Corrigé - sujet Maths 1

Mines-Ponts 2025 - MP/MPI

Jules PIRONY - jules.pirony@orange.fr

16 mai 2025

Note destinée aux lecteur.ice.s : Si vous relevez une quelconque coquille dans ce corrigé, n'hésitez surtout pas à me contacter par mail pour me le faire savoir !

Sommaire

Inégalité de Hölder

1. Si $x = 0$ ou $y = 0$, l'inégalité est immédiate. Supposons que $x > 0$ et $y > 0$. On a par concavité du logarithme (puisque $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$) :

$$\ln\left(\frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}\right) \geq \frac{1}{p}\ln(x^p) + \frac{1}{q}\ln(y^q)$$

Alors, par croissance de l'exponentielle, on a :

$$\frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \geq \exp\left(\frac{1}{p}\ln(x^p) + \frac{1}{q}\ln(y^q)\right) = \exp\big(\ln(x) + \ln(y)\big) = \exp\big(\ln(xy)\big)$$

D'où :

$$\boxed{xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}}$$

2. Supposons que $\mathbb{E}[X^p] = \mathbb{E}[Y^q] = 1$. Alors, par le théorème de transfert, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[XY] &= \sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} xy\mathbb{P}(X = x, Y = y) \\
&= \sum_{x\in X(\Omega)} \sum_{y\in Y(\Omega)} xy\mathbb{P}(X = x, Y = y) \\
&= \sum_{x\in X(\Omega)} \sum_{y\in Y(\Omega)} xy\mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y) \qquad \text{(car } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes)} \\
&\leq \sum_{x\in X(\Omega)} \sum_{y\in Y(\Omega)} \left(\frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}\right)\mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y) \qquad \text{(par la question } \mathbf{1.}\text{)}
\end{aligned}$$

Or on a :

$$\begin{aligned}
&\sum_{x\in X(\Omega)} \sum_{y\in Y(\Omega)} \left(\frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}\right)\mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y) \\
&\qquad = \sum_{x\in X(\Omega)} \underbrace{\left(\sum_{y\in Y(\Omega)} \mathbb{P}(Y = y)\right)}_{=1} \frac{x^p}{p}\mathbb{P}(X = x) + \sum_{y\in Y(\Omega)} \underbrace{\left(\sum_{x\in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x)\right)}_{=1} \frac{y^q}{q}\mathbb{P}(Y = y) \\
&\qquad = \frac{1}{p}\sum_{x\in X(\Omega)} x^p\mathbb{P}(X = x) + \frac{1}{q}\sum_{y\in Y(\Omega)} y^q\mathbb{P}(Y = y) \\
&\qquad = \frac{1}{p}\mathbb{E}[X^p] + \frac{1}{q}\mathbb{E}[Y^q] \qquad \text{(par le théorème de transfert)} \\
&\qquad = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \\
&\qquad = 1
\end{aligned}$$

D'où finalement :

$$\mathbb{E}[XY] \leq 1 \tag{1}$$

Dans le cas général, si $X = 0$ ou $Y = 0$, l'inégalité est immédiate. Si $X \neq 0$ et $Y \neq 0$, alors on a :

$$\mathbb{E}[X^p] \neq 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{E}[Y^q] \neq 0$$

Posons :

$$X' := \frac{1}{\big(\mathbb{E}[X^p]\big)^{\frac{1}{p}}} X \qquad \text{et} \qquad Y' := \frac{1}{\big(\mathbb{E}[Y^q]\big)^{\frac{1}{q}}} Y$$

Ainsi on a
$$\mathbb{E}[X'^p] = \mathbb{E}[Y'^q] = 1$$
par linéarité de l'espérance. Donc, par l'équation (1), il vient :
$$\mathbb{E}[X'Y'] \leq 1$$
Or on a :
$$\mathbb{E}[X'Y'] = \frac{1}{\left(\mathbb{E}[X^p]\right)^{\frac{1}{p}}} \frac{1}{\left(\mathbb{E}[Y^q]\right)^{\frac{1}{q}}} \mathbb{E}[XY]$$
D'où :
$$\boxed{\mathbb{E}[XY] \leq \left(\mathbb{E}[X^p]\right)^{\frac{1}{p}} \left(\mathbb{E}[Y^q]\right)^{\frac{1}{q}}}$$

3. Dans les cas $p = 2, q = 2$, on retrouve $\boxed{\text{l'inégalité de Cauchy-Schwarz}}$ pour les variables aléatoires positives. Pour la démontrer de manière directe, considérons la fonction f définie par :
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) := \mathbb{E}\left[(X + tY)^2\right]$$
On a :
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) := \mathbb{E}\left[X^2 + 2tXY + t^2Y^2\right] = \mathbb{E}\left[X^2\right] + 2t\mathbb{E}[XY] + t^2\mathbb{E}\left[Y^2\right]$$
Donc f est polynomiale en t de degré 2 et positive sur $\mathbb{R}$. Donc son discriminant associé est négatif, i.e. :
$$4\left(\mathbb{E}[XY]\right)^2 - 4\mathbb{E}\left[X^2\right]\mathbb{E}\left[Y^2\right] \leq 0 \iff \left(\mathbb{E}[XY]\right)^2 \leq \mathbb{E}\left[X^2\right]\mathbb{E}\left[Y^2\right]$$
Donc, comme $\mathbb{E}[XY] \geq 0$ car $X, Y \geq 0$, on a :
$$\boxed{\mathbb{E}[XY] \leq \left(\mathbb{E}\left[X^2\right]\right)^{\frac{1}{2}} \left(\mathbb{E}\left[Y^2\right]\right)^{\frac{1}{2}}}$$

