

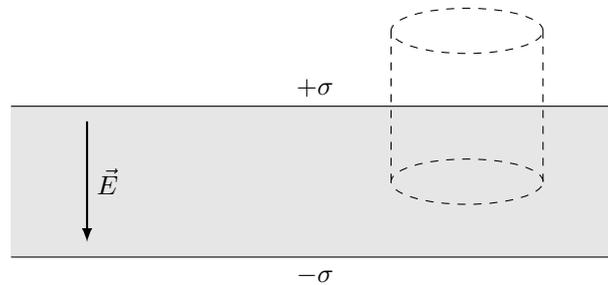
## Polytechnique, Physique MPI

Solutions proposées par Paul Roux

Juin 2025

## 1 Plasmons de surface localisés

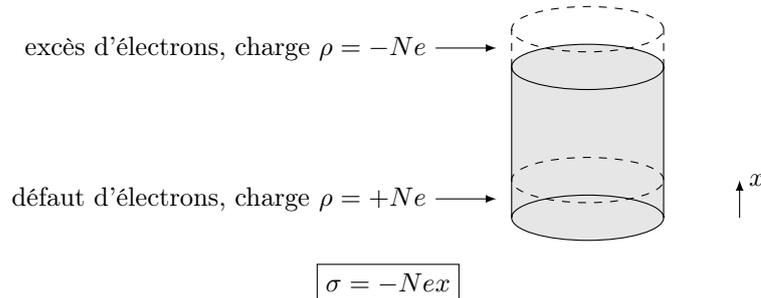
1. Le problème est totalement invariant par toutes translations le long de  $(Oy)$  et  $(Oz)$  donc le potentiel électrostatique vérifie  $V = V(x)$  et le champ est  $\vec{E} = -\frac{dV}{dx}\vec{e}_x = E(x)\vec{e}_x$ . En l'absence de toute charge volumique il est à divergence nulle (d'après Maxwell-Gauss) c'est-à-dire  $\frac{dE}{dx} = 0$  donc  $E(x)$  est uniforme par morceaux. Pour  $x \rightarrow \pm\infty$  on ne saurait accepter d'autre solution que  $E(x) \rightarrow 0$  puisque on se trouve à grande distance des charges; finalement il reste seulement à déterminer le champ uniforme au sein de la plaque. Créé par les charges  $\pm\sigma$ , il est nécessairement dirigé des charges  $+$  vers les charges  $-$  et on peut donc l'écrire  $\vec{E} = -E_0\vec{e}_x$  avec  $E_0 > 0$  (cf. figure).



L'application du théorème de Gauss à un cylindre entourant la seule surface supérieure ne fait donc apparaître que le seul flux sortant de la surface de base, d'aire  $S$ :  $\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = E_0 S$ . La charge intérieure à ce cylindre est  $Q = \sigma S$  donc  $\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$  impose enfin  $E_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ . Finalement :

$$\vec{E} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}\vec{e}_x \text{ dans le métal, et } \vec{E} = \vec{0} \text{ ailleurs}$$

2. Lors de la translation  $x$  des électrons dans une colonne d'aire  $S$ , dans la direction  $+\vec{e}_x$ , ceux-ci occupent un volume  $Sx$  et donc une charge  $-NeSx$ , qui s'identifie à la charge  $+\sigma$  de la face supérieure.



$$\sigma = -Nex$$

3. Lors du déplacement  $x(t)$  de *tous* les électrons, ils sont soumis au champ  $\vec{E} = +\frac{Nex}{\epsilon_0}\vec{e}_x$  d'après les deux questions précédentes, donc à la force  $\vec{E} = -e\vec{E}$  soit  $\vec{F} = -\frac{Ne^2x}{\epsilon_0}\vec{e}_x$ ; on reconnaît une force de rappel. L'application du principe fondamental de la dynamique à un des électrons de masse  $m$  impose donc  $m\frac{d^2x}{dt^2}\vec{e}_x = \vec{F}$  ou encore :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_p^2 x \text{ avec } \omega_p^2 = \frac{Ne^2}{m\epsilon_0}$$

On reconnaît bien l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation  $\omega_p$ .

