

A2025 – PHYSIQUE II MPI



ÉCOLE NATIONALE DES PONTS et CHAUSSEES,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.

Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).

CONCOURS 2025

DEUXIÈME ÉPREUVE DE PHYSIQUE

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice ou de tout dispositif électronique est interdit.

*Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente
sur la première page de la copie :*

PHYSIQUE II - MPI

L'énoncé de cette épreuve comporte 8 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Les sujets sont la propriété du GIP C'UMP. Ils sont publiés sous les termes de la licence Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 3.0 France.

Tout autre usage est soumis à une autorisation préalable du Concours commun Mines Ponts.

**Tournez la page S.V.P.**

Physique et chimie automobiles

Ce sujet aborde les principes de base du fonctionnement de certains éléments liés à la circulation d'une automobile, comme la batterie d'accumulateurs électriques (partie I), le moteur thermique (cas d'un moteur à essence, partie II) ou enfin le principe de la mesure de vitesse par les autorités de contrôle (partie III).

Ces trois parties sont totalement indépendantes entre elles. Les données numériques et valeurs des constantes physiques nécessaires sont regroupées en fin d'énoncé.

Pour les applications numériques demandées on se contentera de 2 chiffres significatifs.

Dans la partie III, outre $i^2 = -1$ on repère les scalaires complexes par une barre : $\bar{T} \in \mathbb{C}$.

I Batterie d'accumulateurs au plomb

Une batterie au plomb est constituée d'un certain nombre d'éléments accumulateurs logés dans un bac en plastique fermé par un couvercle scellé (figure 1). Chacun de ces accumulateurs est composé d'une électrode positive et d'une électrode négative, baignant toutes deux dans la même solution aqueuse d'acide sulfurique H_2SO_4 (à la concentration c) et de sulfate de plomb II (Pb^{2+} , SO_4^{2-}) (à la concentration c'). Les électrodes sont formées d'une grille (chimiquement inerte mais conduisant l'électricité) dont les alvéoles sont remplies d'une pâte poreuse ; cette pâte est formée de peroxyde de plomb PbO_2 pour une des électrodes et de plomb métallique Pb pour l'autre. Les espèces en solution dans l'eau sont donc seulement H^+ (qu'on pourra choisir de noter H_3O^+), Pb^{2+} et les ions HSO_4^- issus de l'acide sulfurique et SO_4^{2-} ; Pb et PbO_2 sont des solides.



FIGURE 1 – Une batterie 12 V, 65 A·h fabriquée au Royaume-Uni par Yuasa©

- – 1. Laquelle des deux électrodes est l'électrode positive ?

Justifier et préciser, pour chacune des deux électrodes, l'équation-bilan de la réaction à l'électrode en fonctionnement spontané (c'est-à-dire en régime de décharge de la batterie).

- – 2. Établir l'expression de la force électro-motrice E d'un tel accumulateur (à 25°C) en fonction des données et des seules concentrations $[\text{H}^+]$ (ou bien $[\text{H}_3\text{O}^+]$) et $[\text{Pb}^{2+}]$.

Supposant pour une batterie la concentration de sulfate de plomb II $c' = [\text{Pb}^{2+}] = 1,0 \text{ mol/L}$, calculer le pH de la solution nécessaire pour obtenir $E = 1,9 \text{ V}$; commenter.

En toute rigueur l'étude de l'accumulateur devrait être complétée à cause de la formation d'un précipité solide de sulfate de plomb PbSO_4 selon le bilan $\text{Pb}^{2+} + \text{SO}_4^{2-} = \text{PbSO}_4$. La prise en compte de cette réaction se traduit par une modification de la force électromotrice E des accumulateurs au plomb par rapport au calcul précédent, qui devient de l'ordre de $2,0 \text{ V}$. À part cette modification numérique nous ne tiendrons pas compte du précipité de sulfate de plomb dans ce qui suit.

