

Proposition de correction : MINES MP Maths 2 2025

Awatef Nasri

khaled.jebari@imt-atlantique.net

26 avril 2025

Attention : Il s'agit d'une proposition de corrigé rédigée de manière impulsive. Si vous repérez une erreur ou une imprécision, n'hésitez pas à me contacter par mail.

A. propriétés du polynôme p_0 et stabilité des racines

1)

On a :

$$p(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$$

Alors pour $x \in \mathbb{R}^*$:

$$\begin{aligned} x^n p\left(\frac{1}{x}\right) &= x^n \sum_{k=0}^n a_k x^{-k} \\ &= \sum_{k=0}^n a_k x^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n a_{n-k} x^k \\ &= p_0(x) \end{aligned}$$

par définition :

$$p(X) = a_n \prod_{i=1}^n (X - \alpha_i)$$

Alors :

$$\begin{aligned} p_0(X) &= X^n p\left(\frac{1}{X}\right) \\ &= a_n X^n \prod_{i=1}^n \left(\frac{1}{X} - \alpha_i\right) \\ &= a_n \prod_{i=1}^n \left(X \left(\frac{1}{X} - \alpha_i\right)\right) \\ &= a_n \prod_{i=1}^n (1 - \alpha_i X) \end{aligned}$$

2)

$\Rightarrow$ Supposons que $p \wedge p_0 = 1$, alors il existe $Q, S \in \mathbb{R}[X]$ tel que $pQ + Sp_0 = 1$

Supposons que p possède une racine stable α , alors $p(\alpha) = 0$ et $p_0(\alpha) = \alpha^n p(\alpha^{-1}) = 0$ donc $(pQ + Sp_0)(\alpha) = 0 \neq 1$ absurde d'où le résultat.

$\Leftarrow$ par contraposée : supposons que $p \wedge p_0 \neq 1$, alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}^*$ tel que $(X - \alpha)$ est un facteur commun entre p et p_0 , tel que $p(\alpha) = p_0(\alpha) = p(\alpha^{-1}) = 0$ d'où le résultat.

3)

On a :

$$\begin{aligned} p_0(X) &= a_n \prod_{j=1}^n (1 - \alpha_j X) \\ &= a_n \prod_{j=1}^n (\alpha_j^{-1} - X) \alpha_j \\ &= (-1)^n \prod_{j=1}^n \alpha_j \left[a_n \prod_{j=1}^n (X - \alpha_j^{-1}) \right] \end{aligned}$$

Comme les $(\alpha_j)_{1 \leq j \leq n}$ sont stables, alors

$$\prod_{j=1}^n \alpha_j = 1 \quad \text{et} \quad \{\alpha_j : 1 \leq j \leq n\} = \{\alpha_j^{-1} : 1 \leq j \leq n\}$$

Donc :

$$p_0(X) = (-1)^n p(X)$$

On déduit donc qu'il existe $\lambda \in \{-1, 1\}$ tel que :

$$p = \lambda p_0$$

4)On a d'après **3** :

$$p(X) = \lambda X^n p\left(\frac{1}{X}\right)$$

Alors, en dérivant, on aura :

$$p'(X) = \lambda n X^{n-1} p\left(\frac{1}{X}\right) + \lambda X^n \left(-\frac{1}{X^2}\right) p'\left(\frac{1}{X}\right)$$

En multipliant par X , on aura :

$$X p'(X) = \lambda n X^n p\left(\frac{1}{X}\right) - \lambda X^{n-1} p'\left(\frac{1}{X}\right)$$

Comme $\deg(p') = n - 1$, on déduit :

$$h = X p' = n p - \lambda (p')_0$$

On a :

$$\begin{aligned} h_0(X) &= X^n h\left(\frac{1}{X}\right) \\ &= n X^n p\left(\frac{1}{X}\right) - \lambda X^n (p')_0\left(\frac{1}{X}\right) \\ &= n p_0 - \lambda X p' \quad (\text{car } (p_0)_0 = p \quad \forall p) \\ &= \frac{n}{\lambda} p - \lambda X p' \\ &= \lambda n p - \lambda X p' \quad (\text{car } \lambda^2 = 1) \\ &= \lambda (n p - X p') \end{aligned}$$

5)

On a $\alpha_1 < \dots < \alpha_n$, les n racines distinctes de p (ils sont chacune de multiplicité 1)

D'après le théorème de Rolle, $\exists \gamma_1, \dots, \gamma_{n-1} \in \mathbb{R}$ tel que

$$\alpha_1 < \gamma_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_{n-1} < \gamma_{n-1} < \alpha_n$$

et

$$p'(\gamma_i) = 0 \quad \forall 1 \leq i \leq n-1 \quad \text{et} \quad \deg(p') = n-1$$

Donc p' est scindé sur $\mathbb{R}$

On a

$$h_0 = \lambda(np - Xp') = \lambda(np - h)$$

Alors

$$h_0 \wedge h = p \wedge h = p \wedge Xp' \quad \text{or d'après ce qui précède } p \wedge Xp' = 1 \Rightarrow h \wedge h_0 = 1$$

