MINES PSI 2025 - Maths 2

Rothlingshofer Yanic

Contact : Pour toute remarque, suggestion ou signalement d'erreur : yrothlin-24@telecom-paris.fr.

Remarque : Ce document peut contenir des coquilles ou des inexactitudes (fautes de signes, inattentions, etc.). Merci de ne pas tout prendre au pied de la lettre et de me faire part de vos retours (il a été rédigé juste après l'épreuve donc dans la précipitation). Ce document sert principalement à fournir des pistes qu'à prétendre fournir une correction exacte (même si j'essaie d'être le plus rigoureux possible).

Partie 1. Linéarisation de (E)

1. Le problème (C_l) définit un problème de Cauchy d'ordre 1 et donc d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire, ce problème admet une unique solution. On peut réécrire l'EDL :

$$u'(x) + \frac{1}{2}u(x) = -\frac{1}{2}$$

- Solution particulière : $u_p(x) = -1$ est solution.

• Solution homogène : On sait d'après le cours que la solution de ce problème s'écrit $u_h(x) = Ae^{-\frac{1}{2}x}$. Ainsi $u(x) = -1 + Ae^{-\frac{x}{2}}$ or $u(0) = 0 = -1 + A$ donc $A = 1$ et $u(x) = e^{-\frac{x}{2}} - 1$. Cette fonction est décroissante avec $u(0) = 0$ et tend vers -1 en $+\infty$.

2. Soit γ un solution constante, en l'injectant dans (E_l) , on obtient $\gamma = -1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x)$ où u est définie question précédente.
3. Si v est une solution constante de (C) , on a $v + 1 = \frac{1}{2}e^v$. De plus, puisque y (solution de (C)) est convergente à l'infini et décroissante, sa dérivée y' tend vers 0 à l'infini. En faisant tendre x vers l'infini dans (C) et comme $y \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} c$, on obtient :

$$c + 1 = \frac{1}{2}e^c$$

Comme $y(x) \rightarrow c$ quand $x \rightarrow +\infty$ et que exp est continue sur $\mathbb{R}$, on a

$$e^{y(x)} \rightarrow e^c.$$

L'équation limite $c + 1 = \frac{1}{2}e^c$ s'écrit

$$f(c) = 0, \quad \text{avec} \quad f(x) = \frac{1}{2}e^x - x - 1.$$

On calcule

$$f'(x) = \frac{1}{2}e^x - 1,$$

qui est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et s'annule exactement en $x = \ln 2$. De plus,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad f(\ln 2) = -\ln 2 < 0.$$

Ainsi f décroît sur $(-\infty, 0]$, atteint un minimum négatif en $\ln 2$, puis croît sur $[\ln 2, +\infty)$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, f admet exactement deux zéros notés (notons $f(0) < 0$)

$$c_1 \in \mathbb{R}_-^* \quad \text{et} \quad c_2 \in]\ln 2, +\infty[.$$

Enfin, comme la solution y est décroissante et $y(0) = 0$, on a $y(x) \leq 0$ pour tout $x \geq 0$, donc sa limite c vérifie $c \leq 0$. Or $c_2 > 0$, d'où

$$c = c_1 < 0.$$

Partie 2. Séries de Dirichlet

4. Pour n assez grand, puisque $\lambda_n = O(n)$, il existe $C > 0$ tel que $\lambda_n \leq Cn$ puis :

$$|\lambda_n^k| \leq C^k n^k$$

Puis (toujours pour n assez grand) :

$$|\lambda_n^k a_n| \leq M C^k \frac{n^k}{2^n}$$

Or $\frac{n^k}{2^n} = o(1/n^2)$ par croissances comparées. Puisque $\sum 1/n^2$ converge (Riemann avec $\alpha > 1$), on a par critère de comparaison pour les SATP $\sum \frac{n^k}{2^n}$ converge puis par linéarité $\sum \lambda_n^k a_n$ est ACV par comparaison et donc CV. On en déduit que les b_k sont correctement définis. (Il faut peut être justifier un peu plus).

