cpge-paradise.com

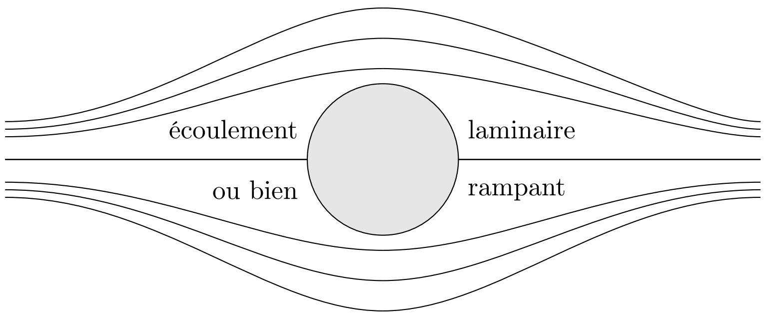
CCMP, Physique 1 PC : la viscosité

Solutions proposées par Paul Roux

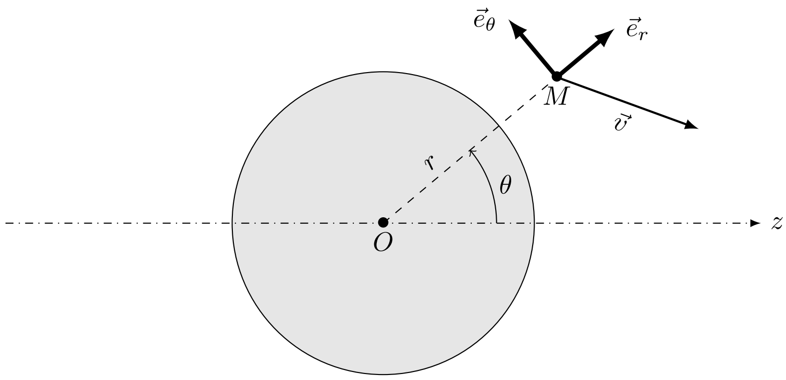
Juin 2025

1 La formule de Stokes

1. $\boxed{\mathcal{R}_e = \dfrac{\rho v L}{\eta}}$ est un nombre sans dimension qui compare le terme d'accélération convective $\vec{a}_c = \left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\right)\vec{v} \sim v^2/L$ et le terme du bilan des forces du forces de viscosité par unité de volume $\vec{f}_v \eta \Delta\vec{v} \sim \eta v/L^2$. Ainsi on aura en ordres de grandeur $\boxed{\mathcal{R}_e \sim \dfrac{\rho\|\vec{a}_c\|}{\|\vec{f}_v\|}}$. Le numérateur mesure les transferts $\boxed{\text{convectifs}}$ de quantité de mouvement et le dénominateur des transports $\boxed{\text{diffusifs}}$.
2. Si $\mathcal{R}_e$ est assez grand (typiquement 2 000 ou plus), l'écoulement est potentiellement $\boxed{\text{turbulent}}$ et les lignes de courant peuvent être tourbillonnaires. Si $\mathcal{R}_e$ est nettement plus faible, l'écoulement est $\boxed{\text{laminaire}}$, les lignes de courant régulièrement disposées et sans échange de matière entre les couches définies par ces lignes. Dans le cas où $\mathcal{R}_e \ll 1$ les forces visqueuses sont complètement prédominantes et l'écoulement est dit $\boxed{\text{rampant}}$.



Dans le cas rampant l'écoulement doit être nul en un point de contact avec l'obstacle (c'est la condition de non–glissement), $\boxed{\lim\limits_{r\to a^+} \vec{v}(M) = \vec{0}}$. La géométrie des vecteurs de base sphériques est représentée ci-dessous.