Supposons que p' admet une racine stable, alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}^*$ tel que

$$p'(\alpha) = (p')_0(\alpha) = 0$$

$$\text{On a } h(\alpha) = \alpha p'(\alpha) = 0 \quad \text{Or } h(\alpha) = np(\alpha) - \underbrace{\lambda(p')_0(\alpha)}_{=0} = 0 \Rightarrow p(\alpha) = 0$$

Alors

$$h_0(\alpha) = \lambda(np(\alpha) - \alpha p'(\alpha)) = 0$$

Donc

$$h_0(\alpha) = h(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha \text{ est une racine stable de } h$$

Ce qui contredit $h \wedge h_0 = 1$ à travers question 2. Donc p' n'admet pas de racine stable.
2ème Méthode (Tuz) : Montrons que :

$$p' \wedge (p')_0 = 1$$

On a :

$$\begin{aligned} p' \wedge (p')_0 &= p' \wedge (np - h) && (\text{car } h = np - \lambda(p')_0) \\ &= p' \wedge h_0 && (\text{car } h_0 = \lambda(np - h)) \\ &= Xp' \wedge h_0 && (\text{car } X \text{ ne divise pas } h_0) \\ &= h \wedge h_0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

D'où le résultat

B. Liberté d'une famille des polynômes

6)

Soit $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ On a :

$$f_j(\alpha_i) = a_n \prod_{k=j+1}^n (1 - \alpha_k \alpha_i) \prod_{k=1}^{j-1} (\alpha_i - \alpha_k)$$

En supposant qu'il existe i, k tels que $1 \leq i < k \leq n$ et $\alpha_i \alpha_k = 1$

Si $i \in \llbracket 1, j-1 \rrbracket$, alors $f_j(\alpha_i) = 0$, car le 2^e produit s'annule.

Si $i > j$ or $k > j$, alors $k \geq j+1$ or $\alpha_k \alpha_j = 1$, donc le 1^{er} produit s'annule.

Donc $f_j(\alpha_i) = 0$, ceci est vrai $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket$

Alors α_i est racine de f_j pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$

Supposons que $(f_1, \dots, f_n)$ est libre, donc cette famille est une famille libre de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ de taille $n = \dim(\mathbb{R}_{n-1}[X])$

Alors $(f_1, \dots, f_n)$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$

Il suffit de choisir un polynôme dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ qui ne s'annule pas en α_i , pour contredire le fait qu'il s'écrit comme combinaison linéaire des f_j

D'où le résultat.

7)

Soit $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$

Pour $f \in E$, on a α_j est une racine de $(1 - \alpha_j X)f - (1 - \alpha_j^2)f(\alpha_j)$

Alors :

$$\frac{(1 - \alpha_j X)f - (1 - \alpha_j^2)f(\alpha_j)}{X - \alpha_j} \in E(*) \Rightarrow P_j(E) \subset E$$

On a $P_j(0_E) = 0_E$

Soient $f, g \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} P_j(f + \lambda g) &= \frac{(1 - \alpha_j X)(f + \lambda g) - (1 - \alpha_j^2)(f + \lambda g)(\alpha_j)}{X - \alpha_j} \\ &= \frac{(1 - \alpha_j X)f - (1 - \alpha_j^2)f(\alpha_j)}{X - \alpha_j} + \lambda \cdot \frac{(1 - \alpha_j X)g - (1 - \alpha_j^2)g(\alpha_j)}{X - \alpha_j} \\ &= P_j(f) + \lambda P_j(g) \end{aligned}$$

Donc P_j est un endomorphisme de E , pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Remarque (*) : On pose $f = \frac{P}{Q}$ tel que Q s'écrit comme produit fini de facteurs $(1 - \alpha_j X)$.

Alors :

$$\begin{aligned} P_j(f) &= \frac{(1 - \alpha_j X)\frac{P}{Q} - (1 - \alpha_j^2)\frac{P(\alpha_j)}{Q(\alpha_j)}}{X - \alpha_j} \\ &= \frac{(1 - \alpha_j X)Q(\alpha_j)P - (1 - \alpha_j^2)P(\alpha_j)Q}{(X - \alpha_j)Q(\alpha_j)Q} \end{aligned}$$

On remarque que α_j est une racine de $(1 - \alpha_j X)Q(\alpha_j)P - (1 - \alpha_j^2)P(\alpha_j)Q$

Alors

$$P_j(f) = \frac{\tilde{P}}{Q} \quad \text{avec } \tilde{P} \in \mathbb{R}[X]$$

Soit $f \in \ker(P_j)$, alors :

$$(1 - \alpha_j X)f - (1 - \alpha_j^2)f(\alpha_j) = 0$$

Donc :

$$f = \frac{(1 - \alpha_j^2)f(\alpha_j)}{1 - \alpha_j X} \in \text{Vect} \left(\frac{1}{1 - \alpha_j X} \right)$$

Alors :

$$\ker(P_j) \subset \text{Vect} \left(\frac{1}{1 - \alpha_j X} \right) \quad \text{or} \quad \text{Vect} \left(\frac{1}{1 - \alpha_j X} \right) \subset \ker(P_j)$$

Donc :

$$\ker(P_j) = \text{Vect} \left(\frac{1}{1 - \alpha_j X} \right)$$

8)

