On atteint ici les limites de l'amplificateur, qui déforme trop le signal s'il dépasse une centaine de millivolt.