4. Dans le cas d'une sphère uniformément chargée en volume, tout plan passant par le centre  $O$  de la sphère est un plan de symétrie physique des charges et le champ électrique est donc contenu dans un tel plan. En un point  $M$  quelconque il est donc aussi contenu dans l'intersection  $OM$  de ces plans : le champ est radial et on peut le noter  $\vec{E}(M) = E(M)\vec{e}_r$  en coordonnées sphériques. Les invariances de révolution du problème montrent aussi que  $\vec{E}(M) = E(r)\vec{e}_r$  avec  $r = OM$ . Il suffit alors d'appliquer le théorème de Gauss à une sphère de rayon  $r$  et de centre  $O$ , intérieure à la sphère métallique ;  $\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 E(r)$  d'une part et la charge intérieure à cette sphère est  $Q = \rho \frac{4}{3}\pi r^3$  d'autre part. De  $\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$  on déduit donc :

$$\vec{E}(M) = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \vec{e}_r = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \overrightarrow{OM}$$

5. Le champ créé par les ions métalliques, avec  $\rho = +Ne$  et un centre de sphère  $O$ , est donc  $\vec{E}(M) = \frac{Ne}{3\epsilon_0} \overrightarrow{OM}$ . Celui créé par les électrons, de charge  $\rho = -Ne$  et de centre  $O'$ , est donc  $\vec{E}'(M) = -\frac{Ne}{3\epsilon_0} \overrightarrow{O'M}$ . Le champ résultant de ces deux contributions est donc  $\vec{E} + \vec{E}' = \frac{Ne}{3\epsilon_0} \overrightarrow{OO'}$ , et il est bien uniforme comme demandé ; on l'écrira :

$$\vec{E}(M) = \frac{Ne}{3\epsilon_0} \vec{x} = \frac{Nex}{3\epsilon_0} \vec{e}_x$$

6. Exactement comme ci-dessus il vient :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_s^2 x \text{ avec } \omega_s^2 = \frac{Ne^2}{3m\epsilon_0} \text{ soit } \omega_s = \frac{\omega_p}{\sqrt{3}}$$

7. On remarque que le déplacement au sommet  $S$  de la sphère est exactement égal au décalage  $x$  du centre des sphères. Une petite aire  $S$  correspond donc à un volume  $S|x|$  de charge  $+NeS|x|$  donc  $\sigma_S = N|x|$ . Comme précédemment il faut tenir compte de la charge des électrons et :

$$\sigma_S = -Nex$$

La différence des champs de part et d'autre de cette surface est  $\vec{E}_{S+} - \vec{E}_{S-} = \frac{\sigma_S}{\epsilon_0} \vec{e}_x$  (relation de passage) avec  $\vec{E}_{S-} = -\frac{\sigma_S}{3\epsilon_0} \vec{e}_x$  donc le champ juste *au-dessus* de  $S$  est :