Soit $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $g \in E$

$$P_j \left(\frac{(X - \alpha_j)g}{1 - \alpha_j X} \right) = \frac{(X - \alpha_j)g - (1 - \alpha_j^2) \cdot 0}{X - \alpha_j} = g$$

9)

Prenons $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ tels que

$$\sum_{k=1}^n \gamma_k g_k = 0$$

Montrons par récurrence que $\gamma_1 = \dots = \gamma_n = 0$

On a d'abord, en divisant par $\prod_{i=1}^n (1 - \alpha_i X)$, que

$$\sum_{k=1}^n \gamma_k g_k = 0$$

On a, pour $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$g_j = \frac{a_n \prod_{i=1}^{j-1} (X - \alpha_i)}{\prod_{i=1}^j (1 - \alpha_i X)}$$

—
Pour $j = 1$,

$$g_1 = \frac{a_n}{1 - \alpha_1 X} \Rightarrow g_1(\alpha_1) \neq 0 \quad \text{et} \quad g_j(\alpha_1) = 0 \quad \forall j \geq 2$$

(Le produit du numérateur s'annule)

Donc :

$$\sum_{k=1}^n \gamma_k g_k(\alpha_1) = \gamma_1 g_1(\alpha_1) = 0 \Rightarrow \gamma_1 = 0$$

—
Supposons $\gamma_1 = \dots = \gamma_{j-1} = 0$, montrons que $\gamma_j = 0$

On a :

$$\sum_{k=j}^n \gamma_k g_k = 0$$

Si $\alpha_j \notin \{\alpha_k \mid 1 \leq k \leq j-1\}$, on est bien, et on aura le résultat par la même méthode que l'initialisation.

Sinon, si α_j apparaît exactement m fois dans cet ensemble, alors :

$$g_j = \frac{a_n (X - \alpha_j)^m \prod_{i=1}^{j-m-1} (X - \alpha_i)}{\prod_{i=1}^j (1 - \alpha_i X)}$$

tel que les α_k restants dans le produit sont tous $\neq \alpha_j$

D'après la question 8 (on note $P_j^{(k)} = \underbrace{P_j \circ P_j \circ \dots \circ P_j}_{k \text{ fois}}$) :

$$P_j^{(k)}(g_j) = \frac{(1 - \alpha_j X)^k a_n (X - \alpha_j)^{m-k} \prod_{k=1}^{j-m-1} (X - \alpha_k)}{\prod_{k=1}^j (1 - \alpha_k X)}$$

Alors

$$P_j^{(m)}(g_j) = \frac{(1 - \alpha_j X)^m a_n \prod_{k=1}^{j-m-1} (X - \alpha_k)}{\prod_{k=1}^j (1 - \alpha_k X)}$$

Pour $i \geq j + 1$, le produit dans le numérateur de g_i admet au moins $(m + 1)$ termes égaux à $(X - \alpha_j)$

Donc :

$$P_j^{(m)}(g_i)(\alpha_j) = 0$$

On a

$$\sum_{k=j}^n \gamma_k P_j^{(m)}(g_k) = 0$$

On a alors :

$$\sum_{k=j}^n \gamma_k P_j^{(m)}(g_k)(\alpha_j) = \gamma_j P_j^{(m)}(g_j)(\alpha_j) = 0 \Rightarrow \gamma_j = 0$$

Car $P_j^{(m)}(g_j)(\alpha_j) \neq 0$

Comme les $(\alpha_k)_{1 \leq k \leq n}$ ne sont pas stables, on conclut que :

$$\gamma_j = 0$$

D'où le résultat et on déduit que $(f_1, \dots, f_n)$ est libre.

Alors on a cette équivalence :

$$(f_1, \dots, f_n) \text{ est libre} \iff p \text{ n'admet aucune racine stable}$$

(le sens direct est démontré par contraposée à travers question 6 et l'autre sens à travers le reste de partie B)

C. Expression de la matrice $J(p)$

10)

On a :

$$(S^T)^i = \begin{pmatrix} (0) & & & & & \\ 1 & \ddots & & & & \\ & & (0) & & & \\ & & 1 & (0) & & \\ & & & 1 & \ddots & \\ & & & & \ddots & (0) \\ & & & & & 1 & (0) \end{pmatrix}$$

Les 1 sont sur la $(i + 1)$ -ième diagonale en dessous de la diagonale principale.

$$\Rightarrow (S^T)^i U = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{i+1} \quad \forall 0 \leq i \leq n-1$$

Donc $(S^T)^i U = e_{i+1} \quad \forall 0 \leq i \leq n-1$, avec e_j le j -ème vecteur de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

Alors $\left((S^T)^i U\right)_{0 \leq i \leq n-1}$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

11)