4. On a :
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \exp\left(\frac{t^2}{2}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n n!} t^{2n} \quad \text{et} \quad \text{ch}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} t^{2n}$$
Or on a :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n!\, 2^n \leq n! \underbrace{\prod_{k=n+1}^{2n} k}_{=1 \text{ si } n=0} = (2n)!$$
D'où :
$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{(2n)!} t^{2n} \leq \frac{1}{2^n n!} t^{2n}$$
Ainsi :
$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \quad \text{ch}(t) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)}$$

5. Puisque les $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont indépendantes et comme la fonction $x \longmapsto \exp(tc_i x)$ est continue pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, il en est de même pour les $\left(\exp(tc_iX_i)\right)_{1 \leq i \leq n}$. Donc on a :
$$\mathbb{E}\left[\exp\left(t \sum_{i=1}^n c_i X_i\right)\right] = \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^n \exp(tc_iX_i)\right] = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}\left[\exp(tc_iX_i)\right]$$
Or, par le théorème de transfert, on a pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$:
$$\mathbb{E}\left[\exp(tc_iX_i)\right] = e^{tc_i}\mathbb{P}(X_i = 1) + e^{-tc_i}\mathbb{P}(X_i = -1) = \frac{e^{tc_i}}{2} + \frac{e^{-tc_i}}{2} = \text{ch}(tc_i)$$
Donc par la question **4.**, on a pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$:
$$\mathbb{E}\left[\exp(tc_iX_i)\right] \leq \exp\left(\frac{t^2c_i^2}{2}\right)$$

Et d'où :

$$\prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[\exp(tc_iX_i)\right] \leq \prod_{i=1}^{n} \exp\left(\frac{t^2c_i^2}{2}\right) = \exp\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{t^2c_i^2}{2}\right)$$

Ainsi :

$$\boxed{\mathbb{E}\left[\exp\left(t\sum_{i=1}^{n} c_iX_i\right)\right] \leq \exp\left(\frac{t^2}{2}\sum_{i=1}^{n} c_i^2\right)}$$

6. Si $x = 0$, on a trivialement :

$$\mathbb{P}(1 > 1) = 0 \leq 2 = 1 \times 1$$

Si $x > 0$, on a :

$$\begin{aligned}
\exp\left(x\left|\sum_{i=1}^{n} c_iX_i\right|\right) > e^{tx} &\iff \left|\sum_{i=1}^{n} c_iX_i\right| > t \qquad (\text{car } x \neq 0)\\
&\iff \sum_{i=1}^{n} c_iX_i > t \quad \text{ou} \quad -\sum_{i=1}^{n} c_iX_i > t\\
&\iff \exp\left(x\sum_{i=1}^{n} c_iX_i\right) > e^{tx} \quad \text{ou} \quad \exp\left(-x\sum_{i=1}^{n} c_iX_i\right) > e^{tx}
\end{aligned}$$

i.e. :

$$\left\{\exp\left(x\left|\sum_{i=1}^{n} c_iX_i\right|\right) > e^{tx}\right\} = \left\{\exp\left(x\sum_{i=1}^{n} c_iX_i\right) > e^{tx}\right\} \cup \left\{\exp\left(-x\sum_{i=1}^{n} c_iX_i\right) > e^{tx}\right\}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\exp\left(x\left|\sum_{i=1}^{n} c_iX_i\right|\right) > e^{tx}\right) &\leq \mathbb{P}\left(\exp\left(x\sum_{i=1}^{n} c_iX_i\right) > e^{tx}\right) + \mathbb{P}\left(\exp\left(-x\sum_{i=1}^{n} c_iX_i\right) > e^{tx}\right)\\
&\leq \mathbb{P}\left(\exp\left(x\sum_{i=1}^{n} c_iX_i\right) \geq e^{tx}\right) + \mathbb{P}\left(\exp\left(-x\sum_{i=1}^{n} c_iX_i\right) \geq e^{tx}\right)
\end{aligned}$$

Or, par l'inégalité de Markov, on a :

$$\mathbb{P}\left(\exp\left(x\sum_{i=1}^{n} c_iX_i\right) \geq e^{tx}\right) \leq e^{-tx}\mathbb{E}\left[\exp\left(t\sum_{i=1}^{n} c_iX_i\right)\right]$$

Et

$$\mathbb{P}\left(\exp\left(-x\sum_{i=1}^{n} c_iX_i\right) \geq e^{tx}\right) \leq e^{-tx}\mathbb{E}\left[\exp\left(-t\sum_{i=1}^{n} c_iX_i\right)\right]$$

Mais, par la question **5.**, on a :

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(t\sum_{i=1}^{n} c_iX_i\right)\right] \leq \exp\left(\frac{t^2}{2}\sum_{i=1}^{n} c_i^2\right)$$