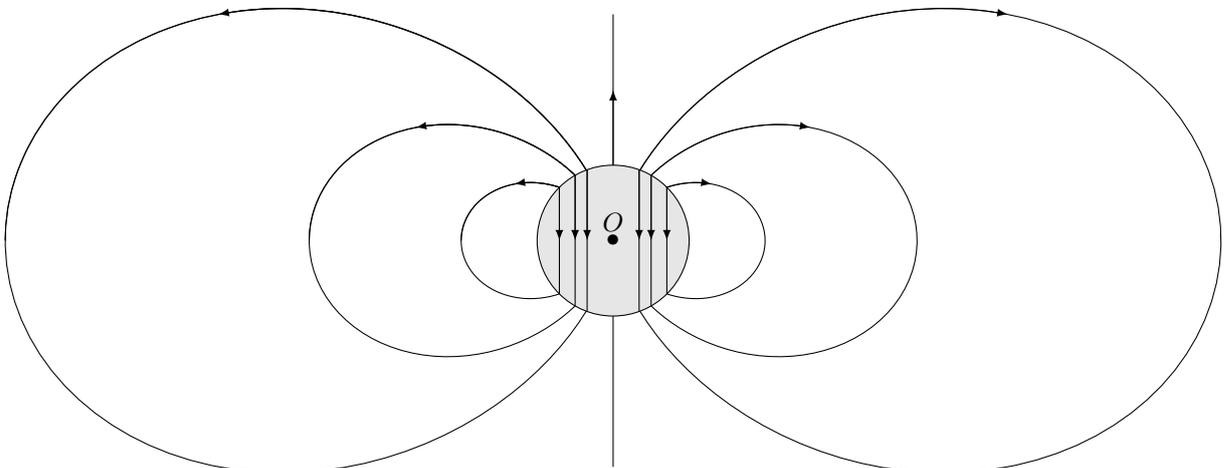
$$\vec{E}_{S+} = \frac{2\sigma_S}{3\epsilon_0} \vec{e}_x = -\frac{2Nex}{3\epsilon_0} \vec{e}_x$$

Ce champ est *le double* du champ intérieur, alors que dans le cas de la plaque le champ extérieur était nul ! On notera toutefois qu'il ne s'agit que d'une relation locale ; le champ extérieur s'atténue évidemment très vite en s'éloignant de la sphère métallique, cf. question suivante.

8. Il s'agit manifestement d'un champ *dipolaire* puisque la distribution des charges est globalement neutre mais avec un déplacement  $\vec{x}$  des barycentres des charges positive et négative. On peut d'ailleurs préciser le total des charges positives et négatives,  $q_{\pm} = \pm \frac{4}{3}\pi R^2 e$  (si  $R$  est le rayon de la sphère métallique) et donc aussi le moment dipolaire associé :

$$\vec{p} = \frac{4\pi R^3 Nex}{3} \vec{e}_x$$

9. Le tracé demandé est celui des lignes de champ d'un dipôle à l'extérieur de la sphère métallique, et d'un champ uniforme à l'intérieur :



10. Il est légitime de négliger les phénomènes de propagation si les durées caractéristiques  $T$  (ici la période d'oscillation  $2\pi/\omega_s$ ) et les longueurs caractéristiques  $L$  (ici le diamètre  $2R$  de la sphère) vérifient  $L/T \ll c$  soit :

$$R \ll \frac{c}{\omega_s} \text{ ou bien } R \ll \lambda_s$$

si on note  $\lambda_s = 2\pi c/\omega_s$  la longueur d'onde des ondes électromagnétiques de pulsation  $\omega_s$ .

11. Comme  $\omega_s$  et  $\omega_p$  sont du même ordre de grandeur,  $\lambda_s$  est de l'ordre de 200 nm ; la condition demandée est donc faiblement vérifiée avec  $20 \text{ nm} \ll 200 \text{ nm}$ .
12. Le même type d'étude permet de conclure à une symétrie cylindrique pour le champ créé par un cylindre uniformément chargé ; le champ électrique correspondant se déduit alors du théorème de Gauss écrit  $2\pi r h E = \frac{Q}{\epsilon_0}$  avec  $Q = \rho\pi r^2$  et finalement  $\vec{E} = \frac{\rho r}{2\epsilon_0} \vec{e}_r$  (ici  $r$  et  $\vec{e}_r$  sont ceux de la base cylindro-polaire). La suite des calculs est identique au cas de la sphère au remplacement près  $3 \mapsto 2$  donc :

