

Atmosphère terrestre & ballons-sondes

NOÉ DANIEL
noe.daniel@ens.psl.eu

Proposition de corrigé - CCMP PC Physique 2 2025

Avertissement. Ceci n'est qu'une **proposition** de corrigé et ne prétend pas être de la même qualité que celle rédigée par un professeur. Il est bien entendu probable que certaines erreurs ou imprécisions se soient glissées dans le document...

1 Ballon-sonde dans l'atmosphère.

1.1 Pesanteur et pression en altitude.

1. La symétrie sphérique nous permet d'écrire $g = g(r)$ où r désigne la coordonnée radiale. En appliquant le théorème de GAUSS gravitationnel, on peut écrire :

$$\iint \mathbf{g}(r) d\mathbf{S} = -4\pi G m_{\text{int}}$$

Avec $\mathbf{g} = -g(r)\mathbf{e}_r$, on obtient donc pour une surface de Gauss sphérique de rayon $r = R_T + h$:

$$g(R_T + h)4\pi(R_T + h)^2 = 4\pi G m_{\text{int}} \implies g(R + h) = \frac{G m_{\text{int}}}{(R_T + h)^2}$$

Considérons que la masse de l'atmosphère est négligeable devant la masse de la Terre ($m_{\text{int}} \simeq M_T$) et en notant que :

$$g_0 = \frac{G M_T}{R_T^2}$$

On peut donc faire un développement limité et obtenir :

$$g(R + h) = g_0 \left(1 + \frac{h}{R_T}\right)^{-2} \simeq g_0 \left(1 - \frac{2h}{R_T}\right)$$

La variation relative s'écrit donc :

$$\frac{g_0 - g(R + h)}{g_0} \simeq 1 - \left(1 - \frac{2h}{R_T}\right) = \frac{2h}{R_T} = 0.0044$$

Soit une variation relative de 0.44%.

2. En partant de la relation fondamentale de la statique des fluides, on obtient :

$$-\mathbf{grad}P + \rho\mathbf{g} = \mathbf{0}$$

En projetant sur l'axe \mathbf{e}_z , on obtient :

$$\frac{dP}{dz} = -\rho(z)g(z)$$

Avec la loi des gaz parfaits, on obtient :

$$\rho(z) = P(z) \frac{\mathcal{M}_{\text{air}}}{RT(z)}$$

En injectant dans l'équation précédente et en négligeant les variations de g avec z :

$$\frac{1}{P}dP = -\frac{\mathcal{M}_{\text{air}}g_0}{RT(z)}dz = -\frac{1}{1-\Gamma z}\frac{\mathcal{M}_{\text{air}}g_0}{RT_0}dz = -\left(1-\frac{z}{H_1}\right)^{-1}\frac{dz}{H_0}$$

Avec $H_0 = \frac{RT_0}{\mathcal{M}_{\text{air}}g_0}$ et $H_1 = \Gamma^{-1}$

Numériquement, $H_0 = 8,77\text{km}$ et $H_1 = 48\text{km}$.

3. On peut désormais intégrer par séparation des variables : entre $z'=0$ et $z'=z$.

$$\int_{P(z'=0)}^{P(z'=z)} \frac{dP}{P} = -\frac{1}{H_0} \int_0^z \left(1 - \frac{z'}{H_1}\right)^{-1} dz' \implies \ln\left(\frac{P(z)}{P_0}\right) = \frac{H_1}{H_0} \ln\left(1 - \frac{z}{H_1}\right) \implies P(z) = P_0 \left(1 - \frac{z}{H_1}\right)^{\frac{H_1}{H_0}}$$

On identifie donc $k = \frac{H_1}{H_0} \simeq 5,48$. Donc pour $z = 14\text{km} = h$, on obtient : $P(h) = 0.153\text{bar}$.

1.2 Stabilité d'une atmosphère sans vent.

4. Le volume V d'air subit son poids et la force d'archimède qui correspond au poids du volume d'air déplacé

- Poids $\mathbf{P} = -\rho_s(z)g\mathbf{e}_z$ volumique
- Poussé d'archimède $\mathbf{F}_a = \rho_{\text{air}}(z)g\mathbf{e}_z$ volumique

La balance de ces deux forces donne la résultant volumique : $\mathbf{F}_r = (\rho_{\text{air}}(z) - \rho_s(z))g\mathbf{e}_z$.