Et :

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(-t\sum_{i=1}^{n} c_iX_i\right)\right] = \mathbb{E}\left[\exp\left(t\sum_{i=1}^{n} (-c_i)X_i\right)\right] \leq \exp\left(\frac{t^2}{2}\sum_{i=1}^{n} c_i^2\right)$$

Finalement, on a :

$$\boxed{\mathbb{P}\left(\exp\left(x\left|\sum_{i=1}^{n} c_iX_i\right|\right) > e^{tx}\right) \leq 2e^{-tx}\exp\left(\frac{x^2}{2}\sum_{i=1}^{n} c_i^2\right)}$$

7. Comme $(c_1, \ldots, c_n) \neq 0$, on a $\sum\limits_{i=1}^{n} c_i^2 > 0$. Posons :

$$c := \sum_{i=1}^{n} c_i^2 \qquad \text{et} \qquad x := \frac{t}{c} \geq 0$$

Si $t = 0$, l'inégalité est immédiate. Si $t > 0$, on a $x > 0$ et donc :

$$\exp\left(x\left|\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right|\right) > e^{tx} \iff \left|\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right| > t$$

D'où :

$$\mathbb{P}\left(\left|\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right| > t\right) = \mathbb{P}\left(\exp\left(x\left|\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right|\right) > e^{tx}\right)$$

Or, par la question **6.**, on a :

$$\mathbb{P}\left(\exp\left(x\left|\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right|\right) > e^{tx}\right) \leq 2e^{-tx}\exp\left(\frac{cx^2}{2}\right) = 2\exp\left(\frac{t^2}{2c} - \frac{t^2}{c}\right) = 2\exp\left(-\frac{t^2}{2c}\right)$$

Donc :

$$\boxed{\mathbb{P}\left(\left|\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right| > t\right) \leq 2\exp\left(-\frac{t^2}{2c}\right) \quad \text{où} \quad c = \sum_{i=1}^{n} c_i^2}$$

Inégalités de Khintchine

8. Puisque X est finie, F_X est à support borné. Donc, comme $p \geq 1$, la fonction $t \longmapsto t^{p-1}F_X(t)$ est bien définie sur $\mathbb{R}^*$, continue par morceaux et à support borné. Donc :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} t^{p-1}F_X(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{est finie, i.e. elle converge.}}$$

Comme $X(\Omega)$ est supposé fini, posons $X(\Omega) = \{t_1, \ldots, t_m\}$ avec $m \in \mathbb{N}^*$ et $t_1 < t_2 < \cdots < t_m$.

Si $m = 1$ alors l'inégalité est triviale (par le théorème de transfert) :

$$\mathbb{E}[X^p] = t_1^p = p\int_0^{t_1} t^{p-1}\,\mathrm{d}t = p\int_0^{+\infty} t^{p-1}F_X(t)\,\mathrm{d}t$$

Si $m \geq 2$, on a donc pour tout $i \in [\![1\,;m-1]\!]$:

$$\forall t \in [t_i\,;t_{i+1}[,\quad F_X(t) = \mathbb{P}(X > t) = \mathbb{P}(X > t_i) = \sum_{k=i+1}^{m} \mathbb{P}(X = t_k)$$

Ainsi que :

$$\forall t \in [0\,;t_1[,\quad F_X(t) = 1 = \sum_{k=1}^{m} \mathbb{P}(X = t_k) \qquad \text{et} \qquad \forall t \in [t_m\,;+\infty[,\quad F_X(t) = 0$$

On a donc, en posant $t_0 := 0$:

$$\begin{aligned}
p\int_0^{+\infty} t^{p-1}F_X(t)\,\mathrm{d}t &= p\int_{t_0}^{t_m} t^{p-1}F_X(t)\,\mathrm{d}t \\
&= p\sum_{i=0}^{m-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}} t^{p-1}F_X(t)\,\mathrm{d}t \\
&= p\sum_{i=0}^{m-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}} t^{p-1}\sum_{k=i+1}^{m}\mathbb{P}(X = t_k)\,\mathrm{d}t \\
&= p\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{k=i+1}^{m}\left(p\int_{t_i}^{t_{i+1}} t^{p-1}\,\mathrm{d}t\right)\mathbb{P}(X = t_k)
\end{aligned}$$

$$= \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{k=i+1}^{m} (t_{i+1}^p - t_i^p)\mathbb{P}(X = t_k)$$
$$= \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=0}^{k-1} (t_{i+1}^p - t_i^p)\mathbb{P}(X = t_k)$$
$$= \sum_{k=1}^{m} (t_k^p - t_0^p)\mathbb{P}(X = t_k)$$
$$= \sum_{k=1}^{m} t_k^p \mathbb{P}(X = t_k)$$

Ainsi, par le théorème de transfert, il vient que :

$$\boxed{\mathbb{E}[X^p] = p \int_0^{+\infty} t^{p-1} F_X(t)\,\mathrm{d}t}$$

Notation : Jusqu'à la fin de cette partie, on va systématiquement poser :

$$\boxed{Y := \left| \sum_{i=1}^{n} c_i X_i \right|}$$

9. La fonction $t \longmapsto t^3 \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)$ est continue positive sur $[0\,;+\infty[$. De plus, par croissance comparée, on a :

$$t^3 \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

Et par critère de Riemann, $t \longmapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1\,;+\infty[$. Donc $\boxed{t \longmapsto t^3 \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \text{ est intégrable sur } [0\,;+\infty[.}$