$$\omega_c = \frac{\omega_p}{\sqrt{2}}$$

13. Le champ électrique ressenti à une extrémité du tube est, d'après l'énoncé, donné par  $\vec{E} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 L^2} \vec{e}_x$  (où  $\vec{e}_x$  est l'axe du cylindre). Par ailleurs  $Q = Ne\pi R^2 x$  est la charge créée par le déplacement  $x$  des électrons. La force de rappel exercée sur un des électrons situés à cette extrémité du fil est donc  $\vec{F} = -\frac{Ne^2 R^2}{4\epsilon_0 L^2} x \vec{e}_x$  avec donc là encore une oscillation de pulsation :

$$\omega_\ell^2 = \frac{Ne^2 R^2}{4\epsilon_0 L^2 m} \text{ donc } \omega_\ell = \frac{\omega_p R}{2 L}$$

14. On a vu que  $\omega_p$  est une caractéristique intrinsèque du métal employé. Le modèle proposé à la question précédente montre que la longueur d'onde associée aux oscillations  $\lambda_\ell$  vérifie  $\lambda_\ell \frac{R}{L} = cte$  ; dans les deux cas proposés on trouve respectivement  $\lambda_\ell \frac{R}{L} = 100 \text{ nm}$  et  $\lambda_\ell \frac{R}{L} = 72 \text{ nm}$ . Le modèle n'est pas irréprochable (il s'en faut de 30% !) mais donne le bon sens de variation.
15. On a vu que pour les nanotiges d'or les longueurs d'onde de résonance plasmon sont dans l'infrarouge (800 à 1300 nm) tandis que pour les nanosphères elle sont dans l'ultraviolet (200 nm) ; ceci explique le choix des nanotiges.
16. Pour obtenir l'accumulation de charges aux extrémités des tiges il faut que le champ électrique de l'onde soit parallèle à l'axe des tiges ; comme l'onde laser est transverse, ce champ électrique est orthogonal à la direction de propagation du faisceau laser. Il faut donc que cette direction de propagation soit *orthogonale* à l'axe des nanotiges.

## 2 Plasmons de surface

17. Dans un champ électrique oscillant, il y a forcément aussi un champ magnétique (à cause de l'équation de Maxwell-Ampère notamment) mais on négligera la partie magnétique de la force de Lorentz en admettant *a priori* que  $B \sim E/c$  et donc, dans le cadre de l'approximation non relativiste,  $\|\vec{v} \wedge \vec{B}\| \ll \|\vec{E}\|$  à cause de  $v \ll c$ . Il faudra bien sûr vérifier *a posteriori* cette hypothèse, qui s'écrit aussi  $v_\varphi \sim c$  pour la vitesse de phase de l'onde. Sou l'action du champ électromagnétique de l'onde, le principe fondamental de la dynamique prend alors la forme  $m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E}$ . Le champ électrique oscillant à la pulsation  $\omega$  sera recherché sous la forme  $\vec{E} = \vec{E}_0 \exp\left[j\left(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}\right)\right]$  donc  $\vec{v}$  sera recherché sous la même forme et  $\frac{d\vec{v}}{dt} = j\omega \vec{v} \left[1 - \frac{\vec{k}}{\omega} \cdot \vec{v}\right]$ . Ici encore le terme correctif est de l'ordre de  $v/v_\varphi$  puisque  $v_\varphi = \omega/k$  ; on doit donc le négliger pour rester cohérent avec l'approximation non relativiste déjà citée. Finalement l'équation du mouvement s'écrit  $j\omega m \vec{v} = -e\vec{E}$  et ce mouvement est associé à la densité volumique de courant  $\vec{j} = -Ne\vec{v}$  qu'on écrit donc  $\vec{j} = \gamma \vec{E}$  avec :