5. Puisque $\lambda_n \geq 0$, pour tout $x \geq 0$, on a :

$$|f_n(x)| \leq |a_n| \leq \frac{M}{2^n}$$

d'où par définition, $0 \leq \|f_n\|_\infty \leq \frac{M}{2^n}$. On en déduit par comparaison que $\sum f_n$ converge normalement donc uniformément. Enfin puisque pour tout n , f_n est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $\sum f_n$ CU sur $\mathbb{R}_+$, alors la somme f est continue.

6. Puisque f est continue en 0, on a $f(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$. Puis, on applique le théorème de la double limite car $\sum f_n$ CU sur $\mathbb{R}_+$, $f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 = v_n$ pour $n \geq 1$ et $v_0 = a_0$ or $\sum v_n = a_0$ converge et donc en inversant somme et limite, on obtient $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a_0$. Finalement :

$$f(0) = b_0 + a_0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a_0$$

7. Les f_n sont $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}_+$ avec $f_n^{(k)}(x) = (-1)^k \lambda_n^k f_n(x)$. On montre alors assez facilement que $\sum f_n^{(k)}$ converge normalement donc uniformément sur $\mathbb{R}_+$ (on écrit juste $|f_n^{(k)}(x)| \leq C^k M \frac{n^k}{2^n}$). Ainsi f est $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}_+$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^k a_n \lambda_n^k f_n(x)$$

puis $f^{(k)}(0) = (-1)^k b_k$ (n'oublions pas que $\lambda_0 = 0$).

8. Montrons le par récurrence forte.

- **Initialisation** : pour $n = 0$, on a $a_0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ car f est la fonction nulle.
- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que pour tout $k \leq n$, on ait $a_k = 0$. On a alors :

$$0 = f(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k e^{-\lambda_k x} = a_{n+1} e^{-\lambda_{n+1} x} + \sum_{k=n+2}^{+\infty} a_k e^{-\lambda_k x}$$

puis en divisant par $e^{-\lambda_{n+1} x}$ pour $x \geq 0$ car $\lambda_{n+1} > 0$, on obtient :

$$0 = a_{n+1} + \sum_{k=n+2}^{+\infty} a_k e^{-(\lambda_k - \lambda_{n+1})x}$$

Or (λ_k) est strictement croissante donc pour $k \geq n+2$, $\lambda_k - \lambda_{n+1} > 0$ et donc en passant la limite pour $x \rightarrow +\infty$, on obtient $a_{n+1} = 0$.

Finalement la propriété est vérifiée au rang $n+1$ et par principe de récurrence forte cette propriété est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Partie 3. Relations sur les coefficients de la série de Dirichlet

9. D'après Q6 et par hypothèse sur y , on a $a_0 = c$ et $y(0) = 0 = a_0 + b_0$ d'où $a_0 = c$ et $b_0 = -c$.

10. En appliquant (E) en 0, on a :

$$y'(0) + y(0) + 1 = \frac{1}{2}e^{y(0)} \iff -b_1 + 0 + 1 = 1/2$$

d'où $b_1 = 1/2$.

11. On a $g(x) = (\exp \circ y)(x)$. Puisque $x \mapsto e^x$ est $\mathcal{C}^\infty$ et y est $\mathcal{C}^\infty$, on a g qui est $\mathcal{C}^\infty$. On a $g'(x) = y'(x)g(x)$ puis en appliquant la formule de Leibniz, on obtient pour $k \geq 1$:

$$g^{(k)} = (g')^{(k-1)} = (y'g)^{(k-1)} = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} y^{(i+1)} g^{(k-1-i)}$$

puis en faisant le changement de variable dans la somme :

$$g^{(k)} = \sum_{i=1}^k \binom{k-1}{i-1} y^{(i)} g^{(k-i)}$$

puis en évaluant en 0 on obtient le résultat ($d_0 = g(0) = 1 = e^0$).

12. On dérive (E) k fois :

$$y^{(k+1)}(x) + y^{(k)}(x) = \frac{1}{2}g^{(k)}(x)$$

puis en 0 :

$$b_{k+1} + b_k = \frac{1}{2}d_k$$

Partie IV. Approximation de y

13. Pour $N > 0$! On a pour $x \in \mathbb{R}_+$ (inégalité triangulaire et hypothèse sur a_n sont appliquées) :

$$|y_N(x) - y(x)| \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} |a_n| e^{-\lambda_n x} \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} |a_n| \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{M}{2^n} = \frac{M}{2^N}$$

En effet pour $x \geq 0$, avec $\lambda_n > 0$ ($N > 0$), on a $e^{-\lambda_n x} \leq 1$ et pour l'égalité on met $1/2^{N+1}$ en facteur et on calcul la somme de la série géométrique qui fait sortir un facteur 2.