Puisque les $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ suivent toutes une loi de Rademacher, par construction Y est positive et finie. Donc, par la question **8.**, on a :

$$\mathbb{E}[Y] = 4 \int_0^{+\infty} t^3 F_Y(t)\,\mathrm{d}t$$

Or, comme $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} c_i^2 = 1$, par la question **7.**, on a :

$$F_Y(t) = \mathbb{P}\left(\left|\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right| > t\right) \leq 2\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)$$

D'où :

$$\boxed{\mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right)^4\right] \leq 8 \int_0^{+\infty} t^3 \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\mathrm{d}t}$$

10. On a :

$$Y^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} c_i^2 X_i^2 + 2 \sum_{1\leq i<j\leq n} c_i c_j X_i X_j$$

Comme les $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ sont indépendantes, on a donc :

$$\mathbb{E}\left[Y^2\right] = \sum_{i=1}^{n} c_i^2 \mathbb{E}\left[X_i^2\right] + 2 \sum_{1\leq i<j\leq n} c_i c_j \mathbb{E}[X_i]\mathbb{E}[X_j]$$

Les $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ suivant toutes une loi de Rademacher, on a pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$:

- par définition :

$$\mathbb{E}[X_i] = -\mathbb{P}(X=-1) + \mathbb{P}(X_i=1) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$$

- par le théorème de transfert :

$$\mathbb{E}\big[X_i^2\big] = (-1)^2\mathbb{P}(X=-1) + (1)^2 \cdot \mathbb{P}(X_i=1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

D'où :

$$\mathbb{E}\big[Y^2\big] = \sum_{i=1}^{n} c_i^2$$

i.e. :

$$\boxed{\mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right)^2\right] = \sum_{i=1}^{n} c_i^2}$$

11. Y étant finie positive, par la question **8.**, on a :

$$\mathbb{E}[Y^p] = p\int_0^{+\infty} t^{p-1}\mathbb{P}(Y>t)\,\mathrm{d}t$$

Supposons que $\sum_{i=1}^{n} c_i^2 = 1$. Alors on a par la question **7.** :

$$0 \leq \mathbb{E}[Y^p] \leq 2p\int_0^{+\infty} t^{p-1}\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\mathrm{d}t$$

Et d'où :

$$\big(\mathbb{E}[Y^p]\big)^{\frac{1}{p}} \leq \left(2p\int_0^{+\infty} t^{p-1}\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}$$

Posons :

$$\boxed{\beta_p := \left(2p\int_0^{+\infty} t^{p-1}\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}} > 0}$$

Remarque : En effectuant le changement de variable $t=\sqrt{2x}$, licite sur $\mathbb{R}^*$ (la fonction $x \longmapsto \sqrt{2x}$ est strictement croissante et $\mathcal{C}^1$-bijective de $\mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}^*$), on obtient que :

$$2p\int_0^{+\infty} t^{p-1}\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\mathrm{d}t = 2p\int_0^{+\infty} (2x)^{\frac{p-1}{2}}e^{-x}\frac{1}{\sqrt{2x}}\,\mathrm{d}x = 2p2^{\frac{p-2}{2}}\int_0^{+\infty} x^{\frac{p-2}{2}}e^{-x}\,\mathrm{d}x = p2^{\frac{p}{2}}\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)$$

On a alors :

$$\boxed{\beta_p := \sqrt{2}\left(p\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\right)^{\frac{1}{p}}}$$

On a donc :

$$\big(\mathbb{E}[Y^p]\big)^{\frac{1}{p}} \leq \beta_p \tag{2}$$

Dans le cas général, si $Y=0$, l'inégalité est immédiate. Si $Y \neq 0$, alors on a par la question **10.** :

$$\sum_{i=1}^{n} c_i^2 = \mathbb{E}\big[Y^2\big] \neq 0$$

Posons :

$$c := \sum_{i=1}^{n} c_i^2 \qquad \text{et} \qquad Y' := \left|\sum_{i=1}^{n} c_i' X_i\right| \quad \text{où} \quad \forall i \in [\![1\,;n]\!],\ c_i' = \frac{c_i}{\sqrt{c}}$$

Alors on a :

$$\sum_{i=1}^{n} c_i'^2 = \frac{1}{c}\sum_{i=1}^{n} c_i^2 = 1$$

Et donc, par l'équation (2), il vient :

$$\big(\mathbb{E}[Y'^p]\big)^{\frac{1}{p}} \leq \beta_p$$

Or, par la question **10.**, on a :

$$\big(\mathbb{E}[Y'^p]\big)^{\frac{1}{p}} = \frac{1}{\sqrt{c}}\big(\mathbb{E}[Y^p]\big)^{\frac{1}{p}} = \frac{1}{\big(\mathbb{E}[Y^2]\big)^{\frac{1}{2}}}\big(\mathbb{E}[Y^p]\big)^{\frac{1}{p}}$$