$$\gamma = \frac{Ne^2}{j\omega m} = \epsilon_0 \frac{\omega_p^2}{j\omega}$$

18. Toujours dans le cas où  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  et  $\vec{j}$  sont proportionnels à  $\exp\left[j\left(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}\right)\right]$  (OPPM), les équations de Maxwell de structure prennent la forme  $\vec{k} \cdot \vec{B} = 0$  (Maxwell-Thomson) et  $\vec{B} = \frac{\vec{k}}{\omega} \wedge \vec{E}$  (Maxwell-Faraday) tandis que l'équation de Maxwell-Ampère s'écrit  $-j\vec{k} \wedge \vec{B} = \frac{\vec{E}}{c^2} \left(\frac{\omega_p^2}{j\omega} + j\omega\right)$  ; on en déduit d'abord que  $\vec{k} \cdot \vec{E} = 0$  (donc aussi que  $\rho = 0$  d'après Maxwell-Gauss) puis, en éliminant  $\vec{B}$  entre ces relations au moyen de  $\vec{k} \wedge \left(\frac{\vec{k}}{\omega} \wedge \vec{E}\right) = -k^2 \vec{E}$ ,

on montre que  $\vec{E} \left[ \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2} \right] = k^2 \vec{E}$ ; finalement l'équation de dispersion, nécessaire pour observer une telle onde (avec donc  $\vec{E} \neq \vec{0}$ ) est :

$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$$

C'est la relation de dispersion demandée. La condition  $k^2 > 0$  nécessaire à une propagation sans atténuation est donc équivalente à  $\omega > \omega_p$  : la pulsation de coupure basse du milieu s'identifie bien à la pulsation propre des plasmons dans une plaque rectangulaire.

19. Puisque  $\vec{B} = B_0 \vec{e}_y \exp [j (\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})]$ , les équations de Maxwell-Thomson et Maxwell-Faraday imposent :

$$k_y = 0 \text{ et } E_y = 0$$

c'est-à-dire que ces deux vecteurs sont dans le plan  $(xz)$  (le plan de figure).

20. L'équation de Maxwell-Gauss devient ici  $k_x E_x + k_z E_z = 0$  donc :

$$E_z = -E_x \frac{k_x}{k_z}$$

21. La projection sur l'axe  $(Oy)$  de l'équation de Maxwell-Faraday prend la forme  $\omega B_y = (k_z E_x - k_x E_z)$  soit :

$$B_y = \frac{E_x}{\omega} \left[ k_z + \frac{k_x^2}{k_z} \right]$$

22. Dans cette relation,  $k_x^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$  dans le métal; on en déduit donc  $B_y = \frac{E_x}{\omega} \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2 k_z}$  et une relation analogue dans le vide obtenue en écrivant la relation de dispersion  $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$  donc en faisant simplement  $\omega_p \mapsto 0$  dans la relation précédente. On écrira donc :

$$B_y = \frac{E_x}{c} \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{\omega c k_z} \text{ dans le métal, et } B_y = \frac{E_x}{c} \frac{\omega}{c k_z} \text{ dans le vide}$$

23. Les composantes continues sont les deux limites de  $E_x$  si  $z \rightarrow 0^\pm$ ; elles sont donc toutes deux proportionnelles à  $\exp [j (\omega t - k_x x)]$ . Comme cette continuité doit être acquise  $\forall t$  et  $\forall x$ , il est nécessaire que  $\omega$  et  $k_x$  soit le même dans les deux milieux 1 et 2.

24. Considérons (schéma ci-après à gauche) une surface élémentaire  $dS$  disposée à la surface du métal, donc en  $z \rightarrow 0^-$ . Elle reçoit en permanence le courant  $\delta I = \vec{j} \cdot dS \vec{e}_z = dS j_z$ ; celui-ci ne peut passer dans le vide donc s'accumule selon la relation  $\delta I = \frac{d}{dt} (\delta Q)$  où  $\delta Q = \sigma dS$  est la charge portée par la face inférieure de  $dS$ . On a donc bien comme demandé :

$$j_z = \frac{d\sigma}{dt}$$



25. Puisque dans le métal  $j_z = \gamma E_{z2}$  on peut écrire en notations complexes  $\epsilon_0 \frac{\omega_p^2}{j\omega} E_{z2} = j\omega\sigma$  ou encore :

$$\sigma = -\epsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega^2} E_{z2}$$