5. Le PFD appliqué à la parcelle d'air donne en projection :

$$\rho_s(z)\ddot{z} = [\rho_{\text{air}}(z) - \rho_s(z)]g \implies \ddot{z} = \left(\frac{\rho_{\text{air}}(z)}{\rho_s(z)} - 1\right)g$$

Si l'air à l'arrivé est plus froid, c'est-à-dire que $\rho_s > \rho_{\text{air}}$, alors $\ddot{z} < 0$, donc la bulle redescend. On parle de stabilité dans ce cas car toute bulle déplacée revient vers sa position d'équilibre.

6. Posons $z = z_0 + \xi$ avec $|\xi| \ll 1$, alors on écrit :

$$\ddot{z} = \ddot{\xi} = \left(\frac{\rho_{\text{air}}(z_0 + \xi)}{\rho_s(z_0 + \xi)} - 1\right)g \simeq \left(\frac{\rho_{\text{air}}(z_0) + \xi \frac{d\rho_{\text{air}}}{dz}\bigg|_{z_0}}{\rho_s(z_0) + \xi \frac{d\rho_s}{dz}\bigg|_{z_0}} - 1\right)g \simeq \left[\frac{\rho_{\text{air}}(z_0)}{\rho_s(z_0)} \left(\frac{1 - \frac{\xi}{h_{\text{air}}}}{1 - \frac{\xi}{h_s}}\right) - 1\right]g$$

A nouveau en linéarisant à l'ordre 1 :

$$\ddot{\xi} \simeq \frac{\rho_{\text{air}}(z_0)}{\rho_s(z_0)} \left[\left(1 - \frac{\xi}{h_{\text{air}}}\right) \left(1 + \frac{\xi}{h_s}\right) - 1 \right]g \simeq \frac{\rho_{\text{air}}(z_0)}{\rho_s(z_0)} \left(-\frac{1}{h_{\text{air}}} + \frac{1}{h_s}\right)g\xi$$

On obtient donc :

$$\ddot{\xi} + N^2\xi = 0 \quad \text{avec} \quad N^2 = \frac{\rho_{\text{air}}(z_0)}{\rho_s(z_0)} \left(\frac{1}{h_{\text{air}}} - \frac{1}{h_s}\right)g$$

7. On peut écrire avec les différentielles :

$$\frac{1}{h_{\text{air}}} = -\frac{1}{\rho_{\text{air}}} \frac{d\rho_{\text{air}}}{dz} \iff \frac{dz}{h_{\text{air}}} = -d(\ln(\rho_{\text{air}}))$$

Or avec la loi des gaz parfaits, on a :

$$\rho_{\text{air}} = \frac{\mathcal{M}_{\text{air}} P}{RT}$$

En injectant et en notant que les constantes vont disparaître avec les propriétés du log et grâce à la dérivation :

$$\frac{dz}{h_{\text{air}}} = -d(\ln(\mathcal{M}_{\text{air}} P) - \ln(RT)) = -d\ln(P) + d\ln(T) = -k d\ln(1 - \Gamma z) + d\ln(1 - \Gamma z) = -(k - 1) d\ln(1 - \Gamma z)$$

On obtient donc :

$$\frac{1}{h_{\text{air}}} = -(k - 1) \frac{d\ln(1 - \Gamma z)}{dz} = (k - 1) \frac{\Gamma}{1 - \Gamma z} = (k - 1) \Gamma \frac{T_0}{T(z)}$$

8. Pour une évolution adiabatique réversible d'un gaz parfait, on peut appliquer la loi de LAPLACE qui s'écrit habituellement :

$$PV^\gamma = \text{cte} \Rightarrow P(z) \rho(z)^{-\gamma} = \text{cte} = P_0 \rho_0^{-\gamma}$$

Donc on obtient :

$$\rho_s(z) = \rho_0 \left(\frac{P(z)}{P_0} \right)^{1/\gamma} = \rho_0 (1 - \Gamma z)^{k/\gamma}$$

Donc on trouve :

$$\frac{1}{h_s} = -\frac{d\ln(\rho_0 (1 - \Gamma z)^{k/\gamma})}{dz} = \frac{k}{\gamma} \frac{\Gamma}{1 - \Gamma z} = \frac{k\Gamma}{\gamma} \frac{T_0}{T(z)}$$