On remarque que :

$$(X - \alpha_j X) f_j = (1 - \alpha_{j+1} X) f_{j+1}$$

Alors :

$$B_j f_j(s) = C_{j+1} f_{j+1}(s)$$

En transposant, on aura

$$f_j(s)^T B_j^T = f_{j+1}(s)^T C_{j+1}^T$$

En multipliant les deux dernières égalités, on a :

$$f_j(s)^T B_j^T B_j f_j(s) = f_{j+1}(s)^T C_{j+1}^T C_{j+1} f_{j+1}(s)$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n f_j(s)^T (C_j^T C_j - B_j^T B_j) f_j(s) &= \sum_{j=1}^{n-1} \left[f_j(s)^T C_j^T C_j f_j(s) - f_j(s)^T B_j^T B_j f_j(s) \right] \\ &\quad + f_n(s)^T (C_n^T C_n - B_n^T B_n) f_n(s) \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} \left[f_j(s)^T C_j^T C_j f_j(s) - f_{j+1}(s)^T C_{j+1}^T C_{j+1} f_{j+1}(s) \right] \\ &\quad + f_n(s)^T (C_n^T C_n - B_n^T B_n) f_n(s) \\ &= f_1(s)^T C_1^T C_1 f_1(s) - f_n(s)^T B_n^T B_n f_n(s) \quad (\text{Télescopage}) \\ &= p_0(s)^T p_0(s) - p(s)^T p(s) \\ &= \mathcal{J}(p) \end{aligned}$$

12)

On a, pour $1 \leq i, j \leq n$:

$$(S^T S)_{ij} = \sum_{k=1}^n (S)_{ki} (S)_{kj} = \sum_{k=1}^n \delta_{k+1,i} \delta_{k+1,j} = \begin{cases} \delta_{ij} & \text{si } i \in \llbracket 2, n \rrbracket \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Donc :

$$S^T S = \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} = I_n - U U^T$$

Soit $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$\begin{aligned} C_j^T C_j - B_j^T B_j &= (I_n - \alpha_j S^T)(I_n - \alpha_j S) - (S^T - \alpha_j I_n)(S - \alpha_j I_n) \\ &= I_n - \alpha_j S^T - \alpha_j S + \alpha_j^2 S^T S - S^T S + \alpha_j S^T + \alpha_j S - \alpha_j^2 I_n \\ &= (1 - \alpha_j^2) I_n - (1 - \alpha_j^2) S^T S \\ &= (1 - \alpha_j^2) I_n - (1 - \alpha_j^2)(I_n - U U^T) \\ &= (1 - \alpha_j^2) U U^T \end{aligned}$$

13)

On a d'après **12** :

$$\mathcal{J}(p) = \sum_{k=1}^n \left[f_k(S)^T U U^T f_k(S) \right] (1 - \alpha_k^2) I_n$$

Donc, pour $1 \leq i, j \leq n$:

$$\begin{aligned} (\mathcal{J}(p))_{ij} &= \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n \left[(f_k(S)^T U)(U^T f_k(S)) \right]_{i\ell} (1 - \alpha_k^2) \delta_{\ell j} \\ &= \sum_{k=1}^n \left[(f_k(S) U)(U^T f_k(S)) \right]_{ij} (1 - \alpha_k^2) \\ &= \sum_{k=1}^n \left[f_k(S^T) U \right]_i \left[U^T f_k(S^T)^T \right]_j (1 - \alpha_k^2) \\ &= \sum_{k=1}^n V_{ik} (1 - \alpha_k^2) V_{kj}^T \end{aligned}$$

Or :

$$(VDV^T)_{ij} = \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n V_{ik} D_{k\ell} V_{\ell j}^T = \sum_{k=1}^n V_{ik} (1 - \alpha_k^2) V_{kj}^T = (\mathcal{J}(p))_{ij}$$

Donc :

$$\mathcal{J}(p) = V D V^T$$

14)

Si p possède une racine stable, alors, d'après **6**, $(f_1, \dots, f_n)$ est liée.

Donc $(f_1(S^T)U, \dots, f_n(S^T)U)$ est liée. (Il existe une combinaison linéaire des f_i avec des coefficients non tous nuls, on applique cette combinaison à S^T , puis on multiplie le résultat par U)

Par conséquent, V n'est pas inversible, donc $\det(V) = 0$.

Alors :

$$\det(\mathcal{J}(p)) = \det(D) \cdot \det(V)^2 = 0$$

Donc $\mathcal{J}(p)$ n'est pas inversible.

D. Cas où $J(p)$ est inversible : critère de Schur-Cohn

15)

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tels que $\exists P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ vérifiant :

$$A = P^T B P$$

Soit F un s.e.v. de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ vérifiant $(\mathcal{C}_A)$. Montrons qu'il existe un s.e.v. de même dimension que F qui vérifie $(\mathcal{C}_B)$.

On a :

$$X^T B X = X^T P^{-1} A P^{-1} X = (P^{-1} X)^T A (P^{-1} X)$$

Notons $F' = \{P X \mid X \in F\}$.

