

MINES PSI 2025 - PHY 1

Rothlingshofer Yanic

Contact : Pour toute remarque, suggestion ou signalement d'erreur : yrothlin-24@telecom-paris.fr.

Remarque : Ce document peut contenir des coquilles ou des inexactitudes (fautes de signes, inattentions, etc.). Merci de ne pas tout prendre au pied de la lettre et de me faire part de vos retours (il a été rédigé juste après l'épreuve donc dans la précipitation). Ce document sert principalement à fournir des pistes qu'à prétendre fournir une correction exacte (même si j'essaie d'être le plus rigoureux possible).

Partie 1. Canon à eau

1. On considère le système constitué d'une goutte d'eau après être sortie du canon. On néglige toute interaction entre les gouttes et en faisant l'hypothèse $l \ll L$, on assimile le point $(0, 0)$ entre le début et la sortie du canon pour le mouvement de la goutte. En négligeant tous frottements cette goutte n'est soumise qu'au champ de pesanteur $\vec{g}$ et donc d'après le principe fondamental de la dynamique, on a :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{P}$$

où m correspond à la masse d'une goutte d'eau supposée constante dans le temps. En projetant sur les axes $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_z$, on obtient :

$$m \frac{dv_x}{dt} = m\ddot{x}(t) = 0 \quad (1)$$

$$m \frac{dv_z}{dt} = m\ddot{z}(t) = -mg \quad (2)$$

De (1) on déduit $x(t) = At + B$ or $x(0) \simeq 0$ et $\dot{x}(0) = v_0 \cos(\alpha)$ où α est l'angle que fait le canon avec l'horizontale et v_0 la norme de la vitesse de la goutte à la sortie du canon. De même, on a :

$$z(t) = -\frac{g}{2}t^2 + At + B$$

avec $B \simeq 0$ et $\dot{z}(0) = v_0 \sin(\alpha) = A$. Finalement :

$$x(t) = v_0 \cos(\alpha)t \quad \text{et} \quad z(t) = -\frac{g}{2}t^2 + v_0 \sin(\alpha)t$$

Lorsque la goutte atteint le sol, pour un temps $T > 0$, on a :

$$x_f = x(T) = v_0 \cos(\alpha)T \quad \text{et} \quad 0 = -\frac{1}{2}gT^2 + v_0 \sin(\alpha)T$$

On en déduit $T = \frac{2v_0 \sin(\alpha)}{g}$ puis on injecte dans x :

$$x_f(\alpha) = \frac{v_0^2}{g} \sin(2\alpha) \quad (3)$$

Puis la $\frac{dx_f}{d\alpha} = 2\frac{v_0^2}{g} \cos(2\alpha)$ qui est positif pour $\alpha \in [0, \pi/2]$ et donc x_f est bien une fonction croissant de α sur cet intervalle puis le max est donnée pour $\alpha = \pi/4$!

On prend alors $\alpha = \pi/4$ et on veut (énoncé) que $x_f = L$ (au moins). Ainsi de (3) on déduit $v_0 = \sqrt{Lg} \simeq 38 \text{ m s}^{-1}$ (correct en analyse dimensionnelle). Finalement, en supposant que la vitesse de l'eau est constante sur une section du canon (hypothèse de faible viscosité), on veut que $\pi \frac{d^2}{4} v_0 = D$ avec $D = 0.1 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$. Ainsi :

$$d = \sqrt{\frac{4D}{v_0\pi}} = \sqrt{\frac{4D}{\sqrt{Lg}\pi}}$$

A.N : $d \simeq 20 \text{ cm}$

2. Si l'on considère une particule fluide du jet que l'on considère comme stationnaire et en négligeant le poids, l'équation d'Euler nous donne :

$$(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\vec{\nabla} P$$

donc à l'ordre 1, on a $\vec{\nabla} P \simeq 0$ et donc la pression est uniforme dans la particule fluide. De plus la continuité à l'interface avec l'air nous donne $P = P_0$. (Justification un peu bancal mais bon en concours on fait ce qu'on peut). L'eau est considérée comme un fluide incompressible et on peut assimiler l'écoulement à un écoulement parfait (non visqueux et incompressible) et on peut supposer l'écoulement stationnaire. Ainsi on peut appliquer le principe de Bernoulli le long d'une ligne de courant :