En prenant un intervalle de la forme $[x_0, +\infty[$ avec $x_0 > 0$, on a pour tout $n \geq N+1$, $e^{-\lambda_n x} \leq e^{-\lambda_{N+1} x_0}$ et on obtient la majoration suivante :

$$|y_N(x) - y(x)| \leq \frac{M}{2^N} e^{-\lambda_{N+1} x_0}$$

puis en passant au sup on obtient le résultat.

14. On prend un Vandermonde transposée (d'où le V dans l'énoncé, ils sont sympa) $V = V(\lambda_1, \dots, \lambda_N)^T$.

15. Par invariance par transposition du déterminant, on sait d'après le cours :

$$\det(V) = \det(V(\lambda_1, \dots, \lambda_N)) = \prod_{1 \leq i < j \leq N} (\lambda_i - \lambda_j)$$

or les λ_i sont tous distincts car (λ_n) est strictement croissante et donc $\det(V) \neq 0$ donc V inversible. On en déduit que la solution du système est $A = V^{-1}B$. Si A et A' sont deux solutions, on a $V(A - A') = 0$ or $\text{Ker}(V) = \{0\}$ car inversible d'où l'unicité de la solution.

Partie 5. Modèle de propagation d'épidémie SIR

Notons (1), (2) et (3) les trois équations différentielles du problème F .

16. D'après le cours, on sait que la solution de (1) s'écrit $S(x) = S_0 e^{-\int_0^x I(t) dt} = 0$ car $S_0 = S(0) = 0$. On a alors (2) qui se réécrit $I'(x) = -I(x)$ d'où $I(x) = I_0 e^{-x}$ et $R(x) = R_0 + I_0(1 - e^{-x})$.

17. On sait que $S(x) = S_0 e^{-\int_0^x I(t)dt}$. Supposons qu'il existe $T > 0$ tel que $S(T) = 0$. Puisque S continue on prend $T_0 = \inf\{t > 0 \mid S(t) = 0\}$ et donc $S > 0$ sur $[0, T_0[$. On a alors par continuité de S en T_0 , $S(T_0) = 0 = S_0 e^{-\int_0^{T_0} I(t)dt}$ or l'exponentielle est non nulle car $I(t)$ est bien définie et continue sur ce segment et on aurait alors $S_0 = 0$ ce qui est absurde.

Remarque : En fait l'expression de S sous forme intégrale on peut la montrer sur $[0, T_0[$ puisqu'on peut diviser (1) par S sur cet intervalle (car S non nulle) mais donc je ne suis pas sûr que l'on ait le droit d'utiliser cette expression sans le justifier sinon la réponse est un peu triviale.

18. En supposant $S_0 > 0$, on a vu sur $S(x) > 0$ pour tout x . Ainsi en divisant par $S(x)$ dans (1), on obtient $I(x) = -\frac{S'(x)}{S(x)}$ que l'on injecte dans (2) et on obtient le résultat.

19. Sachant $S_0 > 0$, on pourrait juste intégrer (F) mais on peut aussi remarquer que $h'(x) = -I(x)$ d'après (1) puis :

$$(h + R)' = h' + R' = -I + I = 0$$

d'après (3) et donc $h(x) = -R(x)$ car $h(0) = R(0) = 0$. Enfin :

$$R(x) + I(x) + S(x) = 1 \iff -h(x) - h'(x) + \frac{1}{2}e^{h(x)} = 1$$

avec $h(0) = 0$ (immédiat) d'où h est bien solution de (C).