Alors F' est un s.e.v. isomorphe à F (car $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$), donc :

$$\dim F' = \dim F$$

Soit $Y \in F'$, alors $Y = P X$ avec $X \in F$.

$$Y^T B Y = (P^{-1} P X)^T A (P^{-1} P X) = X^T A X > 0 \Rightarrow F' \text{ vérifie } (\mathcal{C}_B)$$

Donc :

$$\{\dim F \mid F \text{ s.e.v. vérifiant } (\mathcal{C}_A)\} \subseteq \{\dim F \mid F \text{ s.e.v. vérifiant } (\mathcal{C}_B)\}$$

Par passage au max, on aura $d(B) \geq d(A)$ et en considérant $B = (P^{-1})^T A P^{-1}$, avec $P^{-1} \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$, on obtient aussi $d(A) \geq d(B)$

$$\Rightarrow d(A) = d(B)$$

16)

Soit $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. D'après le théorème spectral, $\exists P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ tel que :

$$M = P^T D P \quad \text{avec} \quad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \text{Sp}(M) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$$

Notons $\{i_k \mid 1 \leq k \leq \pi(M)\}$ les indices des valeurs propres strictement positives (avec leurs multiplicités).

Notons e_j le j -ième vecteur de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

Alors on pose :

$$F_M = \left\{ P^{-1} X \mid X \in \text{Vect}(e_{i_k}) \right\}_{1 \leq k \leq \pi(M)} = P^{-1} (\text{Vect}(e_{i_k}))$$

Soit $Y \in F_M \setminus \{0\}$, donc il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_{\pi(M)} \in \mathbb{R}$ tel que :

$$Y = P^{-1} \sum_{k=1}^{\pi(M)} \alpha_k e_{i_k}$$

Alors :

$$\begin{aligned}
 Y^T M Y &= (PY)^T D (PY) \\
 &= \left(\sum_{k=1}^{\pi(M)} \alpha_k e_{i_k}^T \right) D \left(\sum_{j=1}^{\pi(M)} \alpha_j e_{i_j} \right) \\
 &= \left(\sum_{k=1}^{\pi(M)} \alpha_k e_{i_k}^T \right) \left(\sum_{j=1}^{\pi(M)} \alpha_j \lambda_j e_{i_j} \right) \\
 &= \sum_{k=1}^{\pi(M)} \sum_{j=1}^{\pi(M)} \alpha_k \alpha_j \lambda_j \langle e_{i_k}, e_{i_j} \rangle
 \end{aligned}$$

Alors :

$$Y^T M Y = \sum_{j=1}^{\pi(M)} \alpha_j^2 \lambda_j > 0 \quad (Y \neq 0)$$

Donc F_M est de dimension $\pi(M)$ et vérifie $(\mathcal{C}_M)$.

D'où le résultat :

$$d(M) \geq \pi(M)$$

17)

D'après la formule de Grassmann, on a :

$$\dim(F_M^\perp \cap G) = \dim(F_M^\perp) + \dim(G) - \dim(F_M^\perp + G)$$

Or :

$$\begin{aligned}
 \dim(F_M^\perp) + \dim(G) - \dim(F_M^\perp + G) &\geq (n - \pi(M)) + 1 + \pi(M) - \dim(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})) \\
 &\geq (n - \pi(M)) + 1 + \pi(M) - n \\
 &\geq 1
 \end{aligned}$$

Alors :

$$\dim(F_M^\perp \cap G) \geq 1$$

Il existe donc $X \in F_M^\perp \cap G \setminus \{0\}$

On a $X \in F_M^\perp$, donc il est inclus dans l'espace associé aux valeurs propres nulles ou négatives de M donc :

$$X^T M X \leq 0$$

Mais $X \in G$, qui vérifie $(\mathcal{C}_M)$, donc :

$$X^T M X > 0$$

Contradiction.

Donc :

$$d(M) = \pi(M)$$

18)

Si $\mathcal{J}(p)$ est inversible, d'après le contraposée de 14, p ne possède aucune racine stable.

D'après 13 :

$$\mathcal{J}(p) = VDV^T \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$$

Donc, d'après 17 :

$$\pi(\mathcal{J}(p)) = d(\mathcal{J}(p))$$

Or, si $J(p)$ est inversible, en particulier, V est nécessairement inversible. Alors d'après 15 :

$$d(J(p)) = d(D)$$

Comme D est diagonale, $d(D)$ correspond à la dimension de l'espace associé aux valeurs propres strictement négatives, donc autrement dit à $\alpha_i^2 < 1 \iff \alpha_i \in]-1, 1[$. Donc $d(D) = \sigma(p)$

Ainsi, on déduit le critère de Schur–Cohn :

$$\boxed{\sigma(p) = \pi(\mathcal{J}(p))}$$

E. Condition nécessaire et suffisante d'inversibilité

19)

Si p n'admet pas de racine stable, alors D est inversible (tous les coefficients diagonaux sont non nuls), or $\mathcal{J}(p)$ n'est pas inversible.

Et comme $\mathcal{J}(p) = VDV^T$ (d'après 13), on a :

$$\det(\mathcal{J}(p)) = \det(D) \cdot \det(V)^2 = 0 \quad \text{avec} \quad \det(D) \neq 0 \Rightarrow \det(V) = 0$$

Donc V n'est pas inversible.