$$P_A + \frac{1}{2} \rho_0 v_A^2 + \rho g z_A = P_B + \frac{1}{2} \rho_0 v_B^2 + \rho g z_B$$

soit $v_A^2 - v_B^2 = 2g(z_B - z_A)$ en prenant $A = (0, 0)$ à la sortie du canon, on a $v_B^2 = v_0^2 - 2gz_B$. Ainsi v est minimale lorsque z est maximale or $z_{max} = \frac{(v_0 \sin(\alpha))^2}{2g}$ en utilisant la question précédente et donc :

$$v_{min} = v_0 \cos(\alpha) = \frac{v_0}{\sqrt{2}}$$

3. Le nombre de Reynolds s'écrit :

$$Re = \frac{\rho U L}{\eta}$$

où U est la vitesse débitant moyenne de l'écoulement et L la grandeur caractéristique (ici le diamètre du tuyau typiquement). En prenant $U \simeq v_0$ et $L = d$, on a :

$$Re = \frac{10^3 \times 38 \times 0.2}{10^{-3}} \simeq 8.10^6$$

Puisque Re caractérise le rapport entre les forces inertiels et les forces de viscosité, on en déduit que l'écoulement est largement turbulent ($Re \gg 2000$)

4. On prend $d \simeq 4.10^{-1} \text{m}$. Ainsi les valeurs extrêmes de la rugosité relative sont $2,5.10^{-4}$ et $2,5.10^{-3}$, on trouve $\xi = 0.014$ et $\xi = 0.025$. Finalement ΔP est compris entre $5,6.10^4 \text{ Pa}$ et 1.10^5 Pa . Ainsi la pression à l'entrée du canon vaut entre $\sim 1,5P_0$ et $2P_0$.
5. En supposant l'écoulement stationnaire et en appliquant le premier principe industriel (en négligeant toute puissance thermique) :

$$\mathcal{P} = D_m(\Delta h + \Delta e_c + \Delta e_p)$$

avec h, e_c, e_p des énergies massiques. Ici $\Delta e_p = 0$, $\Delta e_c = \frac{1}{2} v_0^2$ puis $\delta h = \frac{P_e - P_0}{\rho_0}$. De plus le fluide est incompressible donc $D_m = \rho_0 D_v$. Finalement :

$$\mathcal{P} = \rho_0 D_v \left(\frac{P_e - P_0}{\rho_0} + \frac{1}{2} v_0^2 \right)$$

La puissance utile en sortie du canon vaut $\frac{1}{2} \rho_0 D_v v_0^2$ et donc :

$$k = \frac{\frac{1}{2} \rho_0 D_v v_0^2}{\mathcal{P}} = \frac{1}{1 + \frac{2(P_e - P_0)}{\rho_0 v_0^2}}$$

6. A.N : $\mathcal{P} \simeq 122 \text{ kW}$ et $k \simeq 60\%$. On observe que 40% de l'énergie sert à compenser les pertes de charge ce qui est considérable.

Partie 2. Canon à propulsion chimique

7. Par la première loi de Joule on sait que $U_m(T)$ uniquement donc :

$$dU_m = \left(\frac{\partial U_m}{\partial T} \right) dT$$

De plus, on a d'après (3) :

$$S_m(T, V_m) = S_0 + \frac{R}{\gamma - 1} \ln(T) + R \ln(V_m - b)$$

ainsi $dS_m = \frac{R}{T} \frac{1}{\gamma-1} dT + \frac{R}{V_m-b} dV_m$. Puis en injectant cette expression dans (2), on obtient :

$$dU_m = \frac{R}{\gamma-1} dT + \left(\frac{RT}{V_m-b} - P \right) dV_m$$

Par unicité de la différentielle, on a le deuxième terme devant dV_m qui est nul et donc :

$$P = \frac{RT}{V_m-b} = \frac{nRT}{V-nb}$$

De plus, $\frac{\partial U_m}{\partial T} = \frac{R}{\gamma-1}$ d'où :

$$U_m(T) = \frac{R}{\gamma-1} T + K$$

De plus, dans le cas d'un GP monoatomique on a $C_{v,m} = \frac{3}{2}R$ ce qui impliquerait $\gamma = \frac{5}{3}$. ($dU_m = C_{v,m}dT$ puis on identifie). Autre justification compte tenu de la question suivant, on a un GP monoatomique si $nb \ll V$.