9. Pour assurer la stabilité, on souhaite que $N^2 > 0$ pour retrouver un oscillateur harmonique. Cela se produit à condition que :

$$\frac{1}{h_{\text{air}}} - \frac{1}{h_s} > 0 \iff \frac{T_0}{T(z)} \Gamma \left[(k - 1) - \frac{k}{\gamma} \right] > 0 \iff k(\gamma - 1) > \gamma \iff \boxed{k > \frac{\gamma}{\gamma - 1} = \frac{1}{1 - \frac{1}{\gamma}}}$$

Pour un air diatomique $\gamma = 7/5 = 1,4$ et $\frac{1}{1 - \frac{1}{\gamma}} \simeq 3,5$ donc avec $k = 5$ on a bien stabilité.

1.3 Forces exercées sur un ballon

10. Par analyse dimensionnelle (ou en se rappelant des expressions usuelles pour les forces de trainée), on trouve :

$$F_v \sim \rho_{\text{air}} v^2 R^2$$

Prenons $F_v = \frac{1}{2} C_d \rho_{\text{air}}^2 R^2$ qui est l'expression usuelle.

11. Le poids du ballon est $\Pi = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho_{\text{He}} g$ avec $\rho_{\text{He}} = d \rho_{\text{air}}$, donc on obtient :

$$x = \frac{F_v}{\Pi} = \frac{3}{8\pi} \frac{C_d v^2}{R d g}$$

Donc la force exercée par le vent est prépondérante pour $x \gg 1$ i.e $R \ll \frac{3}{8\pi} \frac{C_d v^2}{d g} := R_c$.

En prenant $C_d \sim 1$ et $v = 120 \text{ km.h}^{-1}$ on trouve que $R_c \sim 30m$.

12. Les densités sont données via :

$$\rho_{\text{air}} = \frac{M_{\text{air}} P_{\text{min}}}{RT_{\text{min}}} \quad \rho_{H_2} = \frac{M_{H_2} P_{\text{min}}}{RT_{\text{min}}}$$

A l'équilibre la résultante du poids et des forces d'Archimède est nulle

$$(\rho_{\text{air}} - \rho_{H_2})Vg = m_{\text{maxi}}g$$

On trouve alors : $m_{\text{maxi}} \simeq 1,8 \text{ kg}$.

1.4 Ballons à enveloppe élastique.

En réalité, la grandeur ξ aussi souvent notée γ est généralement appelée tension de surface.

13. Avec la symétrie de révolution autour de l'axe e_z , on en déduit que la résultante est portée par l'axe $-e_z$. En intégrant sur le contour et en projetant chaque morceau de force élémentaire sur l'axe vertical

$$f = -\left(\xi \int_C dl e_\theta\right) e_z = -\left(\xi \int_{\theta'=0}^{2\pi} R \sin\theta d\phi\right) \sin\theta = -2\pi\xi R \sin^2\theta$$

La pression intérieure exerce une force vers l'extérieur qui est $P_i S e_z$ (révolution) avec S la surface de la coquille sphérique et de même pour la pression extérieure mais qui est $P_e S e_z$.

On calcule désormais S :

$$S = \int_{r'=0}^r \int_{\theta'=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} r dr d\theta' \sin\theta' d\varphi = \pi r^2 = \pi R^2 \sin^2\theta$$

Donc :

$$F_p = (P_i - P_e) \pi R^2 \sin^2\theta e_z$$

14. Alors en considérant la force

Alors, on obtient en équilibrant les forces :

$$(P_i - P_e) \pi R^2 \sin^2\theta - 2\pi\xi R \sin^2\theta = 0 \implies P_i = P_e + \frac{2\xi}{R}$$

15. A $z=0$, $P_e = 1 \text{ bar}$, $P_i = 2 \text{ bar}$ et $R = R_1 = 2m$. Donc on obtient : $\xi = \frac{P_i - P_e}{2} \cdot R = 0.5 \text{ bar.m}$ et donc pour $\beta = \frac{2\xi}{P_0 R_1} = 1$