3. Dans le cas turbulent, la force de traînée est $\boxed{\text{proportionnelle à } v_0^2}$ avec un coefficient de proportionnalité qui dépend de la forme de l'obstacle mais assez peu de la nature de l'écoulement.
4. Puisqu'ici $|F_z| = 6\pi\eta a v$ et en prenant pour dimension caractéristique $L = 2a$ la largeur de l'obstacle, on trouve $C_x = \dfrac{12\eta}{\rho v a}$ tandis que $\mathcal{R}_e = \dfrac{2\rho v a}{\eta}$ donc $\boxed{C_x = \dfrac{24}{\mathcal{R}_e}}$.

cpge-paradise.com

5. On néglige la pesanteur ; l'écoulement est stationnaire donc $\dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}$; enfin l'écoulement est rampant donc on néglige l'accélération convective et il reste donc $\boxed{\overrightarrow{\text{grad}}\, P = \eta \Delta \vec{v}}$.

6. Pour $r \to a^+$, les équations proposées imposent $\boxed{v_r \to 0 \text{ et } v_\theta \to 0}$: c'est bien la condition de non–glissement. Pour $r \to \infty$, $\vec{v} \sim v_0 (\cos\theta \vec{e}_r - \sin\theta \vec{e}_\theta)$ qu'on peut aussi écrire $\boxed{\vec{v} \sim v_0 \vec{e}_z}$ comme demandé.

7. Il suffit d'appliquer l'expression rappelée du rotationnel. Comme $v_\varphi = 0$ et $\dfrac{\partial}{\partial \varphi} = 0$ ce rotationnel n'a qu'une composante, $\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{v} = \dfrac{v_0}{r}\left[-\sin\theta\left(1 + \dfrac{a^3}{2r^3}\right) + \sin\theta\left(1 - \dfrac{3a}{2r} + \dfrac{a^3}{2r^3}\right)\right]\vec{e}_\varphi$ qui après simplification prend la forme demandée $\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{v} = -\alpha \dfrac{v_0 a \sin\theta}{r^2}\vec{e}_\varphi$ avec $\boxed{\alpha = \dfrac{3}{2}}$.

8. On a vu que $\overrightarrow{\text{grad}}\, P = \eta\left[\overrightarrow{\text{grad}}\text{div}\, \vec{v} - \overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{v}\right]$ mais l'écoulement est incompressible donc $\text{div}\, \vec{v} = 0$ nécessairement et il ne reste que $\overrightarrow{\text{grad}}\, P = \eta \overrightarrow{\text{rot}}\left[\dfrac{3v_0 a \sin\theta}{r^2}\vec{e}_\varphi\right]$. Revenant au formulaire fourni on calcule alors $\overrightarrow{\text{grad}}\, P = \dfrac{3v_0 \eta a}{2r^3}\left[2\cos\theta \vec{e}_r + \sin\theta \vec{e}_\theta\right]$. On reconnaît d'ailleurs ici une expression de champ dipolaire donc on ne sera pas surpris de trouver pour P une expression de potentiel dipolaire… à une constante additive près ! On peut montrer que la solution proposée par l'énoncé convient en calculant pour celle-ci $\dfrac{\partial P}{\partial r} = \dfrac{2\beta \cos\theta}{r^3}$ et $\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial P}{\partial \theta} = \dfrac{\beta \sin\theta}{r^3}$ qui permet l'identification de $\boxed{\beta = \dfrac{3}{2}\eta v_0 a}$.

9. La résultante des forces de pression $\vec{F}_p = -\oint P\, d\vec{S}$ comporte deux termes ; le premier est l'intégrale du terme constant P_0 qui correspond à une force résultante nulle et le second est donc $\vec{F}_p = \oint \dfrac{\beta}{a^2}\vec{e}_r \cos\theta a^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$. L'intégration se fait après projection, $\vec{e}_r = \cos\theta \vec{e}_z + \sin\theta(\cos\varphi \vec{e}_x + \sin\varphi \vec{e}_y)$. Les composantes F_x et F_y sont alors nulles du fait de $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos\varphi\, d\varphi = \int_0^{2\pi} \sin\varphi\, d\varphi = 0$ et il ne reste que $\vec{F}_p = 2\pi\beta \vec{e}_z \mathcal{I}$ où $\mathcal{I} = \displaystyle\int_0^{\pi} \cos^2\theta \sin\theta\, d\theta$. Cette dernière intégrale se calcule au moyen du changement de variable $x = \cos\theta$ donc $\mathcal{I} = \displaystyle\int_{-1}^{1} x^2 dx = \dfrac{2}{3}$ et finalement $\boxed{\vec{F}_p = 2\pi v_0 \eta a \vec{e}_z}$.