20. On a vu que h est solution de (C) or cette solution est unique et notée y et on peut donc écrire $S(x) = S_0 e^{y(x)}$. On a déjà :

$$|y_N(x)| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{M}{2^n} = 2M$$

(SATP + majoration des a_n). Soit $x \geq 0$ fixé, on a $y_N(x)$ et $y(x)$ qui sont bornées par dans $[-2M, 2M]$ et on applique l'IAF à $x \mapsto e^x$ entre $y_N(x)$ et $y(x)$, il existe ξ_x tel que :

$$|e^{y_N(x)} - e^{y(x)}| \leq e^{\xi_x} |y_N(x) - y(x)| \leq e^{2M} \frac{M}{2^N}$$

car $M > 0$ (et on peut majorer ξ_x par $\max(|y_N(x)|, |y(x)|) \leq 2M$) et $x \mapsto e^x$ croissante et d'après Q13. On a alors :

$$\|S_N - S\|_{\infty, \mathbb{R}_+} = S_0 \|e^{y_N(x)} - e^{y(x)}\|_{\infty, \mathbb{R}_+} \leq \frac{M e^{2M}}{2^{N+1}}$$

car $S_0 = 1/2$. Finalement, on en déduit que (S_N) converge uniformément vers S car $\|S_N - S\|_{\infty} \rightarrow 0$.

Partie 6. Modèle probabiliste

21. On a $M - i$ personnes saines. Nombre de configurations possible pour le choix des K personnes parmi les M : $\binom{M}{k}$. Nombre de configurations où l'on ne choisit que des personnes saines donc pas de contamination : $\binom{M-i}{k}$. Ainsi la probabilité de ne pas être infecté vaut :

$$1 - p(i) = \frac{\binom{M-i}{k}}{\binom{M}{k}}$$

d'où :

$$p(i) = 1 - \frac{\binom{M-i}{k}}{\binom{M}{k}}$$

Remarquons que si on rencontre plus de personnes qu'il y a de personnes saines, alors $K > M - i$ et donc on est sûr d'être infecté.

22. On a par définition :

$$\mathbb{E}(Z) = \sum_{k=0}^M k \mathbb{P}(Z = k)$$

Or le système d'évènement $((\tilde{S}_n, \tilde{I}_n, \tilde{R}_n) = (s, i, r))_{(s,i,r) \in E}$ forme un s.c.e (peut être à justifier un peu) et donc la formule des probabilité totale nous donne :

$$\mathbb{P}(Z = k) = \sum_{(s,i,r) \in E} \mathbb{P}(Z = k | (\tilde{S}_n, \tilde{I}_n, \tilde{R}_n) = (s, i, r)) \mathbb{P}((\tilde{S}_n, \tilde{I}_n, \tilde{R}_n) = (s, i, r))$$

on injecte ce résultat dans $\mathbb{E}(Z)$ et on inverse l'ordre de sommation et voila.

- 23.** Je comprends pas trop la question puisque pour tout n , $\tilde{S}_n$, $\tilde{I}_n$ et $\tilde{R}_n$ sont à valeurs dans $\llbracket 0, M \rrbracket$ qui est un ensemble fini donc leur espérance sur cette ensemble est nécessairement finie comme somme finie. De même pour $\Delta\tilde{S}_n = \tilde{S}_{n+1} - \tilde{S}_n$ (par linéarité de l'espérance).
- 24.** Un individu noté X_i guéri avec une probabilité ρ . La guérison est indépendante entre les individus et donc le nombre de guérisons qu'il y a eu d'une journée à l'autre sachant qu'il y a i infecté ce jour là vaut :

$$\Delta\tilde{R}_n = \sum_{j=1}^i X_j$$

qui suit une loi binomiale $\mathcal{B}(i, \rho)$. Ainsi :

$$\mathbb{P}(\Delta\tilde{R}_n = k | \tilde{I}_n = i) = \rho^k (1 - \rho)^{i-k} \binom{i}{k}$$

Ainsi (on utilise des proba totales et inversion de sommes) :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\Delta\tilde{R}_n) &= \sum_{k=0}^M k \mathbb{P}(\Delta\tilde{R}_n = k) \\ &= \sum_{k=0}^M k \sum_{i=0}^M \mathbb{P}(\Delta\tilde{R}_n = k | \tilde{I}_n = i) \mathbb{P}(\tilde{I}_n = i) \\ &= \sum_{i=0}^M \left(\sum_{k=0}^M k \mathbb{P}(\Delta\tilde{R}_n = k | \tilde{I}_n = i) \right) \mathbb{P}(\tilde{I}_n = i) \\ &= \sum_{i=0}^M \mathbb{E}(\Delta\tilde{R}_n | \tilde{I}_n = i) \mathbb{P}(\tilde{I}_n = i) \end{aligned}$$

or $\Delta\tilde{R}_n | \tilde{I}_n = i \sim \mathcal{B}(i, \rho)$ donc $\mathbb{E}(\Delta\tilde{R}_n | \tilde{I}_n = i) = i\rho$ d'où :

$$\mathbb{E}(\Delta\tilde{R}_n) = \sum_{i=0}^M i\rho \mathbb{P}(\tilde{I}_n = i) = \rho \mathbb{E}(\tilde{I}_n)$$