16. Pour l'évolution adiabatique réversible d'un gaz parfait, la loi de LAPLACE est valide à l'intérieur du ballon.

$$P_1 V_1^{\gamma_{\text{He}}} = P_i(z) V(z)^{\gamma_{\text{He}}} \implies P_1 R_1^{3\gamma} = P_i(z) R^3 \gamma_{\text{He}}$$

En notant que $P_1 = 2P_0$ et que $P_i = P_e + \frac{2\xi}{R}$, on obtient :

$$2P_0 R_1^{3\gamma_{\text{He}}} = \left(P_e + \frac{2\xi}{R}\right) R^3 \gamma_{\text{He}} \implies x^{3\gamma_{\text{He}}} = \frac{\delta(z)}{2} + \frac{\xi}{R P_0} = \frac{\delta(z)}{2} + \frac{x}{2} \frac{2\xi}{R_1 P_0} = \frac{1}{2}(\delta(z) + x\beta)$$

Donc on peut obtenir finalement :

$$\delta(z) = 2x^{3\gamma_{\text{He}}} - x\beta = \psi(x)$$

17. Il s'agit simplement de reporter les valeurs entre les deux graphes.

- Pour $z = 3\text{km}$, on lit $\delta(z) = 0.68$ dont l'antécédent par ψ est 0.96, donc $R_1/R = 0.96\dots$
- Même démarche pour le reste...

2 Mesures météorologique dans l'atmosphère.

2.1 Mesures de température.

18. On remarque que $A \sim B \sim 10^{-4}$ et $C \sim 10^{-8} \ll A, B$ donc on peut considérer que la fonction d'étalonnage s'approxime par :

$$\frac{T^*}{T} = A - B \ln\left(\frac{G}{G^*}\right)$$

19. D'après le cours, la résistance d'un cylindre de section s et de longueur l est donnée par :

$$R = \frac{l}{\gamma_{\text{el}} S} = \frac{1}{G} \quad \text{i.e.} \quad G = \frac{\gamma_{\text{el}} S}{l}$$

Avec la relation de l'énoncé, on a :

$$\ln\left(\frac{G}{G^*}\right) = \frac{1}{B} \left(A - \frac{T^*}{T} \right) \implies G = G^* \exp\left(\frac{1}{B} \left[A - \frac{T^*}{T} \right] \right)$$

Donc puisque S et l ne varient pas, on en déduit que γ_{el} varie bien exponentiellement avec la température.

Cherchons donc $G = G_0 \exp(-E/k_b T) = G^* \exp\left(\frac{1}{B} \left(A - \frac{T^*}{T} \right)\right)$ en identifiant les paramètres uniquement dépendant de la température :

$$-\frac{E}{k_b T} = \frac{-T^*}{BT} \implies E = \frac{k_b T^*}{B}$$

AN...

20. C'est le modèle de DRUDE, on applique le PFD à un électron et on suppose le régime stationnaire, on obtient donc :

$$q\mathbf{E} - \frac{m}{\tau} \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

Avec la loi d'OHM locale, on a $\mathbf{j} = \gamma_{\text{el}} \mathbf{E}$ et on sait aussi par définition que $\mathbf{j} = n_q q \mathbf{v}$ donc on obtient $\mathbf{E} = \frac{n_q q}{\gamma_{\text{el}}} \mathbf{v}$ et ainsi :

$$\frac{n_q q^2}{\gamma_{\text{el}}} = \frac{m}{\tau} \implies \gamma_{\text{el}} = \frac{n_q q^2 \tau}{m}$$

21. A l'équilibre thermique, la probabilité de trouver un porteur dans l'état de plus haute énergie \mathcal{E} par rapport à la normale est donnée par la statistique de MAXWELL-BOLTZMANN :

$$\frac{\mathbb{P}(\text{état de conduction})}{\mathbb{P}(\text{état de valence})} = \exp\left(\frac{\mathcal{E}}{k_b T}\right)$$

En faisant l'hypothèse que le nombre de sites accessibles à chaque état est comparable, alors la densité de porteurs suit le même facteur de Boltzmann :

$$\frac{n_q}{n_0} = \exp\left(\frac{\mathcal{E}}{k_b T}\right)$$

En pratique on peut estimer le rapport n_q/n_0 à température ambiante. Généralement on a $n_q/n_0 \sim 10^{-10}$ pour $T \simeq 300K$ donc on trouve : $\mathcal{E} \sim 0.6eV$

2.2 Mesures de l'humidité relative.

22. Soit M un point de l'espace. En considérant que les dimensions transverses des électrodes sont très grandes devant e , on peut donc considérer que les plans $(Me_x e_z)$ et $(Me_y e_z)$ sont des plans de symétries pour la distribution de charge \mathcal{D}_q . Il en résulte que \mathbf{E} est contenu dans ces deux plans, c'est-à-dire que $\mathbf{E} = E e_z$.