10. $v_\theta = -v_0 \sin\theta\left(1 - \dfrac{3a}{4r} - \dfrac{a^3}{4r^3}\right)$ donc $\dfrac{\partial v_\theta}{\partial r} = -\dfrac{3}{4}v_0 \sin\theta\left(\dfrac{a}{r^2} + \dfrac{a^3}{r^4}\right)$ et donc $d\vec{F}_c = -\eta \dfrac{3v_0 \sin\theta}{2a} dS \vec{e}_\theta$ avec $dS = a^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$ et $\vec{e}_\theta = -\sin\theta \vec{e}_z + \cos\theta\left[\cos\varphi \vec{e}_x + \sin\varphi \vec{e}_y\right]$. Ici encore les composantes sur $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$ sont nulles par raison de symétrie et il ne reste que $\vec{F}_c = \dfrac{3\eta v_0 a}{2}\mathcal{J}\vec{e}_z$ avec $\mathcal{J} = \displaystyle\int_0^{\pi} \sin^3\theta d\theta$. Le même changement de variable $x = \cos\theta$ montre que $\mathcal{J} = \displaystyle\int_{-1}^{1}(1 - x^2)dx = \dfrac{4}{3}$. On a donc $\boxed{\vec{F}_c = 4\pi v_0 \eta a \vec{e}_z}$.

11. La résultante des forces de pression et de cisaillement exercées sur la surface de la boule est $\vec{F} = 6\pi v_0 \eta a \vec{e}_z$ qu'on écrit $\boxed{\vec{F} = -6\pi \vec{v}_0 \eta a}$: c'est la formule de Stokes.

2 Glissement d'un gaz à la surface d'un solide

12. La moitié des molécules ne subissent pas de choc et poursuivent donc à la vitesse $u_i(\ell)$. Une proportion $(1 - \sigma)$ de l'autre moitié subit un choc élastique et poursuit donc son mouvement à la même vitesse $u_i(\ell)$ après le choc. Enfin, les molécules restantes sont arrêtées ; finalement la vitesse moyenne s'écrira $u_r = \dfrac{1}{2}u_i(\ell) + \dfrac{1}{2}(1 - \sigma)u_i(\ell) + \dfrac{1}{2}\sigma \times 0$ ou $\boxed{u_r = \dfrac{2 - \sigma}{2}u_i(\ell)}$. La paroi étant fixe, la vitesse de glissement s'identifie à cette vitesse moyenne après interaction, $\boxed{u_g = u_r = \dfrac{2 - \sigma}{2}u_i(\ell)}$.

13. Le DL demandé est $\left.\dfrac{\partial u}{\partial z}\right|_0 \simeq \dfrac{u_i(\ell) - u_i(0)}{\ell}$ avec $u_i(0) = u_g$ donc $\boxed{u_i(\ell) = u_g + \ell \left.\dfrac{\partial u}{\partial z}\right|_0}$. La condition aux limites

cpge-paradise.com

de Maxwell $u_g = b \left.\dfrac{\partial u}{\partial z}\right|_0$ devient alors $u_g = \dfrac{b}{\ell}(u_i - u_g)$ donc $u_i(\ell) = u_g\left(1 + \dfrac{\ell}{b}\right)$ ou enfin $\dfrac{b}{b+\ell} = \dfrac{2-\sigma}{\sigma}$ qu'on écrit enfin $\boxed{b = 2\ell\dfrac{1-\sigma}{\sigma}}$.