D'où finalement :

$$\big(\mathbb{E}[Y^p]\big)^{\frac{1}{p}} \leq \beta_p\big(\mathbb{E}\big[Y^2\big]\big)^{\frac{1}{2}}$$

i.e. :

$$\boxed{\left(\mathbb{E}\left[\left|\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right|^p\right]\right)^{\frac{1}{p}} \leq \beta_p\left(\mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right)^2\right]\right)^{\frac{1}{2}}}$$

12. Si $p = 2$, alors l'inégalité est immédiate. Si $p > 2$, on a :

$$\frac{p}{2} \geq 1 \quad \text{et} \quad \frac{p}{p-2} \geq 1 \qquad \text{ainsi que} \qquad \frac{1}{\frac{p}{2}} + \frac{1}{\frac{p}{p-2}} = \frac{2}{p} + \frac{p-2}{p} = 1$$

Posons :

$$Z := \mathbb{1}_{\mathrm{supp}(Y)} = \mathbb{1}_{\{Y \neq 0\}} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad Y \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad Y = 0 \end{cases}$$

Alors Y^2 et Z sont positives, et par la question **2.**, on a :

$$0 \leq \mathbb{E}\big[Y^2\big] = \mathbb{E}\big[Y^2 Z\big] \leq \left(\mathbb{E}\left[(Y^2)^{\frac{p}{2}}\right]\right)^{\frac{2}{p}}\underbrace{\left(\mathbb{E}\left[Z^{\frac{p}{p-2}}\right]\right)^{\frac{p-2}{p}}}_{=1} = \big(\mathbb{E}[Y^p]\big)^{\frac{2}{p}}$$

D'où :

$$\big(\mathbb{E}\big[Y^2\big]\big)^{\frac{1}{2}} \leq \big(\mathbb{E}[Y^p]\big)^{\frac{1}{p}}$$

i.e. :

$$\boxed{\left(\mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right)^2\right]\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\mathbb{E}\left[\left|\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right|^p\right]\right)^{\frac{1}{p}}}$$

13. On a :

$$\frac{1}{2} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{4} \iff \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{4}\right)\theta \iff 1 = \left(\frac{4}{p} - 1\right)\theta \iff \theta = \frac{p}{4-p}$$

Et $\frac{p}{4-p} \in \left[\frac{1}{3}\,;1\right[\subset]0\,;1[$. Donc il existe bien $\boxed{\theta \in]0\,;1[\text{ tel que } \frac{1}{2} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{4}.}$

14. Il vient donc que :

$$\frac{p}{2\theta} \geq 1 \quad \text{et} \quad \frac{2}{1-\theta} \geq 1 \qquad \text{ainsi que} \qquad \frac{1}{\frac{p}{2\theta}} + \frac{1}{\frac{2}{1-\theta}} = 2\left(\frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{4}\right) = 1$$

Comme $Y^{2\theta}$ et $Y^{2-2\theta}$ sont positives, on a par la question **2.** :

$$\mathbb{E}\big[Y^2\big] = \mathbb{E}\big[Y^{2\theta}Y^{2-2\theta}\big] \leq \left(\mathbb{E}\left[(Y^{2\theta})^{\frac{p}{2\theta}}\right]\right)^{\frac{2\theta}{p}}\left(\mathbb{E}\left[(Y^{2-2\theta})^{\frac{2}{1-\theta}}\right]\right)^{\frac{1-\theta}{2}} = \big(\mathbb{E}[Y^p]\big)^{\frac{2\theta}{p}}\big(\mathbb{E}\big[Y^4\big]\big)^{\frac{1-\theta}{2}}$$

i.e. :

$$\boxed{\mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right)^2\right] \leq \left(\mathbb{E}\left[\left|\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right|^p\right]\right)^{\frac{2\theta}{p}}\left(\mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right)^4\right]\right)^{\frac{1-\theta}{2}}}$$

15. Ainsi, par suite, on a :

$$\left(\mathbb{E}\left[Y^2\right]\right)^{\frac{1}{2\theta}} \leq \left(\mathbb{E}[Y^p]\right)^{\frac{1}{p}}\left(\mathbb{E}\left[\left(Y^4\right)\right]\right)^{\frac{1-\theta}{4\theta}}$$

Supposons que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} c_i^2 = 1$. Alors on a par la question **10.** :

$$\left(\mathbb{E}\left[Y^2\right]\right)^{\frac{1}{2\theta}} = 1 = \left(\mathbb{E}\left[Y^2\right]\right)^{\frac{1}{2}}$$

D'où :

$$\left(\mathbb{E}\left[Y^2\right]\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\mathbb{E}[Y^p]\right)^{\frac{1}{p}}\left(\mathbb{E}\left[\left(Y^4\right)\right]\right)^{\frac{1-\theta}{4\theta}}$$

Et par la question **9.**, il vient donc que :

$$\left(\mathbb{E}\left[Y^2\right]\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\mathbb{E}[Y^p]\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \underbrace{\left(8\int_0^{+\infty} t^3 \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\mathrm{d}t\right)^{\frac{1-\theta}{4\theta}}}_{>0}$$

D'où :

$$\left(8\int_0^{+\infty} t^3 \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\mathrm{d}t\right)^{\frac{\theta-1}{4\theta}} \cdot \left(\mathbb{E}\left[Y^2\right]\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\mathbb{E}[Y^p]\right)^{\frac{1}{p}}$$