La distribution de charges est aussi invariante sous toute translation selon e_x ou e_y donc $\mathbf{E} = E(z) e_z$.

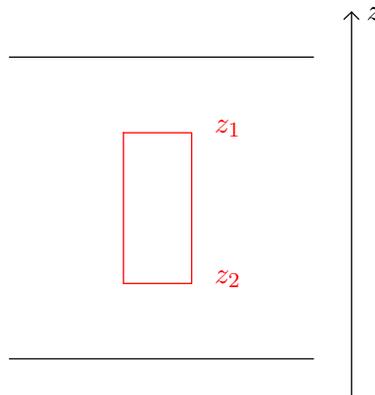


Figure 1. Vue dans le plan

Considérons un cylindre de section s et de hauteur $h < e$ se situant à l'intérieur du milieu isolant. On note sa surface extérieure S_G . C'est une surface de GAUSS. On applique donc le théorème de GAUSS et on obtient :

$$\oiint_{S_G} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E(z_1)s - E(z_2)s = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = 0 \implies E(z_1) = E(z_2) = E$$

Donc le champ \mathbf{E} est bien uniforme au sein de l'isolant. Par le même raisonnement le champ \mathbf{E} est uniforme aussi en dehors du milieu isolant et par considérations énergétiques loin des plaques on peut l'imposer comme nul.

23. On applique le théorème de GAUSS pour z_1 au delà de l'électrode supérieure et z_2 toujours au sein du milieu isolant. On obtient :

$$\underbrace{E(z_1)s}_{=0} - \underbrace{E(z_2)s}_{=E} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = -\frac{\sigma_0 s}{\epsilon_0} \implies E = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0}$$

24. Notons z_+ l'altitude de l'électrode à $+\sigma_0$ et z_- celle de l'autre électrode, alors on a :

$$U_0 = V(z_-) - V(z_+) = \int_{z_+}^{z_-} \frac{dV}{dz} dz = \int_{z_-}^{z_+} E(z) dz = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \int_{z_-}^{z_+} dz = \frac{\sigma_0 e}{\epsilon_0}$$

Par définition, la capacité C est le rapport entre la charge stockée Q et la tension U_0 . La charge totale sur chaque plaque vaut $Q = \sigma_0 S$ donc on en déduit que :

$$C = \frac{\sigma_0 S}{U_0} = \frac{\varepsilon_0 S}{e}$$

25. On peut juste calculer le moment dipolaire total grâce à la densité et au volume connu qui est de eS donc :

$$\mathbf{p}_{\text{tot}} = (n_p S e) \mathbf{p}_m$$

On a par définition classique $\mathbf{p} = q \mathbf{NP}$ avec \mathbf{NP} le vecteur entre les deux charges $+q$ et $-q$ dans le cas classique. Ici on a plutôt en projection sur z

$$p_{\text{tot}} = (\sigma S) e$$

Donc en rassemblant les deux équations :

$$\sigma = n_p p_m$$

26. Lorsque la température sera très basse, les charges ne ressentent plus les fluctuations thermiques et vont donc s'aligner parfaitement avec E (c'est-à-dire selon \mathbf{e}_z) pour minimiser l'énergie potentielle d'interaction (notamment le produit scalaire). On aura donc \mathbf{p} et \mathbf{E} de même sens et direction.

Au contraire lorsque la température est très élevée, les fluctuations thermiques dominent et les moments sont désordonnés si bien que $\langle \mathbf{p} \rangle = \mathbf{0}$ et donc $p_m = 0$.