Les batteries d'accumulateurs automobiles ont une force électromotrice E_t de l'ordre de 12 V ; la batterie étudiée ici est caractérisée par sa *capacité* $Q_t = 65 \text{ A}\cdot\text{h}$ (on rappelle que la capacité électrique d'une pile est la valeur de la charge électrique qui la traverse avant que la réaction électrochimique de décharge s'arrête).

- – 3. Combien d'accumulateurs faut-il associer pour réaliser une batterie automobile ?

Représenter cette association sur un schéma.

Quelle est la capacité Q de chacun des accumulateurs ?

En déduire les quantités de matière totales n_{Pb} et n_{PbO_2} contenues dans les grilles de l'ensemble des électrodes contenues dans la batterie au complet (on admettra que ces espèces Pb et PbO₂ sont les seuls réactifs limitants).

Obtenir une valeur imposée du pH impose de pouvoir contrôler la concentration molaire volumique c (ou, ce qui revient au même, la concentration massique c_m) de l'acide sulfurique dans l'accumulateur. On mesure en pratique cette concentration au moyen d'un *pèse-acide*, dispositif qui évalue la masse volumique ρ_{sol} de la solution ou bien sa densité relativement à l'eau pure $d = \rho_{\text{sol}}/\rho_0$. Celle-ci dépend en effet simplement de la concentration totale c en formes sulfatées, $d = a + b \cdot c$ avec $c = [\text{H}_2\text{SO}_4] + [\text{HSO}_4^-] + [\text{SO}_4^{2-}]$, a et b étant des constantes.

- – 4. Déduire des données les valeurs numériques de a et b .

D'après un site technique automobile, la densité de l'électrolyte d'une batterie scellée en bon état doit être de l'ordre de 1,3. En déduire c et commenter.

Dans une solution aqueuse contenant de l'acide sulfurique à la concentration molaire volumique c , on note $x_1 = [\text{H}_2\text{SO}_4]/c$, $x_2 = [\text{HSO}_4^-]/c$ et $x_3 = [\text{SO}_4^{2-}]/c$ et les tracés de $x_1(\text{pH})$, $x_2(\text{pH})$ et $x_3(\text{pH})$ porte le nom de *courbes de prédominance*. Ces courbes sont tracées sur la figure 2.

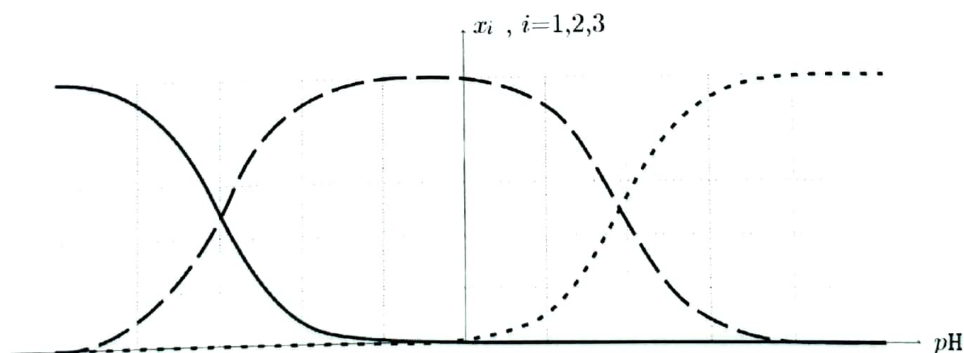


FIGURE 2 – Diagramme de prédominance pour l'acide sulfurique

- – 5. Donner les expressions des constantes d'acidité K_{a1} et K_{a2} .

Reproduire rapidement sur votre copie ce diagramme, complété par l'identification des trois courbes et préciser en les justifiant les graduations des axes horizontal et vertical.

- – 6. Déterminer les valeurs de c et c_m dans un accumulateur au plomb à usage automobile ; proposer un commentaire des valeurs numériques obtenues.