Posons :

$$\boxed{\widetilde{\alpha}_p := \left(8\int_0^{+\infty} t^3 \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\mathrm{d}t\right)^{\frac{\theta-1}{4\theta}} > 0}$$

Remarque : En effectuant le changement de variable $t = \sqrt{2x}$, licite sur $\mathbb{R}^*$ (la fonction $x \longmapsto \sqrt{2x}$ est strictement croissante et $\mathcal{C}^1$-bijective de $\mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}^*$), on obtient que :

$$8\int_0^{+\infty} t^3 \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\mathrm{d}t = 8\int_0^{+\infty} (2x)^{\frac{3}{2}} e^{-x}\frac{1}{\sqrt{2x}}\,\mathrm{d}x = 16\int_0^{+\infty} xe^{-x}\,\mathrm{d}x = 16\Gamma(2) = 16$$

D'autre part, on a par la question **13.**

$$\frac{1-\theta}{4\theta} = \frac{1-\frac{p}{4-p}}{\frac{4p}{4-p}} = \frac{4-2p}{4p} = \frac{1}{p} - \frac{1}{2}$$

Donc :

$$\left(8\int_0^{+\infty} t^3 \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\mathrm{d}t\right)^{\frac{1-\theta}{4\theta}} = 16^{\frac{1-\theta}{4\theta}} = 16^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} = \frac{16^{\frac{1}{p}}}{4}$$

On alors :

$$\boxed{\widetilde{\alpha}_p := \frac{4}{16^{\frac{1}{p}}}}$$

On a donc :

$$\widetilde{\alpha}_p\left(\mathbb{E}\left[Y^2\right]\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\mathbb{E}[Y^p]\right)^{\frac{1}{p}} \tag{3}$$

Dans le cas général, si $Y = 0$, l'inégalité est immédiate. Si $Y \neq 0$, alors on a par la question **10.** :

$$\sum_{i=1}^{n} c_i^2 = \mathbb{E}\left[Y^2\right] \neq 0$$

Posons :

$$c := \sum_{i=1}^{n} c_i^2 \qquad \text{et} \qquad Y' := \left|\sum_{i=1}^{n} c_i' X_i\right| \quad \text{où} \quad \forall i \in [\![1\,;n]\!],\ c_i' = \frac{c_i}{\sqrt{c}}$$

Alors on a :

$$\sum_{i=1}^{n} c_i'^2 = \frac{1}{c}\sum_{i=1}^{n} c_i^2 = 1$$

Et donc, par l'équation (3), il vient :

$$\widetilde{\alpha}_p\big(\mathbb{E}\big[Y'^2\big]\big)^{\frac{1}{2}} \leq \big(\mathbb{E}[Y'^p]\big)^{\frac{1}{p}}$$

Or :

$$\big(\mathbb{E}\big[Y'^2\big]\big)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{c}}\big(\mathbb{E}\big[Y^2\big]\big)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{et} \qquad \big(\mathbb{E}[Y'^p]\big)^{\frac{1}{p}} = \frac{1}{\sqrt{c}}\big(\mathbb{E}[Y^p]\big)^{\frac{1}{p}}$$

D'où finalement :

$$\widetilde{\alpha}_p\big(\mathbb{E}\big[Y^2\big]\big)^{\frac{1}{2}} \leq \big(\mathbb{E}[Y^p]\big)^{\frac{1}{p}}$$

i.e. :

$$\boxed{\widetilde{\alpha}_p\left(\mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right)^2\right]\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\mathbb{E}\left[\left|\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right|^p\right]\right)^{\frac{1}{p}}}$$

16. Posons :

$$\alpha_p := \begin{cases} \widetilde{\alpha}_p & \text{si} \quad 1 \leq p < 2 \\ 1 & \text{si} \quad p \geq 2 \end{cases}$$

Alors $\alpha_p > 0$ et par les questions **12.** et **15.**, on obtient :

$$\alpha_p\big(\mathbb{E}\big[Y^2\big]\big)^{\frac{1}{2}} \leq \big(\mathbb{E}[Y^p]\big)^{\frac{1}{p}}$$

i.e. :

$$\boxed{\alpha_p\left(\mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right)^2\right]\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\mathbb{E}\left[\left|\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right|^p\right]\right)^{\frac{1}{p}}}$$

Remarque : On peut aussi poser :

$$\boxed{\alpha_p := \min\big(1, \widetilde{\alpha}_p\big)}$$

Bilan : On a donc montré que, pour $p \in [1\,;+\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^*$, il existe des réels $\alpha_p, \beta_p > 0$ tel que pour toute suite $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ de variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Rademacher et pour tout $(c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$\boxed{\alpha_p\left\|\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right\|_2 \leq \left\|\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right\|_p \leq \beta_p\left\|\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right\|_2}$$

Une première conséquence

17. Soient $X, Y, Z \in L^0(\Omega)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On a :

- φ est symétrique :

$$\varphi(X, Y) = \mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[YX] = \varphi(Y, X)$$

- φ est linéaire à gauche :

$$\varphi(\lambda X + \mu Y, Z) = \mathbb{E}\big[(\lambda X + \mu Y)Z\big] = \mathbb{E}[\lambda XZ + \mu YZ] = \lambda\mathbb{E}[XZ] + \mu\mathbb{E}[YZ] = \lambda\varphi(X, Z) + \mu\varphi(Y, Z)$$

  et à droite, puisque symétrique.