Alors la famille $(f_1(S^T)U, \dots, f_n(S^T)U)$ est liée, d'où l'existence de $q \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \setminus \{0\}$ tel que :

$$q(S^T)U = 0_{n,1}$$

(D'après 9, si p n'admet pas de racine stable, alors la $(f_1, \dots, f_n)$ est libre. Donc, par construction, $q \neq 0$)

20)

On sait que :

$$(S^T)^n = 0 \quad \text{et} \quad (S^T)^{n-1}U = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0$$

D'après 19, il existe $\gamma_0, \dots, \gamma_{n-1} \in \mathbb{R}$, non tous nuls, tels que :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k (S^T)^k U = 0$$

En multipliant par $(S^T)^{n-1}$, on obtient :

$$\gamma_0 (S^T)^{n-1} U = 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma_0 = 0$$

Supposons que $\gamma_0 = \dots = \gamma_j = 0$. Montrons que $\gamma_{j+1} = 0$

$$\sum_{k=j+1}^{n-1} \gamma_k (S^T)^k U = 0$$

En multipliant cette égalité par $(S^T)^{n-j-2}$, on obtient :

$$\gamma_{j+1} (S^T)^{n-1} U = 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma_{j+1} = 0$$

On montre alors par récurrence que :

$$\gamma_0 = \dots = \gamma_{n-1} = 0$$

Ce qui est absurde. On a donc montré par l'absurde que si p n'admet pas de racine stable, alors $\mathcal{J}(p)$ est inversible.

Le sens contraire est garanti par **18**.

On a alors cette équivalence :

$\mathcal{J}(p)$ inversible $\Leftrightarrow p$ n'admet aucune racine stable
--

F. Un cas particulier

21)

On a d'après **5** :

$$h \wedge h_0 = 1$$

Alors d'après **2**, h ne possède pas de racine stable.

Donc d'après **20**,

$$\mathcal{J}(h) \text{ est inversible}$$

22)

J'avais l'idée d'utiliser que $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ est ouvert et de montrer que $\mathcal{J}(p(rX))$ tend vers une matrice inversible.

On remarque que :

$$\frac{1}{r-1} [p(rX) - p(X)] = X \frac{p(rX) - p(X)}{(r-1)X} \xrightarrow{r \rightarrow 1^-} Xp'(X)$$

Ainsi :

$$\frac{1}{r-1} [p(rX) - p(X)] \xrightarrow{r \rightarrow 1^-} h$$

On remarque que l'application $p \mapsto \mathcal{J}(p)$ est continue (car $\mathcal{J}(p)$ est polynomiale en les coefficients de p), donc :

$$\mathcal{J} \left(\frac{1}{r-1} [p(rX) - p(X)] \right) \xrightarrow{r \rightarrow 1^-} \mathcal{J}(h) \quad \text{avec} \quad \mathcal{J}(h) \in \text{GL}_n(\mathbb{R}) \quad (\text{d'après 21})$$

et après développer $\mathcal{J} \left(\frac{1}{r-1} [p(rX) - p(X)] \right)$ et en utilisant que $\mathcal{J}(p) = 0$, **mais ceci ne donne pas le résultat attendu.**

Par définition, on a pour tout $r > 0$:

$$\begin{aligned}
 & p(rX) \text{ admet une racine stable} \\
 & \iff p(rX) \text{ et } p\left(\frac{r}{X}\right) \text{ ont une racine commune non nulle} \\
 & \iff \exists (j, k) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2, \quad \frac{\alpha_j}{r} = \frac{r}{\alpha_k} \\
 & \iff \exists (j, k) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2, \quad r^2 = \alpha_j \alpha_k
 \end{aligned}$$

car les racines de $p(rX)$ sont $\frac{\alpha_1}{r}, \dots, \frac{\alpha_n}{r}$ et comme les $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont stables, en particulier elles sont non nulles, d'où les racines de $p\left(\frac{r}{X}\right)$ sont $\frac{r}{\alpha_1}, \dots, \frac{r}{\alpha_n}$.

si $\alpha_j \alpha_k \notin]0; 1[$, $r^2 \neq \alpha_j \alpha_k$ pour $r \in]0; 1[$

Sinon on pose :

$$\delta := \max \left(\left\{ \sqrt{\alpha_j \alpha_k} : (j, k) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2, \alpha_j \alpha_k \in]0; 1[\right\} \cup \{0\} \right)$$

Remarque : si $\left\{ \sqrt{\alpha_j \alpha_k} : (j, k) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2, \alpha_j \alpha_k \in]0; 1[\right\} = \emptyset$, alors $\delta = 0$.

Alors on a $0 \leq \delta < 1$ par construction et :

$$r \in]\delta; 1[\implies \forall (j, k) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2, \alpha_j \alpha_k \in]0; 1[: r \neq \sqrt{\alpha_j \alpha_k} \quad \text{et} \quad 0 < r^2 < 1$$

D'où :

$$r \in]\delta; 1[\implies \forall (j, k) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2, r^2 \neq \alpha_j \alpha_k$$

Ainsi, par l'équivalence précédente, il vient que pour tout $r \in]\delta; 1[$, $p(rX)$ n'admet pas de racine stable. (**Proposée par Jules Pirony**)

Soit $0 < r < 1$.

On a que $(\frac{\alpha_1}{r}, \dots, \frac{\alpha_n}{r})$ sont les racines de $p(rX)$; il est bien scindé.

Si i est tel que $\alpha_i > 1$, or $r < 1$ donc $\frac{1}{r} > 1$, donc $\frac{\alpha_i}{r} > 1$.