Les courbes de la figure 2 ont été tracées au moyen d'un script **Python** utilisant une fonction dont l'en tête est `def Pred(pH)` : qui, pour une valeur donnée du pH, donne pour résultat le triplet (x_1, x_2, x_3) .

- – 7. Déduire des expressions de K_{a1} et K_{a2} celles des x_i et proposer le code **Python** de la fonction `Pred`.

Tournez la page S.V.P.

II Un moteur à essence turbocompressé

Le moteur qui équipe les automobiles thermiques peut être décrit comme une machine ditherme à air (on néglige la quantité de carburant et les gaz brûlés devant l'air au niveau des pistons) fonctionnant de manière pseudo-cyclique (l'air rejeté par la ligne d'échappement n'est évidemment pas le même que celui qui est admis dans le filtre à air, mais il est en même quantité). On caractérise un tel moteur par les températures de la « source froide » T_f (en pratique c'est celle de l'air ambiant et on prendra $T_f = 27^\circ\text{C}$) et de la « source chaude » T_c (au moins égale à celle du point le plus chaud du cycle, après la combustion du carburant).

II.A Rendement du moteur

- – 8. Définir le rendement η d'un tel moteur thermique ditherme.

Énoncer et démontrer avec soin le théorème de CARNOT.

Certains véhicules sont mus par un moteur à essence à quatre temps ; le carburant utilisé est de l'Eurosuper 95 produisant, par combustion totale, une énergie $W_v = 3,6 \cdot 10^7 \text{ J} \cdot \text{L}^{-1}$ (joules produits par litre de carburant consommé). En circulant à la vitesse stabilisée $v = 100 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ sur route horizontale, le moteur du véhicule étudié ici développe la puissance $\mathcal{P} = 18 \text{ kW}$ (pour vaincre essentiellement les frottements aérodynamiques) et consomme une quantité q égale à 5,4 litres de carburant pour parcourir 100 km.

- – 9. Dédurre des données ci-dessus le rendement réel η_r du moteur.

Quelle inégalité concernant T_c peut-on déduire du théorème de CARNOT ?

Cette inégalité est-elle vérifiée en pratique, sachant que dans le moteur étudié la température est $T_c \simeq 2000 \text{ K}$?

II.B Thermodynamique des gaz

Une quantité donnée de gaz est caractérisé par ses fonctions d'état énergie interne U et enthalpie H et par leurs dérivées $C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V$ et $C_P = \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_P$ qui sont les capacités thermiques du gaz. On définit le rapport adiabatique $\gamma = C_P/C_V$; dans ce qui suit ce rapport γ est supposé constant.

- – 10. De quel(s) paramètre(s) thermodynamique(s) dépendent les fonctions U et H dans le cadre du modèle du gaz parfait ?

En déduire les expressions de C_P et C_V en fonction de la quantité de matière n , du rapport adiabatique γ et d'une constante fondamentale.

On admettra l'expression de l'entropie molaire $s_m(T, V)$ d'un gaz parfait de température T et de volume V :

$$s_m(T, V) = s_m(T_0, V_0) + \frac{R}{\gamma - 1} \ln \frac{T}{T_0} + R \ln \frac{V}{V_0} \quad (1)$$

- – 11. En déduire la relation de LAPLACE qui relie les variations de pression P et de volume V d'un gaz parfait évoluant de manière isentropique depuis un état initial (P_0, V_0) .