- φ est définie :
$$\varphi(X,X)=0 \iff \left(\mathbb{E}\left[X^2\right]\right)^{\frac{1}{2}}=0 \iff X=0 \qquad (\text{car } \|\cdot\|_2 \text{ est une norme})$$
- φ est positive :
$$\varphi(X,X)=\mathbb{E}\left[X^2\right]\geq 0$$

Donc φ est une forme bilinéaire symétrique définie positive, i.e. $\boxed{\varphi \text{ est un produit scalaire sur } L^0(\Omega).}$

18. Soit $u\in\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$. Donc il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que :
$$\forall n\geq N,\quad u_n=0$$
D'où :
$$\psi(u)=\sum_{i=0}^{+\infty}u_iX_i=\sum_{i=0}^{N}u_iX_i$$
Puisque pour tout $i\in[\![1\,;N]\!],\ X_i\in L^0(\Omega)$, on a :
$$\psi(u)=\sum_{i=0}^{N}u_iX_i\in L^0(\Omega)$$
Ainsi, on a bien $\boxed{\psi\left(\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}\right)\subseteq L^0(\Omega).}$

Soient $u,v\in\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$. Donc il existe $N_u\in\mathbb{N}$ et $N_v\in\mathbb{N}$ tels que :
$$\forall n\geq N_u,\ u_n=0 \qquad \text{et} \qquad \forall n\geq N_v,\ v_n=0$$
D'où :
$$\varphi\big(\psi(u),\psi(v)\big)=\mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{N_u}\sum_{j=0}^{N_v}u_iv_jX_iX_j\right]=\sum_{i=0}^{N_u}\sum_{j=0}^{N_v}u_iv_j\mathbb{E}[X_iX_j]$$
Or, les $(X_i)_{i\geq 0}$ sont indépendantes et suivent toutes une loi de Rademacher. Donc on a pour tout $(i,j)\in[\![1\,;N_u]\!]\times[\![1\,;N_v]\!]$:
$$i=j \implies \mathbb{E}[X_iX_j]=\mathbb{E}\left[X_i^2\right]=1 \qquad \text{et} \qquad i\neq j \implies \mathbb{E}[X_iX_j]=\mathbb{E}[X_i]\mathbb{E}[X_j]=0$$
Ainsi que :
$$\forall i,j>N:=\min\big(N_u,N_v\big),\quad u_i=0 \quad \text{ou} \quad v_i=0$$
Donc :
$$\sum_{i=0}^{N_u}\sum_{j=0}^{N_v}u_iv_j\mathbb{E}[X_iX_j]=\sum_{n=0}^{N}u_nv_n=\sum_{n=0}^{+\infty}u_nv_n$$
i.e. :
$$\varphi\big(\psi(u),\psi(v)\big)=\langle u\,,v\rangle$$
Donc $\boxed{\psi \text{ conserve le produit scalaire.}}$ C'est donc une isométrie.

19. Soient $p,q\geq 1$. Soit $X\in R=\psi\big(\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}\big)$. Alors il existe $u\in\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ telle que :
$$X=\psi(u)=\sum_{i=0}^{+\infty}u_iX_i$$
qui est une somme finie.

Donc, par les questions **11.** et **16.**, il existe respectivement $\alpha_p,\beta_p>0$ et $\alpha_q,\beta_q>0$ tels que :
$$\alpha_p\|X\|_2\leq\|X\|_p\leq\beta_p\|X\|_2 \qquad \text{et} \qquad \alpha_q\|X\|_2\leq\|X\|_q\leq\beta_q\|X\|_2$$
D'où :
$$\frac{\alpha_q}{\beta_p}\|X\|_p\leq\|X\|_q\leq\frac{\beta_q}{\alpha_p}\|X\|_p$$
Ainsi, $\boxed{\text{les normes } \|\cdot\|_p \text{ et } \|\cdot\|_q \text{ sont équivalentes sur } R.}$

Une deuxième conséquence

20. Posons :

$$X := \sum_{i=1}^{k} a_i X_i$$

On a :

$$\prod_{i=1}^{k} X_i(\Omega) = \{-1,1\}^k$$

Ainsi, par la formule de transfert, on a :

$$\|X\|_1 = \mathbb{E}\big[|X|\big] = \sum_{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k)\in\{-1,1\}^k} \left|\sum_{i=1}^{k} a_i\varepsilon_i\right| \mathbb{P}\big(X_1=\varepsilon_1,\ldots,X_n=\varepsilon_n\big)$$

Or les $(X_i)_{1\leq i\leq k}$ sont indépendantes. Donc :

$$\begin{aligned}
\|X\|_1 &= \sum_{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k)\in\{-1,1\}^k} \left|\sum_{i=1}^{k} a_i\varepsilon_i\right| \cdot \prod_{i=1}^{k}\mathbb{P}\big(X_i=\varepsilon_i\big) \\
&= \sum_{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k)\in\{-1,1\}^k} \left|\sum_{i=1}^{k} a_i\varepsilon_i\right| \frac{1}{2^k} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k)\in\{-1,1\}^k} \left|\sum_{i=1}^{k} a_i\varepsilon_i\right| \qquad (\text{car } n = 2^k)
\end{aligned}$$