8. Par définition, on a $C_{v,m} = \frac{\partial U_m}{\partial T}$ à volume constant et $C_{p,m} = \frac{\partial H_m}{\partial T}$ à pression constante. Par identification, on en déduit :

$$C_{v,m} = \frac{R}{\gamma-1}$$

Or $H_m = U_m - PV_m$ avec $V_m = \frac{RT}{P} + b$. On en déduit :

$$H_m(T, P) = U_m(T) + RT - Pb$$

avec Pb constant. Ainsi :

$$\frac{\partial H_m}{\partial T} = C_{v,m} + R = C_{p,m} = \frac{\gamma}{\gamma-1} R$$

on retrouve la relation de Mayer pour les GP (attention à ne pas l'utiliser directement car nous ne sommes pas dans son cadre d'application du cours).

9. Dans le cas d'une transformation isentropique, on a $dS_m = 0$. En particulier d'après (3) :

$$\ln(T^{\frac{1}{\gamma-1}}(V_m-b)) = \text{cst}$$

d'où $T^{\frac{1}{\gamma-1}}(V_m-b) = \text{cst}$. Or $T = P(V_m-b)/R$ d'où :

$$P^{\frac{1}{\gamma-1}}(V_m-b)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \text{cst}$$

soit finalement $P(V_m-b)^\gamma = \text{cst}$. On retrouve la loi de Laplace.

10. Puisque δW correspond au travail des forces de pression qui est reçu par le gaz donc positif, et que δQ est la chaleur reçue donc positive, on en déduit $\kappa > 0$.

11. Ici le volume augmente lors de la détente donc $dV > 0$, on prend $\delta W = P_{ext}dV$ et :

$$dS = \frac{\delta Q}{T} = \kappa \frac{P_{ext}}{T} dV$$

Puisqu'on suppose la transformation infinitésimale réversible, on considère qu'il y a équilibre à tout instant et $P = P_{ext}$. On a alors :

$$dS_m = \frac{\kappa P}{T} dV_m \quad \text{et} \quad dS_m = \frac{R}{T} \frac{1}{\gamma-1} dT + \frac{R}{V_m-b} dV_m$$

Ainsi en remplaçant $T = P(V_m-b)/R$, il vient :

$$\frac{R}{P} \frac{1}{\gamma-1} dP + R \frac{1-\kappa}{V_m-b} dV_m = 0$$

d'où l'on sort $d \ln(P^{\frac{1}{\gamma-1}}(V_m-b)^{1-\kappa}) = 0$ d'où :

$$P^{\frac{1}{\gamma-1}}(V_m-b)^{1-\kappa} = \text{cst}$$

soit $P(V_m-b)^q = \text{cst}$ avec $q = (\gamma-1)(1-\kappa)$.

12. D'après la question précédente, on a $P(V - nb)^q = \text{cst}$. Donc $P(t)(V(t) - nb)^q = P_i(V_c - nb)^q$. Soit :

$$P(t) = P_i \left(\frac{V_c - nb}{V_c - nb - \pi a^2 X(t)} \right)^q = P_i \frac{1}{\left(1 - \frac{\pi a^2 X(t)}{V_c - nb} \right)^q}$$

puis $F_p(t)$ en norme (on ne se préoccupe pas du sens dans lequel elle agit) :

$$F_p(t) = P(t)\pi a^2 = P_i \frac{\pi a^2}{\left(1 + \frac{\pi a^2 X(t)}{V_c - nb} \right)^q}$$

13. Enfaite, même si l'on écrit $F_p(t)$, on a $F_p(X(t))$ et en dimension 1 on peut juste écrire $F_p(x)$. On sait que F_p est conservative si elle dérive d'un potentiel U tel que $F_p(x) = -\frac{dU}{dx}$. Or ici on remarque (on a trafiqué au brouillon surtout) qu'en posant :

$$U(x) = \begin{cases} -P_i \pi a^2 \frac{V_c - nb}{\pi a^2} \ln\left(1 + \frac{\pi a^2 X}{V_c - nb}\right) & \text{si } q = 1 \\ P_i \pi a^2 \frac{V_c - nb}{\pi a^2} \frac{1}{q-1} \left(\frac{1}{\left(1 + \frac{\pi a^2 x}{V_c - nb}\right)^{q-1}} \right) & \text{si } q > 1 \end{cases}$$

(à une constante près), on obtient le résultat voulu.