II.C Le cycle moteur à quatre temps

Le moteur à quatre temps a été décrit pour la première fois en 1862 par l'ingénieur ALPHONSE BEAU. Ce cycle est décrit par l'air (pris à l'extérieur à la pression atmosphérique p_0), assimilé à un gaz parfait diatomique, qui évolue entre un volume minimal V_1 et un volume maximal

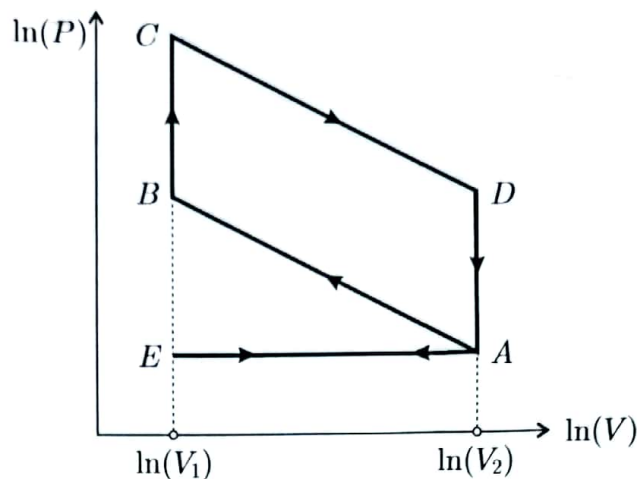


FIGURE 3 – Cycle moteur de Beau à quatre temps en échelle logarithmique

$V_2 = \alpha V_1$ avec le taux de compression $\alpha > 1$. Il est représenté sur la figure 3 en échelle doublement logarithmique dans le diagramme de CLAPEYRON.

Ce cycle comporte :

- Une phase d'admission EA de l'air extérieur dans les cylindres du moteur ;
- Une phase de **compression adiabatique** AB de l'air enfermé dans le piston (mélangé avec un peu d'essence) suivie de la combustion BC quasiment instantanée provoquée par une étincelle produite par le système électrique d'allumage ;
- Une phase motrice de **détente adiabatique** CD de l'air (et du combustible brûlé) jusqu'à l'ouverture en D des soupapes d'échappement avec chute brutale DA de la pression ;
- Une phase d'échappement AE évacuant les gaz brûlés avant la reprise du cycle.

Dans toute la suite de l'étude les phases d'échappement AE et d'admission EA ne jouent aucun rôle et on pourra donc les ignorer.

- – 12. On considère d'abord que toutes les évolutions au sein du cycle $ABCD AEA$ sont réversibles. Montrer que les transformations AB et CD sont décrites par deux droites parallèles et déterminer leur pente commune $p_{rv} < 0$.
- – 13. Reproduire sur votre copie le diagramme de la figure 3 en y ajoutant les isothermes de températures T_f (température minimale du cycle) et T_c (température maximale du cycle).
- – 14. Exprimer les transferts thermiques sur les phases AB , BC , CD et DA en fonction des températures T_A , T_B , T_C et T_D aux divers points du cycle.
En déduire l'expression η_{rv} du rendement du cycle moteur de la figure 3 en fonction des températures puis en déduire que $\eta_{rv} = 1 - \alpha^{1-\gamma}$.
- – 15. Pour le moteur étudié ici $\alpha = 9$ et on prendra pour l'air $\gamma = 1,4$. Calculer η_{rv} et commenter.
En réalité l'hypothèse de réversibilité des transformations adiabatiques AB et CD n'est pas réaliste ; pour s'approcher du rendement réel on la remplace par un modèle amélioré, toujours adiabatique mais non réversible, dans lequel le cycle devient $AB'C'D'A$, mais on suppose toujours que AB' et $C'D'$ sont des droites de pentes (négatives) respectives p'_{comp} et p'_{det} pour la compression AB' et la détente $D'A$.
- – 16. En application du second principe montrer que $p'_{comp} < p_{rv} < p'_{det}$.

Tournez la page S.V.P.

III Principe d'un cinémomètre radar

La plupart des dispositifs de mesure des vitesses v des véhicules sont basés sur l'effet DOPPLER : une onde électromagnétique est émise en direction du véhicule à contrôler. Le décalage de fréquence entre l'onde incidente et l'onde réfléchie est proportionnel à v/c (où c est la célérité de la lumière dans le vide) et, même si cet écart est faible, un dispositif électronique approprié permet de le mesurer.