26. Ici il suffit d'utiliser le théorème de Gauss qui, en tant que conséquence de l'équation de Maxwell-Gauss, reste évidemment valable en régime variable. Si on l'applique à un cylindre de bases  $dS$  s'étendant de part et d'autre de la surface  $z = 0$ , le flux sortant à travers les surfaces de base est  $(E_{z1} - E_{z2}) dS$  et la charge intérieure est  $\sigma dS$  (on a vu que le milieu métallique est partout localement électriquement neutre,  $\rho = 0$ ). Enfin, la hauteur du cylindre peut ici être prise aussi petite qu'on voudra, de même donc que les flux des champs électriques dans les deux milieux à travers la surface latérale du cylindre. Le théorème de Gauss impose donc :

$$E_{z1} - E_{z2} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Cette relation s'écrit aussi  $E_{z1} - E_{z2} = -\frac{\omega_p^2}{\omega^2} E_{z2}$  donc :

$$\frac{E_{z1}}{E_{z2}} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$$

27. Il suffit de reprendre la relation proposée pour obtenir la valeur commune (on a déjà montré que  $E_x$  et  $k_x$  sont continus de part et d'autre de l'interface)  $E_x k_x = -E_{z1} k_{z1} = -E_{z2} k_{z2}$  donc :

$$\frac{k_{z2}}{k_{z1}} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$$

28. On avait établi  $B_{y2} = \frac{E_x}{c} \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{\omega c k_{z2}}$  et  $B_{y1} = \frac{E_x}{c} \frac{\omega}{c k_{z1}}$  ; la valeur de  $E_x$  étant commune, supposer la continuité du champ magnétique (tangential) à la traversée de la surface de séparation impose  $B_{y2} = B_{y1}$  soit  $\frac{\omega^2 - \omega_p^2}{k_{z2}} = \frac{\omega^2}{k_{z1}}$ , qui est bien la même relation.

29. Les relations citées dans l'énoncé sont  $k_{z2} = \epsilon k_{z1}$ ,  $k_x^2 + k_{z1}^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$  et  $k_x^2 + k_{z2}^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$  soit aussi  $k_x^2 + k_{z2}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon$ . On peut donc écrire  $\epsilon (k_x^2 + k_{z1}^2) = k_x^2 + \epsilon^2 k_{z1}^2$  qui se développe en  $k_x^2 (\epsilon - 1) = k_{z1}^2 \epsilon (\epsilon - 1)$  donc, compte tenu que  $\omega \neq \omega_p$  soit  $\epsilon \neq 1$ , les relations demandées :

$$k_{z1}^2 = \frac{1}{\epsilon} k_x^2 \text{ donc } k_{z2}^2 = \epsilon k_x^2$$

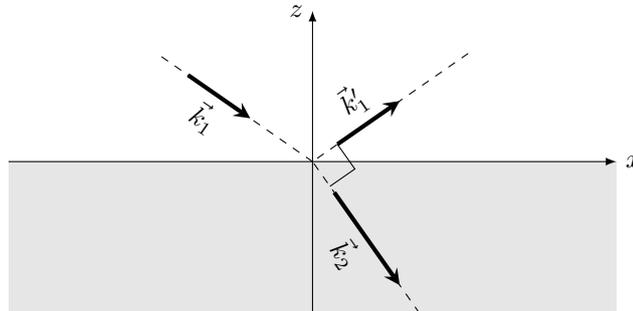
30. L'onde réfléchie serait de direction de propagation  $\vec{k}'_1$  symétrique de  $\vec{k}_1$  relativement à la normale  $\vec{e}_z$  donc :

$$k'_x = k_x \text{ et } k'_{z1} = -k_{z1}$$

On en déduit que  $\vec{k}'_1 \cdot \vec{k}_2 = k_x^2 - k_{z1} k_{z2}$  avec  $k_{z1} = -k_x / \sqrt{\epsilon}$ ,  $k_{z2} = -\sqrt{\epsilon} k_x$  ; finalement, et comme demandé :

$$\vec{k}'_1 \cdot \vec{k}_2 = 0$$

Pour le tracé on remarque que  $0 < \epsilon < 1$  donc  $|k_{z1}| < |k_{z2}|$  tandis que les valeurs de  $k_x$  sont communes :