14. Les conditions sont les mêmes que celles de la question 5 donc $\overrightarrow{\text{grad}}\, P = \eta\Delta\vec{v} = \eta\dfrac{d^2u}{dz^2}\vec{e}_x$ soit $\boxed{G = -\dfrac{d^2u}{dz^2}}$.

15. L'intégration de l'équation précédente fournit $u(z) = -\dfrac{G}{2\eta}z^2 + Az + B$; les constantes d'intégration A et B se déduisent des conditions aux limites $u(h/2) = u(-h/2) = 0$ donc $A = 0$ et $B = \dfrac{Gh^2}{8\eta}$ ou $\boxed{u_{ng}(z) = \dfrac{G}{2\eta}\left(\dfrac{h^2}{4} - z^2\right)}$.
Le débit volumique de déduit de la relation générale $Q = \displaystyle\int \vec{v}\cdot d\vec{S}$ soit ici $Q_{ng} = \displaystyle\int_{-h/2}^{h/2} u_{ng}(z)\,dz\,w$ ou après calcul $\boxed{Q_{ng} = \dfrac{Gh^3w}{12\eta}}$.

16. Cette fois-ci on détermine A et B en utilisant la parité (donc $A = 0$) et la condition aux limites en $z = +\dfrac{h}{2}$ (et pas en $-h/2$ car le raisonnement sur la condition de Maxwell dépend du signe de z !) qui fournit $-\dfrac{G}{2\eta}\dfrac{h^2}{4} + B = b\dfrac{Gh}{2\eta}$.
On trouve aisément $\boxed{u_g(z) = u_{ng}(z) + \dfrac{Gbh}{2\eta}}$. Le supplément de vitesse se traduit par un supplément de débit, $Q_g = Q_{ng} + \dfrac{Gbh}{2\eta}hw$ qu'on peut recopier comme demandé $\boxed{Q_g = Q_{ng}\,(1 + 6\xi)}$. Si on ne considère plus que la vitesse doit s'annuler sur les parois, l'écoulement est plus rapide et le débit logiquement plus élevé que dans le modèle sans glissement.

3 Approche microscopique de la viscosité

17. Par définition $\langle e_c\rangle = \dfrac{1}{2}m\delta v^2$ tandis que le théorème d'équipartition permet d'écrire $\langle e_c\rangle = \dfrac{3}{2}k_{\mathrm{B}}T$; comme $m = \mathcal{M}/\mathcal{N}_{\mathrm{A}}$ on en déduit $\boxed{\delta v = \sqrt{\dfrac{3k_{\mathrm{B}}\mathcal{N}_{\mathrm{A}}T}{\mathcal{M}}}}$. Prenant $T \simeq 300\,\mathrm{K}$ on trouve facilement $\boxed{\delta v \simeq 500\,\mathrm{m/s}}$.

18. Dans chaque couche $\dfrac{1}{6}$ des molécules (en moyenne) ont la direction de vitesse nécessaire pour changer de couche ; elles sont donc $\dfrac{1}{6}nS\ell$ à partir avec leur quantité de mouvement $mu(z-\ell)\vec{e}_x + m\delta v\vec{u}_z$. La couche A perd donc $\dfrac{nS\ell}{6}\left[u(z-\ell)\vec{e}_x + \delta v\vec{e}_z\right]$ et, dans le même temps, elle gagne bien sûr $\dfrac{nS\ell}{6}\left[u(z+\ell)\vec{e}_x - \delta v\vec{e}_z\right]$. cet échange de quantité de mouvement dure pendant $\tau = \dfrac{\ell}{\delta v}$; pendant la durée Δt, il faut donc multiplier par $\dfrac{\Delta t}{\tau}$ l'échange décrit ci-dessus pour trouver $\boxed{d\vec{P}_A = \dfrac{nm\,\delta v\,\Delta t}{6}\left[\left(u(z+\ell) - u(z-\ell)\right)\vec{e}_x - 2\delta v\vec{e}_z\right]}$.