III.A Transmission et réflexion d'une onde

Dans l'air, qui sera assimilé au vide, un émetteur E fixe dans le référentiel lié au sol émet une onde électromagnétique qui se propage en direction du véhicule dont on souhaite mesurer la vitesse v (figure 4). À la surface S d'abscisse z_S du véhicule (on supposera une surface plane et un véhicule métallique) le phénomène de réflexion engendre une onde transmise dans le métal et une onde réfléchie, qui sera ultérieurement mesurée par le récepteur R .

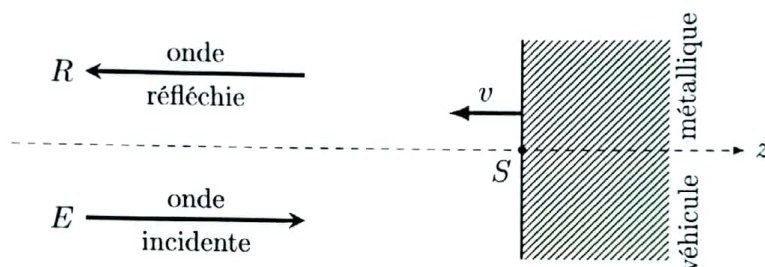


FIGURE 4 – Onde électromagnétique dirigée vers un véhicule en mouvement

Les représentations complexes de l'onde incidente (dans le vide $z < z_S$) et l'onde transmise (dans le métal $z > z_S$) seront respectivement cherchées sous les formes :

$$\vec{E}_{\text{inc}} = E_0 \exp[i(\omega t - kz)] \vec{e}_x \quad \vec{E}_{\text{tr}} = \bar{T} E_0 \exp[i(\omega t - \bar{k}z)] \vec{e}_x \quad (2)$$

où l'émetteur fixe les valeurs (supposées réelles positives) de E_0 et ω .

- – 17. Dans le vide, établir l'équation de propagation puis la relation de dispersion pour le champ $\vec{E}_{\text{inc}}$.

En déduire la relation liant la longueur d'onde dans le vide λ_0 et la fréquence f de l'onde.

Le métal étudié est de l'acier caractérisé par une densité volumique de charge nulle $\rho = 0$, le lien entre le champ électrique et la densité volumique de courant est donné par la relation

$$\gamma_0 \vec{E} = \vec{j} + \tau \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} \quad \text{où } \gamma_0 \simeq 1,4 \cdot 10^7 \text{ SI et } \tau = 1,0 \cdot 10^{-14} \text{ s.}$$

- – 18. Préciser la dimension de la grandeur γ_0 (on utilisera les notations L, M, T et I pour les dimensions des longueur, masse, durée et intensité de courant) et la signification physique de τ .

Établir la relation de dispersion donnant $\bar{k}^2$ en fonction de ω , c , μ_0 , γ_0 , τ et ω .

- – 19. On s'intéresse à la seule solution $\bar{k}$ de partie réelle positive; elle s'écrit $\bar{k} = \frac{2\pi}{\lambda} - \frac{i}{\delta}$ où $\lambda > 0$ et $\delta > 0$. Quelles sont les interprétations de ces deux grandeurs ?

- – 20. A quelles conditions (que l'on traduira par des inégalités faisant intervenir ω , c , μ_0 , γ_0 , τ et ω) correspondent les 3 régimes de fréquences que l'on peut lire sur la figure 5 ?