31. Pour une onde propagative en  $x$  mais évanescente en  $z$  on parlera d'onde de surface. On peut alors écrire  $k_z = j\alpha$  et  $\exp(-jk_z z) = \exp(\alpha z)$ . On aura bien une onde évanescente si  $\lim_{z \rightarrow +\infty} e^{\alpha_1 z} = 0$  et  $\lim_{z \rightarrow -\infty} e^{\alpha_2 z} = 0$  donc si  $\alpha_1 < 0$  et  $\alpha_2 > 0$  donc si  $k_{z1}$  et  $k_{z2}$  sont tous deux imaginaires purs avec :

$$\text{Im}(k_{z1}) < 0 \text{ et } \text{Im}(k_{z2}) > 0$$

32. On veut  $k_{z1}^2 < 0$  et  $k_{z2}^2 > 0$  mais  $k_x^2 > 0$  donc  $\epsilon < 0$  soit :

$$\omega < \omega_p$$

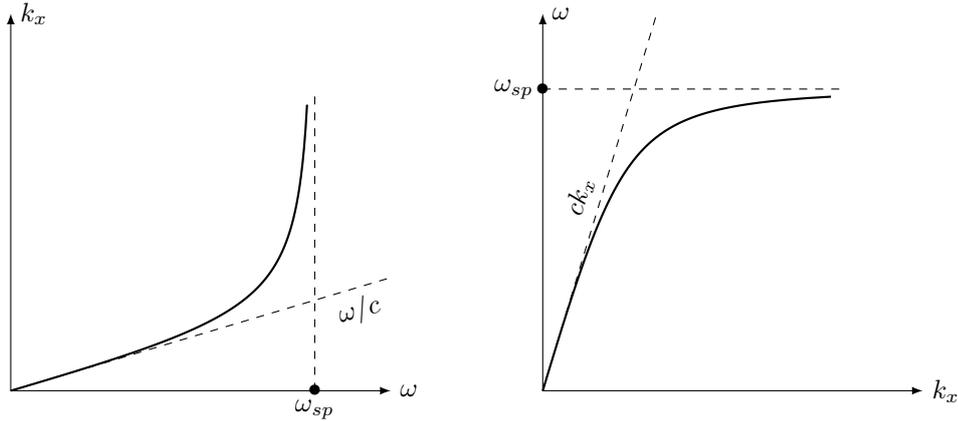
33.  $k_{z1}^2 = \frac{k_x^2}{\epsilon} = \frac{\omega^2}{c^2} - k_x^2$  donc :

$$k_x^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\epsilon}{1 + \epsilon} \text{ soit } k_x^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\omega_p^2 - \omega^2}{\omega_p^2 - 2\omega^2}$$

La condition  $k_x^2 > 0$  est équivalente, compte tenu que  $\omega < \omega_p$ , à  $\omega_p > \sqrt{2}\omega$  soit :

$$\omega < \omega_{sp} \text{ où } \omega_{sp} = \frac{\omega_p}{\sqrt{2}}$$

34. Pour le tracé de  $k_x$  en fonction de  $\omega$  on peut remarquer que  $k_x \sim \frac{\omega}{c}$  si  $\omega \rightarrow 0$  et  $k_x \rightarrow \infty$  si  $\omega \rightarrow \omega_{sp}$ . Les tracés demandés sont réciproques l'un de l'autre :