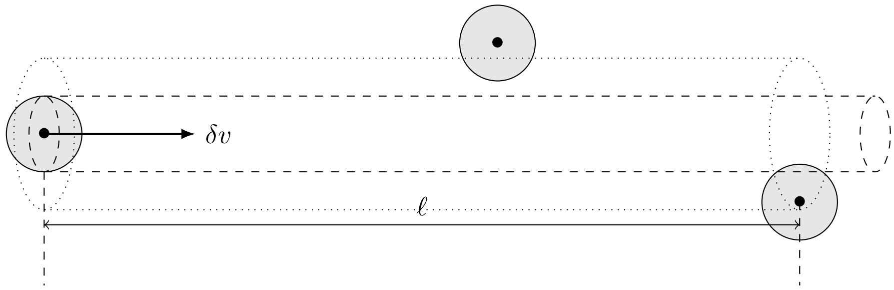
19. Il n'y a d'échange qu'entre ces deux couches donc $\boxed{d\vec{P}_B = -d\vec{P}_A}$. On peut donc écrire la force exercée par B sur A, $\vec{F} = \dfrac{d\vec{P}_A}{\Delta t}$ soit $\boxed{\vec{V} = -F_n\vec{e}_z + F_t\vec{u}_x}$ avec pour composante normale $\boxed{F_n = PS}$ où on reconnaît l'expression $\boxed{P = \dfrac{1}{3}nm\delta v^2}$ (qui s'identifie à $P = nk_{\mathrm{B}}T$) de la pression au sein d'un gaz parfait, et $\boxed{F_t = \dfrac{nm}{6}\delta v\left(u(z+\ell) - u(z-\ell)\right)S}$ ou, dans le cadre d'un développement au premier ordre, $\boxed{F_t = \dfrac{nm\ell}{3}\delta v\dfrac{\partial u}{\partial z}S}$ qui s'identifie au modèle de Newton $F_t = \eta S\dfrac{\partial u}{\partial z}$ des forces de cisaillement.

20. L'identification fournit $\boxed{\eta = \dfrac{1}{3}nm\ell\,\delta v}$. Pour l'application numérique, $n = \dfrac{P}{k_{\mathrm{B}}T}$ et $m = \dfrac{\mathcal{M}}{\mathcal{N}_{\mathrm{A}}}$ fournissent sans difficulté $\boxed{\eta \simeq 10^{-4}\,\mathrm{Pa{\cdot}s}}$; on se trouve un ordre de grandeur au dessous des valeurs expérimentales usuelles (de

cpge-paradise.com

l'ordre de 10^{-3} Pa·s pour l'air).

21. Le libre parcours moyen ℓ est la distance à laquelle une molécule se trouve à l'intérieur du cylindre parcouru par une des autres molécules, supposée de vitesse δv. Si on assimile les molécules à des boules de diamètre d, il faut pour cela que le cylindre de longueur ℓ et de rayon d contienne le centre d'une seule molécule.



On a donc $\boxed{n = \dfrac{1}{\pi d^2 \ell}}$. La viscosité prend alors pour expression $\boxed{\eta = \dfrac{m\pi d^2}{3}\delta v}$ qui ne dépend effectivement pas de la pression. Dans ce modèle, il s'agit de al compensation exacte de deux effets de l'augmentation de la pression : la densité particulaire n augmente mais le libre parcours moyen ℓ diminue.

Finalement η est proportionnelle à δv donc $\boxed{\text{proportionnelle à } \sqrt{T}}$.

22. L'échelle est logarithmique et on observe une assez bonne droite de pente 1/2, ce qui est bien $\boxed{\text{conforme}}$ au modèle précédent.