14. On a appliqué le PFD au projectile dans le référentiel terrestre supposé gali. lié à la terre, qui n'est soumis qu'à la force de pression $F_p(t)$ qui le pousse dans la direction de x puis on obtient :

$$M\ddot{X}(t) = P_i \frac{\pi a^2}{\left(1 + \frac{\pi a^2 X(t)}{V_c - nb} \right)^q}$$

(à un signe moins près, j'ai pas vraiment fait gaffe). Autant dire qu'on ne risque pas de la résoudre comme ça.

15. Puisque le projectile n'est soumis qu'à une force conservative (on néglige les poids et les frottements) et qu'on a un unique degré de liberté de translation selon x , on a d'après le théorème de l'énergie mécanique :

$$\Delta E_m = \Delta(E_c + U) = 0$$

Supposons $q > 1$, on a d'après Q12 :

$$E_c(x_s) - E_c(0) + U(x_s) - U(0) = 0$$

or $E_c(0) = 0$ (pas d'impulsion à $t = 0$) et on a alors :

$$p_s^2 = 2M(U(0) - U(x_s))$$

Or $U(0) = C = P_i(V_c - nb) \frac{1}{q-1}$ et en $x_s = l$ (à la sortie = longueur du canon), on a :

$$U(l) = C \frac{1}{\left(1 - \frac{\pi a^2 l}{V_c - nb} \right)^{q-1}} = C \left(\frac{\frac{V_c - nb}{\pi a^2}}{\frac{V_c - nb}{\pi a^2} + l} \right)^{q-1}$$

Ainsi :

$$p_s^2 = 2MC \left(1 - \left(\frac{\frac{V_c - nb}{\pi a^2}}{l + \frac{V_c - nb}{\pi a^2}} \right)^{q-1} \right)$$

et donc :

$$p_s = p_\infty \sqrt{1 - \left(\frac{X_0}{l + X_0} \right)^{q-1}}$$

avec $p_\infty = \sqrt{\frac{2MP_i(V_c - nb)}{q-1}}$ et $X_0 = \frac{V_c - nb}{\pi a^2}$. Puis avec $P_i(V_c - nb) = nRT_i$, on a :

$$p_\infty = \sqrt{\frac{2MnRT_i}{q-1}} \quad \text{et} \quad X_0 = \frac{V_c - nb}{\pi a^2}$$

on remarque bien que X_0 est homogène à une distance et sachant que des pascal correspondent à des $\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-2}$, on trouve bien que p_∞ est homogène à une quantité de mouvement.

On remarque que p_∞ est une fonction croissante de la température ce qui est logique, plus la combustion est chaude, plus elle dégage d'énergie qui servira à pousser le projectile. De plus p_∞ correspond à l'impulsion si le canon était infiniment long, il y a tout de même des petits problèmes de cohérence dans ce modèle parce qu'on se doute que le projectile va bien finir par s'arrêter (à cause des pertes par frottements) même si la combustion est très très chaude.

Partie 3. Canon électromagnétique

15. En tant que bon vecteur axial, $\vec{B}$ est orthogonal à tout plan de symétrie de la distribution de courant. Or pour tout M de l'espace, $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ est un plan de symétrie pour la distribution de courant donc :

$$\vec{B}(M) = B_\theta(M) \vec{e}_\theta$$

Remarque, la distribution de courant également invariant par translation en z et rotation en θ donc $\vec{B}(M) = B(r) \vec{e}_\theta$ avec $B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ (cours ou théorème d'Ampère mais c'est un peu la honte de pas savoir ça).

16. Grosse question. Par définition,

$$a = \ddot{x}(t) \implies x(t) = \frac{1}{2}at^2 + At + B$$

avec $x(0) = 0 = B$ puis $\dot{x}(0) = 0 = A$ puis $l = x(\Delta t) = \frac{1}{2}a(\Delta t)^2$. Ainsi :

$$\Delta t = \sqrt{\frac{2l}{a}}$$

De plus, $p_s = ma\Delta t = m\sqrt{2la}$ donc $a = \frac{1}{2l} \left(\frac{p_s}{m}\right)^2$. En faisant de très grosse approximation, on peut négliger le poids si $ma \gg mg$ soit $a \gg g$. Or avec les valeurs fournies par l'énoncé, on a $a \simeq 10^5 \gg g$. Donc il est "légitime" de négliger le poids.