- 25.** En supposant $\tilde{S}_n = s$ et $\tilde{I}_n = i$, parmi les s personnes saines chaque personne va devenir infectée indépendamment des autres avec une probabilités $p(i)$. Ainsi si l'on note X_i la variable aléatoire correspond à une personne saine (vaut 1 si elle s'infecte entre n et $n + 1$ et 0 sinon, $X_i \sim \mathcal{B}(p(i))$), alors le nombre d'infections d'une journée à l'autre vaudra :

$$N | (\tilde{S}_n, \tilde{I}_n, \tilde{R}_n) = (s, i, r) = \sum_{i=1}^s X_i \sim \mathcal{B}(s, p(i))$$

car les infections sont indépendantes entre elles. Finalement :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\Delta\tilde{S}_n = -k | (\tilde{S}_n, \tilde{I}_n, \tilde{R}_n) = (s, i, r)) &= \mathbb{P}(N = k | (\tilde{S}_n, \tilde{I}_n, \tilde{R}_n) = (s, i, r)) \\ &= \binom{s}{k} (p(i))^k (1 - p(i))^{s-k} \end{aligned}$$

- 26.** En reprenant Q22 pour $Z = -\Delta\tilde{S}_n$ à valeur dans $\llbracket 0, s \rrbracket$, on obtient :

$$\mathbb{E}(-\Delta\tilde{S}_n) = \sum_{(s,i,r) \in E} \underbrace{\left(\sum_{k=0}^s k \mathbb{P}(\Delta\tilde{S}_n = -k | (\tilde{S}_n, \tilde{I}_n, \tilde{R}_n) = (s, i, r)) \right)}_{= \mathbb{E}(\Delta\tilde{S}_n | (\tilde{S}_n, \tilde{I}_n, \tilde{R}_n) = (s, i, r))} \mathbb{P}((\tilde{S}_n, \tilde{I}_n, \tilde{R}_n) = (s, i, r))$$

or d'après la question précédente, on a $\Delta\tilde{S}_n | (\tilde{S}_n, \tilde{I}_n, \tilde{R}_n) = (s, i, r) \sim \mathcal{B}(s, p(i))$. D'où on tire :

$$\mathbb{E}(\Delta\tilde{S}_n | (\tilde{S}_n, \tilde{I}_n, \tilde{R}_n) = (s, i, r)) = sp(i)$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(-\Delta\tilde{S}_n) &= \sum_{(s,i,r) \in E} sp(i)\mathbb{P}((\tilde{S}_n, \tilde{I}_n, \tilde{R}_n) = (s, i, r)) \\ &= \sum_{s,i} sp(i)\mathbb{P}((\tilde{S}_n, \tilde{I}_n) = (s, i)) \\ &= \mathbb{E}(\tilde{S}_n p(\tilde{I}_n))\end{aligned}$$

d'après le théorème de transfert.

Remarque : on a pu faire disparaître le r et le $\mathbb{P}(\tilde{R}_n = r)$ car les guérisons sont indépendantes du reste et on peut donc les sortir et finalement on obtient $\sum_r \mathbb{P}(\tilde{R}_n = r) = 1$ par définition.

On sait (c'est évident, mais sinon je sais pas trop comment le dire) que pour tout n :

$$\tilde{S}_n + \tilde{I}_n + \tilde{R}_n = M \quad \implies \quad \Delta\tilde{S}_n + \Delta\tilde{I}_n + \Delta\tilde{R}_n = 0$$

puis en appliquant la linéarité de l'espérance et l'ensemble des résultats précédents, on obtient :

$$\mathbb{E}(\Delta I_n) = \mathbb{E}(\tilde{S}_n p(\tilde{I}_n)) - \rho \mathbb{E}(\tilde{I}_n)$$