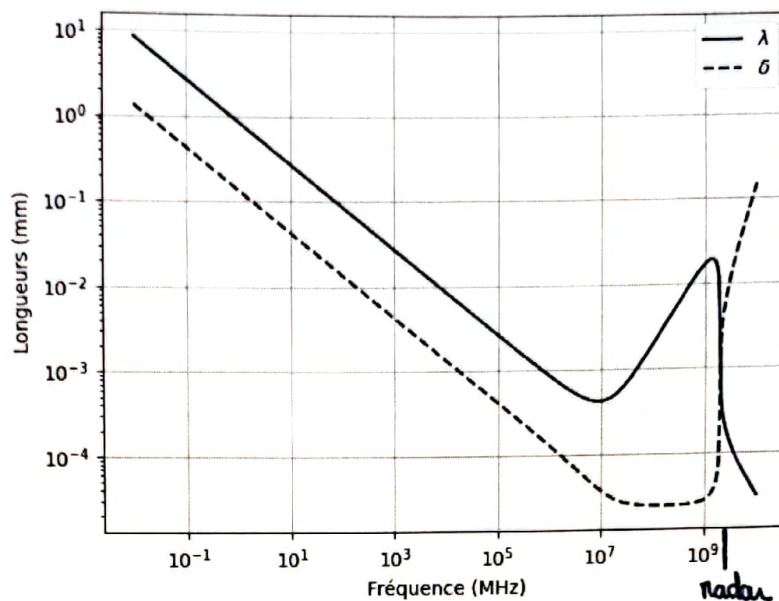


FIGURE 5 – Longueurs caractéristiques pour une onde dans un métal en échelle log-log

- – 21. Ici et dans toute la suite on se limitera au domaine radar ($f \sim 25$ GHz). Justifier par le calcul la forme limite des deux courbes ; préciser leur décalage. On notera ici $d = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma_0 \omega}}$. Peut-on dire que le matériau étudié est un métal parfait ? Est-il opaque ou transparent aux ondes radar ? Justifier, quantitativement, la réponse à ces deux questions.

III.B Réflexion métallique

On adopte maintenant une description simplifiée de la réflexion des ondes électromagnétiques sur la surface du véhicule : on admet l'absence totale d'onde transmise (ce qui, dans l'équation (2), correspond à $\bar{\tau} = 0$). On rappelle que dans cette situation la surface $z = z_S$ du métal porte éventuellement des charges $\sigma(t)$ et des courants $\vec{i}_s(t)$ surfaciques, donnés par les relations de passage entre des milieux I et II :

$$\vec{E}_{II} - \vec{E}_I = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{I \rightarrow II} \quad \vec{B}_{II} - \vec{B}_I = \mu_0 \vec{i}_s \wedge \vec{n}_{I \rightarrow II} \quad (3)$$

On se place d'abord dans le cas où le véhicule est immobile en $z_S = 0$ m. En plus de l'onde incidente décrite par l'équation (2), une onde réfléchie de même polarisation et de même fréquence se propage dans le vide en sens inverse.

- – 22. Montrer l'absence de charge surfacique sur le métal et expliciter complètement le champ électrique de l'onde réfléchie.

On considère maintenant que le véhicule est en $z_S = 0$ m à $t = 0$ s et se dirige à vitesse v vers l'émetteur de l'onde étudiée. Le plan de réflexion est donc $z_S = -vt$ et on cherche une onde réfléchie de la forme $\vec{E}_{\text{ref}} = E'_0 \exp[i(\omega't + k'z)] \vec{e}_x$.

- – 23. Quelles relations lient ω et k d'une part, ω' et k' d'autre part ? Exprimer E'_0 en fonction de E_0 puis ω' en fonction de ω , v et c .
- – 24. Montrer l'existence de courants surfaciques sur la face $z_S = -vt$ du véhicule et préciser à quelle pulsation ω_i ils oscillent.

Tournez la page S.V.P.

III.C Effet Doppler et mesure de vitesse

Compte tenu de la condition évidente $|v| \ll c$ les pulsations ω de l'onde incidente et ω' de l'onde réfléchie sont assez proches ; toutefois leur écart relatif $\Delta = \frac{|\omega' - \omega|}{\omega}$ peut être mesuré par un dispositif électronique adapté, disposé au niveau de l'émetteur fixe en $z = -\ell$, qui permet finalement de mesurer la vitesse du véhicule.