Si i est tel que $\alpha_i < -1$, alors $-\alpha_i > 1$ donc $-\frac{\alpha_i}{r} > 1$ donc $\frac{\alpha_i}{r} < -1$.

Prenons

$$r > \max\{|\alpha_i|; |\alpha_i| < 1\}.$$

On a donc

$$|\alpha_i| < r \text{ alors } \left| \frac{\alpha_i}{r} \right| < 1$$

Donc pour $r > \max\{|\alpha_i|; |\alpha_i| < 1\}$, on a

$$\sigma(p(rX)) = \sigma(p).$$

En prenant

$$\eta = \min \{ \eta_0, 1 - \max\{|\alpha_i|; |\alpha_i| < 1\} \},$$

on obtient le résultat demandé.

23)

D'après **22**, il existe η tel que $\forall r \in]1 - \eta, 1[$,
comme $\mathcal{J}(p) \in S_n(\mathbb{R})$, donc diagonalisable, en le multipliant par -1 ,
cela inverse les valeurs propres positives et négatives.

$$\begin{aligned}
 \pi \left(\frac{n}{2(r-1)} \mathcal{J}(p(rX)) \right) &= n - \pi \left(\frac{n}{2(1-r)} \mathcal{J}(p(rX)) \right) \\
 &= n - \pi \left(\mathcal{J} \left(\sqrt{\frac{n}{2(1-r)}} p(rX) \right) \right) \quad (1-r > 0) \\
 &= n - \sigma \left(\sqrt{\frac{n}{2(1-r)}} p(rX) \right) \quad (\text{d'après } \mathbf{22} \text{ et critère de Schur-Cohn}) \\
 &= n - \sigma(p(rX)) \\
 &= n - \sigma(p) \quad (\text{d'après } \mathbf{22})
 \end{aligned}$$

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} \pi \left(\frac{n}{2(r-1)} F(r) \right) = \lim_{r \rightarrow 1^-} \pi \left(\frac{n}{2(r-1)} \mathcal{J}(p(rX)) \right) = n - \sigma(p) \quad \text{D'où le résultat}$$

24)

On a $F : \mathbb{R}_+^* \rightarrow S_n(\mathbb{R})$, $r \mapsto \mathcal{J}(p(rX))$ (polynomiale en r donc dérivable)
Elle est dérivable et on a :

$$\begin{aligned}
 F(r) &= (p(rX))_0(S)^T (p(rX))_0(S) - (p(rX))(S)^T (p(rX))(S) \\
 &= r^{2n} p_0 \left(\frac{S^T}{r} \right) p_0 \left(\frac{S}{r} \right) - p(rS^T) p(rS) \\
 &= r^{2n} p \left(\frac{S^T}{r} \right) p \left(\frac{S}{r} \right) - p(rS^T) p(rS)
 \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
 F'(r) &= 2nr^{2n-1} p \left(\frac{S^T}{r} \right) p \left(\frac{S}{r} \right) \\
 &\quad + r^{2n} \left[-\frac{S^T}{r^2} p' \left(\frac{S^T}{r} \right) p \left(\frac{S}{r} \right) - p \left(\frac{S^T}{r} \right) \frac{S}{r^2} p' \left(\frac{S}{r} \right) \right] \\
 &\quad - S^T p' \left(rS^T \right) p(rS) - Sp(rS^T) p'(rS)
 \end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned}
 F'(1) &= 2np(S^T)p(S) - S^T p'(S^T)p(S) - Sp(S^T)p'(S) \\
 &\quad - S^T p'(S^T)p(S) - Sp(S^T)p'(S) \\
 &= 2n(p(S))^T p(S) - 2S^T (p'(S))^T p(S) - 2(p(S))^T p'(S)S
 \end{aligned}$$

D'où le résultat

25)

On a comme $F(0) = \mathcal{J}(p) = 0$

$$\begin{aligned}
 \frac{n}{2} \frac{F(r)}{r-1} &\underset{r \rightarrow 1}{=} \frac{n}{2} F'(1) + o(1) \\
 &\underset{r \rightarrow 1}{=} n^2 (p(S))^T p(S) - nS^T p'(S)^T p(S) - np(S)^T p'(S)S + o(1)
 \end{aligned}$$

On a d'après **4** :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{J}(h) &= h_0(S)^T h_0(S) - h(S)^T h(S) \\
 &= (np(S)^T - S^T p'(S)^T)(np(S) - Sp'(S)) - S^T p'(S^T) Sp'(S) \\
 &= n^2 p(S)^T p(S) - nSp(S)^T p'(S) - nS^T p'(S^T) p(S) \\
 &\quad + S^T p'(S)^T Sp'(S) - S^T p'(S)^T Sp'(S) \\
 &= n^2 p(S)^T p(S) - nSp(S)^T p'(S) - nS^T p'(S)^T p(S)
 \end{aligned}$$

Alors

$$\frac{n}{2(r-1)} F(r) \underset{r \rightarrow 1}{=} \mathcal{J}(h) + o(1)$$

26)

On admet que l'application définie sur $S_n(\mathbb{R})$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ qui à une matrice symétrique associe le n -uplet de ses valeurs propres réelles comptées avec leurs multiplicités, rangées dans l'ordre décroissant, est continue. On note une telle fonction φ

On a φ est continue alors d'après **25** :

$$\lim_{r \rightarrow 1} \varphi \left(\frac{n}{2(r-1)} F(r) \right) = \varphi(\mathcal{J}(h))$$

On note $\lambda_{1,r}, \dots, \lambda_{n,r}$ les valeurs propres de $\frac{n}{2(r-1)} F(r)$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de $\mathcal{J}(h)$.