La température critique de transition intervient pour l'égalité de l'énergie d'interaction avec l'énergie thermique :

$$k_b T_c = p_{H_2O} E$$

Lorsque $T \ll T_c$, tous les dipôles s'alignent et p_m est maximal. Lorsque $T \gg T_c$, l'agitation thermique désorient les dipôles et $p_m \rightarrow 0$.

Remarque. On pourrait redériver la théorie avec la physique statistique et notamment la fonction de LANGEVIN qui intervient dans le problème.

27. On sait que $[p_m] = [Q].L$ et notamment avec le théorème de Gauss on a :

$$\oiint_S \mathbf{E} d\mathbf{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Donc on en déduit que $[\varepsilon_0 E] = [Q]L^{-2}$ donc :

$$[a] = L^3$$

Donc α s'exprime en m^3 dans le système international.

28. On peut reprendre les calculs en rappelant que les équations de Maxwell sont linéaires donc on peut utiliser la superposition et :

En refaisant le théorème de Gauss, on a :

$$E = \frac{\sigma_0 - \sigma}{\varepsilon_0}$$

Souvenons nous que $\sigma = p_m n_p = \alpha n_p \varepsilon_0 E$ grâce à la relation donnée par l'énoncé. On peut donc injecter cela :

$$E = \frac{\sigma_0 - \alpha n_p \varepsilon_0 E}{\varepsilon_0} \implies E(1 + \alpha n_p) = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \implies E = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \frac{1}{1 + \alpha n_p}$$

Remarque. On voit qu'on est sur la bonne voie car αn_p est bien sans dimension.

Ensuite on reprend le calcul mené plus tôt :

$$U_0 = eE = \frac{e\sigma_0}{\varepsilon_0} \frac{1}{1 + \alpha n_p}$$

La charge **sur l'électrode** reste toujours $Q = \sigma_0 S$ donc on en déduit :

$$C = \frac{Q}{U_0} = \frac{\sigma_0 S}{\frac{e\sigma_0}{\varepsilon_0} \frac{1}{1 + \alpha n_p}} = (1 + \alpha n_p) \frac{\varepsilon_0 S}{e} = (1 + \alpha n_p) C_0$$

On pose donc $\varepsilon_r = (1 + \alpha n_p)$.

Remarque. Généralement on définit plutôt la polarisabilité comme $\mathbf{p} = \alpha \mathbf{E}$ et on a le résultat classique $\varepsilon_r = 1 + \alpha$. Ce qui est donc cohérent.

2.3 Mesures de position et de vitesse.

29. Pour un satellite en orbite circulaire de rayon $R = R_T + h$, on peut appliquer le PFD et avec l'expression de la force d'attraction gravitationnelle :

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = R\ddot{\theta} \mathbf{e}_\theta - R\dot{\theta}^2 \mathbf{e}_r = -\mathcal{G} \frac{m M_T}{R^2} \mathbf{e}_r$$

On obtient donc que $\ddot{\theta} = 0$ donc $\dot{\theta}$ est constant, posons donc $\dot{\theta} = \omega_0$ et la projection sur \mathbf{e}_r donne :

$$\omega_0^2 = \mathcal{G} \frac{M_T}{R^3} \implies \omega_0 = \sqrt{\frac{\mathcal{G} M_T}{R^3}}$$

Donc la période est donnée par :

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{\mathcal{G} M_T}} \implies \frac{T^2}{R^3} = \frac{T^2}{(R_T + h)^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G} M_T}$$

C'est la troisième loi de KEPLER

30. Après calculs : $h_{\text{GPS}} = 20300 \text{ km}$. Pour les satellites géostationnaires : $h_{\text{GPS}} = 36000 \text{ km}$.

31. On applique le théorème fondamental de la dynamique pour un électron non relativiste ($v \ll c$)

$$m_e \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B})$$

Puisque \mathbf{E} est en notation complexe, par la loi d'Ohm local $\mathbf{j} = \gamma \mathbf{E}$ donc \mathbf{j} peut s'écrire en notation complexe.

32. Selon moi par courants ioniques on désigne les courants associés au déplacement des ions et donc dans le terme $\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$. On peut négliger ces courants car l'électron est non relativiste.