D'autre part, on a par la question **10.** :

$$\|X\|_2 = \left(\mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{k} a_i X_i\right)^2\right]\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^{k} a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|(a_1,\cdots,a_k)\|_2^{\mathbb{R}^k} \tag{4}$$

Or par les questions **11.** et **16.**, il existe $\alpha_1, \beta_1 > 0$ tel que :

$$\alpha_1\|X\|_2 \leq \|X\|_1 \leq \beta_1\|X\|_2$$

D'où finalement :

$$\boxed{\alpha_1 n\|(a_1,\cdots,a_k)\|_2^{\mathbb{R}^k} \leq \sum_{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k)\in\{-1,1\}^k} \left|\sum_{i=1}^{k} a_i\varepsilon_i\right| \leq \beta_1 n\|(a_1,\cdots,a_k)\|_2^{\mathbb{R}^k}}$$

21. Remarquons que :

$$\#\{-1,1\} = 2^k = n$$

Fixons un ordre arbitraire de rangement des éléments de $\{-1,1\}^k$ et considérons l'application $T\colon \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^n$ définie par :

$$\forall (a_1,\cdots,a_k)\in\mathbb{R}^k,\quad T(a_1,\cdots,a_k) := \left(\sum_{i=1}^{k} a_i\varepsilon_i\right)_{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k)\in\{-1,1\}^k}$$

On a $T \in \mathcal{L}\big(\mathbb{R}^k,\mathbb{R}^n\big)$ car en dimension finie et par linéarité de la somme.
Posons alors :

$$\boxed{H := T\big(R^k\big)}$$

Soit $(a_1,\cdots,a_k)\in\mathrm{Ker}(T)$. Par la question **21.**, on a :

$$\alpha_1 n\|(a_1,\cdots,a_k)\|_2^{\mathbb{R}^k} \leq \sum_{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k)\in\{-1,1\}^k} \left|\sum_{i=1}^{k} a_i\varepsilon_i\right| = \|T(a_1,\cdots,a_k)\|_1^{\mathbb{R}^n} = 0$$

Donc, comme $\alpha_1 n > 0$, il vient que :

$$\|(a_1, \cdots, a_k)\|_2^{\mathbb{R}^k} = 0 \quad \text{et donc} \quad (a_1, \cdots, a_k) = 0_{\mathbb{R}^k}$$

Ainsi :

$$\mathrm{Ker}(T) = \left\{0_{\mathbb{R}^k}\right\}$$

Étant en dimension finie, il en découle que T est bijective de $\mathbb{R}^k$ dans $T\big(R^k\big) = H$. Donc $\boxed{\dim H = k.}$

Soit $x \in H$. Il existe donc $\alpha := (a_1, \cdots, a_k) \in \mathbb{R}^k$ tel que $x = T(a)$. Or dans la question **21.**, on a établi, par la question **10.**, l'équation (4) :

$$\|\alpha\|_2^{\mathbb{R}^k} = \|(a_1, \cdots, a_k)\|_2^{\mathbb{R}^k} = \left(\mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^k a_i X_i\right)^2\right]\right)^{\frac{1}{2}}$$

D'où, par le théorème de transfert et par indépendance des $(X_i)_{1\leq i\leq k}$:

$$\begin{aligned}
\|\alpha\|_2^{\mathbb{R}^k} &= \left(\sum_{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k)\in\{-1,1\}^k} \left(\sum_{i=1}^k a_i\varepsilon_i\right)^2 \mathbb{P}\big(X_1 = \varepsilon_1, \ldots, X_n = \varepsilon_n\big)\right)^2 \\
&= \left(\sum_{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k)\in\{-1,1\}^k} \left(\sum_{i=1}^k a_i\varepsilon_i\right)^2 \prod_{i=1}^k \mathbb{P}\big(X_i = \varepsilon_i\big)\right)^2 \\
&= \left(\sum_{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k)\in\{-1,1\}^k} \left(\sum_{i=1}^k a_i\varepsilon_i\right)^2 \frac{1}{2^k}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\sum_{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k)\in\{-1,1\}^k} \left(\sum_{i=1}^k a_i\varepsilon_i\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (\text{car } n = 2^k) \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}}\|T(a)\|_2^{\mathbb{R}^n} \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}}\|x\|_2^{\mathbb{R}^n}
\end{aligned}$$

Or, par la question **21.**, on a :

$$\alpha_1 n\|a\|_2^{\mathbb{R}^k} \leq \|T(a)\|_1^{\mathbb{R}^n} = \|x\|_1^{\mathbb{R}^n} \leq \beta_1 n\|a\|_2^{\mathbb{R}^k}$$

D'où finalement :

$$\boxed{\alpha_1\sqrt{n}\|x\|_2^{\mathbb{R}^n} \leq \|x\|_1^{\mathbb{R}^n} \leq \beta_1\sqrt{n}\|x\|_2^{\mathbb{R}^n}}$$