Un dispositif possible de mesure de Δ est ainsi constitué : un circuit multiplieur réalise en temps réel le produit d'un signal s proportionnel au champ électrique émis au point $z = -\ell$ et d'un signal s' proportionnel au champ électrique réfléchi reçu au même point. La sortie du multiplieur est reliée à un filtre de fréquence de coupure f_c ; enfin, un analyseur de spectre mesure la fréquence fondamentale f_1 du signal ainsi filtré (figure 6).

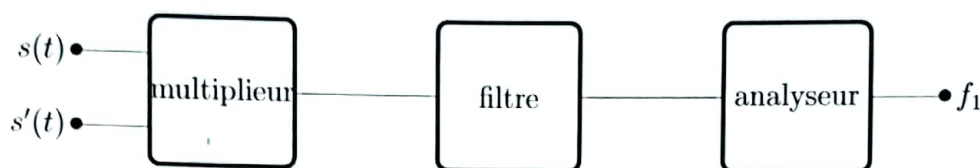


FIGURE 6 – Circuit de mesure de vitesse

- – 25. Exprimer Δ au premier ordre en v/c et proposer une application numérique raisonnable ; commenter.

Montrer que la fréquence f_1 est pratiquement proportionnelle à la vitesse v à mesurer, sous réserve d'un choix pertinent de la nature du filtre et de f_c , que l'on proposera.

Données numériques

Formule d'analyse vectorielle $\vec{\text{rot}} \vec{\text{rot}} \vec{V} = \vec{\text{grad}} \text{div} \vec{V} - \Delta \vec{V}$.

Relation trigonométrique $\cos \theta \cos \theta' = \frac{1}{2} [\cos(\theta + \theta') + \cos(\theta - \theta')]$.

$10^{1/3} = 2,2$; $10^{2/3} = 4,6$; $9^{1/5} = 1,6$; $9^{2/5} = 2,4$; $\log_{10}(2\pi) = 0,80$.

Facteurs de conversion, $P^\circ = 1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$; $0^\circ\text{C} = 273 \text{ K}$; $1 \text{ m}^3 = 10^3 \text{ L}$. Concentration de référence $C^\circ = 1 \text{ mol/L}$. Masse volumique de l'eau liquide pure $\rho_0 = 1,0 \text{ kg/L}$.

Constantes physiques :

Charge élémentaire	$e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
Célérité de la lumière dans le vide	$c = 3,0 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
Constante d'AVOGADRO	$\mathcal{N}_A = 6,0 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Constante de FARADAY	$\mathcal{F} = e\mathcal{N}_A = 9,6 \cdot 10^4 \text{ C} \cdot \text{mol}^{-1}$
Constante molaire des gaz parfaits	$R = 8,3 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$
Constante de NERNST à 25°C	$\frac{RT}{\mathcal{F}} \ln 10 = 0,059 \simeq 0,06 \text{ V}$
Permittivité électrique du vide	$\varepsilon_0 = 8,9 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$
Perméabilité magnétique du vide	$\mu_0 = 1,3 \cdot 10^{-6} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$

Quelques potentiels rédox standard à 25°C :

Couple oxydant/réducteur	$\text{Pb}^{2+} / \text{Pb}$	$\text{H}_2\text{O} / \text{H}_2$	$\text{O}_2 / \text{H}_2\text{O}$	$\text{PbO}_2 / \text{Pb}^{2+}$
Potentiel standard E° (V)	-0,13	0	1,23	1,69

L'acide sulfurique H_2SO_4 (masse molaire $\mathcal{M} = 98 \text{ g/mol}$; masse volumique de l'acide sulfurique liquide pur $\rho = 1,8 \text{ kg/L}$) est un diacide :

Couple acide/base	$\text{H}_2\text{SO}_4 / \text{HSO}_4^-$	$\text{HSO}_4^- / \text{SO}_4^{2-}$
Constante d'acidité K_A°	$pK_{a1} = -3,0$	$pK_{a2} = 1,9$