17. La force de Laplace s'exerçant sur un conducteur s'écrit $\vec{F}_L = I \vec{d} \wedge \vec{B}$. On a donc $\vec{F}_L = IdB_0 \vec{e}_z$. Pour obtenir la même impulsion en sortie de canon, il faut pouvoir écrire $m\vec{a} = \vec{F}_L$ (constante) et donc $B_0 = \frac{ma}{Id}$.

18. On a $B(d/2) = B_0 = \frac{\mu_0 I}{\pi d}$ d'où $I = \frac{B_0 \pi d}{\mu_0} = \frac{ma\pi}{I\mu_0}$ d'où $I = \sqrt{\frac{ma\pi}{\mu_0}}$.

19. Remarquons d'abord que :

$$I^2 \Delta t = \frac{ma\pi}{\mu_0} = \frac{\pi}{\mu_0} p_s$$

Par conservation de l'énergie, on a $E_{elec} = E_{meca} + RI^2 \Delta t$, toute l'énergie électrique est convertie d'une part en énergie mécanique et en chaleur par effet Joule. Par définition, on a :

$$\eta = \frac{\frac{1}{2m} p_s^2}{\frac{1}{2m} p_s^2 + RI^2 \Delta t} = \frac{\frac{\mu_0}{2m\pi} p_s}{R + \frac{\mu_0}{2m\pi} p_s}$$

puis on pose $R_u = \frac{\mu_0}{2m\pi} p_s$, d'après l'énoncé on a $R_u \simeq 10^{-7}$ or les résistances des conducteurs usuels sont en 10^{-2} ou 10^{-3} donc $R_u \ll R$ et on peut écrire :

$$\eta \simeq \frac{R_u}{R}$$

On remarque que le rendement est très petit, la majorité de l'énergie est dissipée en chaleur par effet Joule!

20. La loi de Faraday s'écrit :

$$e = -\frac{d\varphi}{dt}$$

où φ est le flux du champ magnétique et e la force électromotrice. Ici le circuit électrique est formé par les deux rails fixe et le projectile en mouvement. On se trouve ici dans aucun des deux cas, le circuit est mobile donc on serait tenter de dire Lorentz mais le champ magnétique n'est pas statique car $i(t)$.

21. Le schéma électrique induit clairement en erreur. En faisant un bilan sur le circuit électrique, on a :

$$E_0 = R(X)I(t) - e = R(X)I(t) + \frac{d\varphi}{dt}$$

avec $\varphi(t) = L(X(t))I(t)$. D'où :

$$\begin{aligned} E_0 &= R(X)I(t) + L(X) \frac{dI}{dt} + I(t) \frac{dL(X(t))}{dt} \\ &= R(X)I(t) + L(X) \frac{dI}{dt} + I(t) \frac{dX}{dt} \frac{dL}{dX} \end{aligned}$$

22. En multipliant l'expression précédent par $I(t)$, on obtient :

$$\begin{aligned} P_{elec} &= P_{Joule} + L(X) \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} I(t)^2 \right) + \frac{I^2}{2} \frac{dL}{dt} + \frac{I^2}{2} \frac{dL}{dX} V(t) \\ &= P_{Joule} + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L(X) I(t)^2 \right) + \frac{1}{2} I(t)^2 \frac{dL}{dX} V(t) = P_{Joule} + P_{mag} + \frac{1}{2} I(t)^2 \frac{dL}{dX} V(t) \end{aligned}$$

En faisant un bilan de puissance on en déduit que $P_{meca} = F_{op} V(t) = \frac{1}{2} I(t)^2 \frac{dL}{dX} V(t)$ d'où l'on déduit :

$$F_{op}(t) = \frac{1}{2} I(t)^2 \frac{dL}{dX}$$

qui diffère de l'énoncé d'un facteur $1/2$?? Le PFD sur le projectile nous donne alors l'équation mécanique :

$$m \ddot{X}(t) = \frac{1}{2} I(t)^2 \frac{dL}{dX}$$

23. Le projectile ferme le circuit. Puisque l'on applique une tension au circuit, les électrons vont chercher le chemin le plus court pour rejoindre l'autre borne (où l'on applique la tension) et donc passer par le projectile. Ainsi la longueur utile pour calculer les rails est bien $X(t)$. Puis (2 rails), la résistance totale s'écrit :

$$R = \frac{2X(t)}{\gamma e h} = \rho X(t)$$

avec $\rho = \frac{2}{\gamma e h}$.