Si  $\omega \ll \omega_{sp}$  on a déjà fait remarquer que  $k_x \sim \omega/c$ ; la vitesse de groupe est définie à partir du seul terme propagatif  $k_x$  par  $v_g = \frac{d\omega}{dk_x}$  donc :

$$v_g \simeq c \text{ pour } \omega \ll \omega_{sp}$$

tandis que qì  $\omega \rightarrow \omega_{sp}^-$  la courbe a une asymptote horizontale donc une pente nulle :

$$v_g \rightarrow 0 \text{ pour } \omega \rightarrow \omega_{sp}$$

35. La longueur d'onde est liée au seul terme propagatif,  $\lambda = 2\pi/k_x$ . Les distances caractéristiques d'atténuation sont liées à la partie imaginaire du vecteur d'onde, donc  $k_{z1}^2 = -1/\delta_1^2$  et  $k_{z2}^2 = -1/\delta_2^2$ . Finalement :

$$\delta_1 = \frac{\lambda}{2\pi} \sqrt{-\epsilon} \text{ et } \delta_2 = \frac{\lambda}{2\pi \sqrt{-\epsilon}}$$

avec  $-\epsilon = \frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1$ . Dans le cas limite  $\omega \ll \omega_{sp}$  on a  $-\epsilon \simeq \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \rightarrow \infty$  donc :

$$\delta_1 = \frac{\lambda}{2\pi} \frac{\omega_p}{\omega} \rightarrow \infty \text{ et } \delta_2 = \frac{\lambda}{2\pi} \frac{\omega}{\omega_p} \rightarrow 0 \text{ si } \omega \rightarrow 0$$

Si  $\omega \rightarrow \omega_{sp}$  on trouve  $-\epsilon = 1$  donc

$$\delta_1 = \delta_2 = \frac{\lambda}{2\pi} \text{ si } \omega \rightarrow \omega_{sp}$$

36. Rappelons ici que  $E_z = -E_x \frac{k_x}{k_z}$  avec  $k_{z1} = -j \frac{k_x}{\sqrt{-\epsilon}}$  et  $k_{z2} = j k_x \sqrt{-\epsilon}$ . Les composantes  $E_x$  étant commune aux deux milieux on supposera  $E_x = E_0 > 0$  et on notera de même  $k_x = k_0$ ; on trouve respectivement, dans le vide ( $z > 0$ ) :

$$E_x = E_0 \cos(\omega t - k_0 x) \exp\left(-\frac{k_0 z}{\sqrt{-\epsilon}}\right) \text{ et } E_z = -E_0 \sqrt{-\epsilon} \sin(\omega t - k_0 x) \exp\left(-\frac{k_0 z}{\sqrt{-\epsilon}}\right)$$

et dans le métal ( $z < 0$ ) :

$$E_x = E_0 \cos(\omega t - k_0 x) \exp(\sqrt{-\epsilon} k_0 z) \text{ et } E_z = \frac{E_0}{\sqrt{-\epsilon}} \sin(\omega t - k_0 x) \exp(\sqrt{-\epsilon} k_0 z)$$

37. L'inclinaison des lignes de champ est donnée par le rapport  $E_z/E_x$ , qui est indépendant de  $z$ . On a plus précisément dans le vide  $\frac{E_z}{E_x} = -\sqrt{-\epsilon} \tan(\omega t - k_0 x)$ . À un instant donné la ligne de champ a pour équation  $\frac{dz}{dx} = \sqrt{-\epsilon} \tan(k_0 x)$  ou par intégration  $z = -\frac{\sqrt{-\epsilon}}{k_0} \ln |\cos(k_0 x)| + \text{cte}$ . Dans le métal on trouve de même  $z = \frac{1}{k_0 \sqrt{-\epsilon}} \ln |\cos(k_0 x)| + \text{cte}$ . Il est possible (mais pas simple) de tracer l'allure des lignes de champ...