D'après **21** ; $\mathcal{J}(h)$ est inversible alors $\lambda_i \neq 0$ pour tout $1 \leq i \leq n$ et on a

$$\lim_{r \rightarrow 1} \lambda_{i,r} = \lambda_i \quad \forall 1 \leq i \leq n$$

On suppose $\pi(\mathcal{J}(h)) = j$ alors $\lambda_i > 0$ pour $1 \leq i \leq j$ et $\lambda_i < 0$ pour $j+1 \leq i \leq n$.

D'après la définition de la limite et on travaille avec une famille finie, il existe un voisinage de 1 commun qu'on le note $\nu(1)$ tel que pour tout $r \in \nu(1)$:

$$\lambda_{i,r} > 0 \quad \forall 1 \leq i \leq j \quad \text{et} \quad \lambda_{i,r} < 0 \quad \forall j+1 \leq i \leq n$$

alors

$$\pi \left(\frac{n}{2(r-1)} F(r) \right) = j = \pi(\mathcal{J}(h))$$

On déduit alors que

$$\lim_{r \rightarrow 1} \pi \left(\frac{n}{2(r-1)} F(r) \right) = \pi(\mathcal{J}(h))$$

On a alors d'après **23** :

$$\pi(\mathcal{J}(h)) = n - \sigma(p)$$

Donc

$$\begin{aligned}
 \sigma(p) &= n - \pi(\mathcal{J}(h)) \\
 &= n - \sigma(h) \quad (\text{d'après } \mathbf{21} \text{ et } \mathbf{18}) \\
 &= n - \sigma(Xp') \\
 &= n - (1 + \sigma(p')) \quad (0 \in]-1, 1[) \\
 &= n - 1 - \sigma(p')
 \end{aligned}$$

D'après **4** : p' n'admet pas de racine stable.

Alors d'après **20**, $\mathcal{J}(p')$ est inversible.

Alors, d'après le critère de Schur-Cohn, $\sigma(p') = \pi(\mathcal{J}(p'))$.

Ainsi,

$$\sigma(p) = n - 1 - \pi(\mathcal{J}(p'))$$

G. Méthode générale

27)

On a $p = fg = (p_1 \wedge p_0)g$, alors $g = \frac{p}{p_1 \wedge p_0}$.

Alors g n'admet aucune racine stable, donc d'après **20**, $\mathcal{J}(g)$ est inversible.

Et donc, d'après le critère de Schur-Cohn :

$$\sigma(g) = \pi(\mathcal{J}(g))$$

28)

On a $f = p \wedge p_0$, les racines de f sont toutes stables, on les note $\gamma_1, \dots, \gamma_m, \gamma_1^{-1}, \dots, \gamma_m^{-1}$ de multiplicités $n_1, \dots, n_m$. Alors

$$f = \prod_{i=1}^m [(x - \gamma_i)(x - \gamma_i^{-1})]^{n_i}$$

Si $\gamma_i \notin \{1, -1\}$, alors

$$g_i = (x - \gamma_i)(x - \gamma_i^{-1})$$

Si $\gamma_i \in \{1, -1\}$, alors

$$g_i = (x - \gamma_i) = g_{i+1} = (x - \gamma_i^{-1})$$

On remarque que ces g_i sont de racines stables et de multiplicité 1, et il existe donc $\ell \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$f = \prod_{i=1}^{\ell} g_i$$

D'où le résultat. et donc

$$p = fg = g_1 g_2 \cdots g_{\ell} g$$

On sait que par définition de σ :

$$\begin{aligned} \sigma(p) &= \sigma(g_1 \cdots g_{\ell} g) \\ &= \sum_{i=1}^{\ell} \sigma(g_i) + \sigma(g) \\ &= \sum_{i=1}^{\ell} (\deg g_i - 1 - \pi(\mathcal{J}(g'_i))) + \pi(\mathcal{J}(g)) \quad (\text{d'après } \mathbf{26} \text{ et } \mathbf{27}) \\ &= \sum_{i=1}^{\ell} \deg g_i - \ell - \sum_{i=1}^{\ell} \pi(\mathcal{J}(g'_i)) + \pi(\mathcal{J}(g)) \\ &= (n - \deg g) - \ell - \sum_{i=1}^{\ell} \pi(\mathcal{J}(g'_i)) + \pi(\mathcal{J}(g)) \quad \left(\text{car } \sum_{i=1}^{\ell} \deg g_i + \deg g = n \right) \end{aligned}$$

Donc

$$\sigma(p) = n - \deg g - \ell - \sum_{i=1}^{\ell} \pi(\mathcal{J}(g'_i)) + \pi(\mathcal{J}(g))$$

Fin de sujet