Avec une notation ondulatoire, on a la relation de Maxwell Faraday qui s'écrit :

$$ik\mathbf{E} = -i\omega\mathbf{B} \implies \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{B}} \sim c$$

Donc si l'électron est non relativiste $v \ll c$, on a :

$$\frac{\mathbf{E}}{v\mathbf{B}} \sim \frac{c}{v} \gg 1$$

Donc on peut simplifier en :

$$m_e \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -e\mathbf{E}$$

On sait que $\mathbf{j}_e = -en_e\mathbf{v}$ par définition donc, on obtient :

$$m_e \frac{\partial \mathbf{j}_e}{\partial t} = e^2 n_e \mathbf{E} \implies \frac{\partial \mathbf{j}_e}{\partial t} = \frac{n_e e^2}{m_e} \mathbf{E} \quad (1)$$

Puis on écrit l'équation de MAXWELL-AMPÈRE, MAXWELL-FARADAY et MAXWELL-GAUSS :

$$\mathbf{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad \mathbf{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \text{div} \mathbf{E} = 0$$

On applique la technique du double rotationnel :

$$\begin{aligned} \mathbf{rot}(\mathbf{rot} \mathbf{E}) &= \mathbf{grad}(\text{div} \mathbf{E}) - \Delta \mathbf{E} \\ \mathbf{rot}(\mathbf{rot} \mathbf{E}) &= -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{rot}(\mathbf{B}) = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\mu_0 \mathbf{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \end{aligned}$$

En combinant :

$$\Delta \mathbf{E} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \mu_0 \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} = \mathbf{0}$$

En utilisant (1) :

$$\Delta \mathbf{E} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \mu_0 \frac{n_e e^2}{m_e} \mathbf{E} = \mathbf{0}$$

On injecte l'OPPH :

$$(ik)^2 - \varepsilon_0 \mu_0 (i\omega)^2 - \mu_0 \frac{n_e e^2}{m_e} = 0 \implies k^2 c^2 = \omega^2 - \frac{n_e e^2}{m_e \varepsilon_0} = \omega^2 - \omega_p^2$$

Avec : $c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}$ et $\omega_p^2 = \frac{n_e e^2}{m_e \varepsilon_0}$

33. Par définition la vitesse de phase est le rapport :

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k}$$

Donc dans la relation de dispersion on a :

$$k = \frac{1}{c} \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}$$

Or les fréquences f_1 et f_2 sont en GHz alors que la fréquence plasma est en MHz donc on est dans la limite où $\omega \gg \omega_p$, on va donc faire une linéarisation de k :

$$\frac{k}{\omega} = \frac{1}{c} \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2} \implies v_\varphi = c \left(1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2\right)^{-1/2} \implies v_\varphi \simeq c \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2\right) > c$$

La vitesse de phase est supérieure à c ce n'est pas un problème vis-à-vis de la physique car la vitesse de phase n'a pas de réalité physique. Cela aurait été un problème si $v_g > c$.

La fraction d'excès est donc :

$$\frac{v_\varphi - c}{c} \simeq \frac{1}{2} \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2$$

On sait que $f = \frac{\omega}{2\pi}$ et donc :

$$\frac{v_\varphi - c}{c} \simeq \frac{1}{2} \left(\frac{f_p}{f}\right)^2$$

On trouve pour f_1 une différence relative de 2.75×10^{-5} et pour f_2 de 1.55×10^{-5} .

34. Un signal électromagnétique de pulsation ω met pour traverser la couche ionisée d'épaisseur L un temps :

$$t = \int_0^L \frac{dz}{v_g(z)}$$

Le plasma peut ici être supposé suffisamment homogène en densité électronique n_e et donc ω_p quasi constant et alors on prend v_φ calculé plus tôt.

$$t = \frac{L}{c} \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2\right)$$

Soit un décalage par rapport à une propagation dans le vide donné par :

$$\Delta t = \frac{L}{c} \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2\right) - \frac{L}{c} = \frac{L}{2} \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2 = \frac{n_e e^2}{2m_e \varepsilon_0 \omega^2} L$$

On a $\omega_p^2 = (5.6 \times 10^7)^2$ via f_p et donc on trouve en considérant $L \sim 7 \times 10^5 m$ pour l'ionosphère : $\Delta d = c\Delta t \sim 20m$.

35. Cela permet de corriger la dispersion ionosphérique en comparants les retards pour les deux fréquences.

FIN DE PROPOSITION DE CORRIGÉ.