24. On considère que le circuit forme une spire. Dans le modèle du solénoïde, on a $B_0 = \mu_0 N I$ avec N le nombre de spire par unité de longueur. Ici $N = 1/h$ et on peut donc approximer $B_0 \simeq \mu_0 \frac{I}{h}$. Commençons par admettre le résultat pour conclure :

$$\phi = LI = BS = BX(t)d = \mu_0 \frac{I(t)}{h} X(t)d$$

d'où l'on sort $L(X) = \mu_0 \frac{d}{h} X$ et $\frac{dL}{dX} = \mu_0 \frac{d}{h}$.

Justifions à présent l'approximation faite en s'inspirant de la démonstration du solénoïde. Pour simplifier notre raisonnement, supposons les plaques infini afin de négliger les effets de bords et de pouvoir utiliser certaines symétries (ça facilitera la démarche) puis nous conserverons le résultat dans le cas étudiée pour des plaques finies ([seule question difficile de tout le sujet à part la 7](#)).

- Puisque l'on considère nos plaques infinies sur $\vec{e}_z$, tout plan $(M, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$ est plan d'antisymétrie. De plus la distribution de courant est invariante par translation sur z et x donc :

$$\vec{B}(M) = B(y) \vec{e}_z$$

- Nous avons admis que le champ est uniforme dans chaque région d'espace mais on peut très facilement le remonter en considérant un contour $\mathcal{C}$ dans le plan $(O, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ dans chaque zone d'espace et n'enlaçant aucun courant. On aurait alors $(B(y+dy) - B(y))z = 0$ d'où l'uniformité.
- Considérons un plan $\mathcal{P}$ assimilé à l'une des plaques conductrice (plus précisément le milieu). Soit M_+ un point dans la zone entre les deux plaques et M_- son symétrique par rapport au plan $\mathcal{P}$. On applique le théorème d'Ampère sur le contour orienté sens horaire avec le courant selon $\vec{e}_x$ (plaque de droite) :

$$(B(-e/2 - y) - B(e/2 + y))z = \mu_0 j_s z e$$

Or $\mathcal{P}$ tel que défini est un plan de symétrie pour la distribution de courant donc B est antisymétrique donc $B(-e/2 - y) = -B(e/2 + y)$ (on prend le centre du plan comme repère). On en déduit :

$$B(e/2 + y) = -\frac{1}{2} \mu_0 j_s e$$

avec $j_s = \frac{I}{he}$ (on fait l'hypothèse d'un courant uniforme) et donc finalement, on obtient pour les M entre les plaques $B = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{I}{h}$ et hors plaque on peut montrer qu'il est nulle en appliquant le même principe sur l'autre plaque. L'important c'est le champ entre les plaques et on a donc bien justifié l'énoncé.

Remarque : il faut faire un schéma et bien reprendre le raisonnement si on n'est pas à l'aise avec ce genre de calcul. Le mieux, redémontrer les relations de passage pour la composante tangentielle du champ magnétique.

25. D'après ce qui précède, on a :

$$\alpha = \frac{1}{m} \frac{dL}{dX} = \frac{\mu_0 d}{mh}$$

En reprenant l'équation :

$$E_0 = R(X)I(t) + L(X) \frac{dI}{dt} + I(t) \frac{dX}{dt} \frac{dL}{dX}$$

en remplaçant par tout ce que nous avons trouvé, on obtient :

$$\begin{aligned} E_0 &= \rho X I + \mu_0 \frac{d}{h} X \frac{dI}{dt} + \mu_0 \frac{d}{h} I \frac{dX}{dt} \\ &= \rho \left(X I + \frac{\mu_0 d}{h \rho} \left(X \frac{dI}{dt} + I \frac{dX}{dt} \right) \right) \end{aligned}$$

d'où l'on déduit $\beta = E_0/\rho$ et $\tau = \frac{\mu_0 d}{\rho h}$. De plus, τ est homogène à des secondes et correspond en un certain sens à la constante de temps d'un circuit RL, elle mesure l'inertie magnétique contre les pertes ohmiques dans le circuit.