Oraux

Polytechnique

Maths 1

Soit $(\varepsilon_n) \in (\mathbf{R}^+)^{\mathbf{N}}$ une suite qui vérifie: $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, $\sum \varepsilon_n$ diverge et $\sum \varepsilon_{n+1}\varepsilon_n$ converge.

Soit u la suite définie par $u_0, u_1 \in \mathbf{R}$ et:

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, u_{n+1} = \varepsilon_n u_n + \varepsilon_{n+1} u_{n-1} (*)$$

Montrer que:

$$\frac{u_n}{\prod_{k=1}^{n}(1+\varepsilon_k)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mu_0 u_0 + \mu_1 u_1 \text{ où } \mu_0 \text{ et } \mu_1 \text{ ne dépendent que de } \varepsilon_n$$

Déroulement (50min): J'ai posé $(v_n) = \left(\frac{u_n}{\prod_{k=1}^{n}(1+\varepsilon_k)}\right)$ puis $(\Delta_n) = (v_{n+1} - v_n)$. Je lui ai proposé de d'abord établir la convergence de v et ceci en établissant celle de la série de terme général Δ_n. Il m'a dit que c'était une bonne idée. J'ai donc explicité Δ_{n+1} pour trouver une sorte de récurrence entre les Δ_n en utilisant la relation $(*)$. Je trouve une relation de genre $\Delta_{n+1} = -(\text{Quelque chose positive qui tend vers } 0)\left(\frac{v_n}{1+\varepsilon_n} - v_{n-1}\right)$. J'ai dit que $(1+\varepsilon_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ donc pour n assez grand $\Delta_{n+1} \simeq -(\text{Quelque chose positive})\Delta_n$. Pour écrire cela rigoureusement, j'écris le fait que $(1+\varepsilon_n)^{-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ (définition de la limite) puis j'ai fait apparaitre Δ_{n+1}. Je dit à l'examinateur qu'à travers ces manipulations j'espere trouver une inégalité du genre $|\Delta_{n+1}| < k|\Delta_n|$ où $k < 1$ pour conclure facilement. Il me dit que c'est une bonne idée mais que ç'est un peu tordu de le démontrer. Par harasard, en faisant ces manipulations, je me demande à voix haute est-ce que v_n déja est bornée, il me dit que c'est une bonne question intermédiaire. J'arrête donc mes calculs pour répondre à cette question. Je me demande que si on suppose que v_n majorée (en valeur absolue) par M que doit M vérifier en utilisant la relation de recurrence entre les v_k. J'utilise alors l'inégalité triangulaire ce qui me donne une expression que tend vers M, je bloque un petit peu, l'examinateur me dit qu'on peut majorer ceci par M. Je bloque encore et je lui dit que l'expression dépend de n. Il me dit encore une fois qu'on peut majorer independament de M. J'ai pas essayé de manipuler l'expression et l'examinateur me dit de réduire au même dénominateur (chose que je fait avec beaucoup d'erreurs, fautes d'indices et de calculs xD). Après me reconcentrer, je remarque que tout se simplifie et qu'effectivement on peut majorer par M. Je dit alors que pour M égal au max des deux premiers termes de v, on trouve le résultat par une simple récurrence. Je reprend alors mes calculs sur Δ_{n+1}. L'examinateur me demande vous voulez faire quoi enfin? Je lui reponds soit comme susmentioné montrer que $\Delta_n = \mathcal{O}(k^n)$, ou bien montrer que Δ_n est alternée puis d'utiliser le critère spéciale, il me fait une expression de visage j'ai compris que c'est peut être pas la meilleure idée et je signale que j'aurai problème d'hypothèse (décroissance de $|\Delta_n|$) et que j'abondonne cette piste. Je bloque un peu, il me rappelle qu'a ce stade (30 minutes in) je n'ai pas utilisé les 2 autres hypothèses sur ε. Il me dit de faire apparaitre Δ_n dans l'expression de Δ_{n+1} puis je manipule pour trouver enfin $|\Delta_{n+1}| < \varepsilon_n\varepsilon_{n+1}\Delta_n + ...$ (je me rappelle pas beaucoup de l'expression). Avant de me laisser réflichir (probablement par contrainte de temps), il me demande de montrer un lemme que si une série dont le terme géneral est positif vérifie une telle inégalité elle converge. Je le montre facilement puis je conclut que $\sum \Delta_n$ converge absolument donc converge et donc v converge. Je dit alors que je passe à l'expression de la limite. Avant d'exprimer mon idée d'essayer de poser $r : (u_0, u_1) \to \lim_{n\to+\infty} v_n$, l'épreuve se termine. Grosso modo, l'examinateur était très attentif, il me suit dans mon raisonnement et noter parfois dans son ordinateur (je pense ce que je faisais).

Note: 17

Maths 2

1) On considère $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ continue sur $[a, b]$ telle que $f(a) = f(b)$. Montrer que pour un entier $n \geq 2$, ils existent $a', b' \in [a, b]$ tels que:

$$b' - a' = \frac{b-a}{n} \ , \ f(a') = f(b')$$

2) On suppose désormais que f dérivable sur $]a, b[$. Montrer à l'aide de la question précedente le théorème de Rolle.

3) Pour $a = 0$, $b = 1$ et $f(0) = f(1) = 0$, puis pour $\lambda \in \mathbf{R}$. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que:

$$f'(c) + \lambda f(c) = 0$$

4) Soit $f : x \to \exp(-x^2)$, dénombrer les zéros de $f^{(n)}$ pour $n \in \mathbf{N}$.

Déroulement (50min): Pour la première question, je savais que de tels questions se résout par des fonction intérmédiaires, et j'ai eu l'idée d'introduire $\varphi : x \in [a, b-(b-a)/n] \to f(x+(b-a)/n) - f(x)$ (J'ai mentioné que le fait que $n \geq 2$ fait que l'ensemble n'est pas réduit à un singleton). Pour 'légitimiser' cet introduction, j'ai d'abord fait un dessin d'une telle fonction vérifiant de tels hypothéses, j'ai dit qu'on peut réduire le probléme à une inconnue par trouver a' et que je propose de voir sur l'ensemble des $a' \in [a, b-(b-a)/n]$ si l'un vérifie ce qu'on cherche *i.e* s'il existe un a' tel que $f(a') = f(a'+(b-a)/n)$. Puis je calcul pour $k \in [|0, n-1|]$ les valeurs de $\varphi(a+k(b-a)/n)$, je dit que je remarque que la somme de ces termes se télescopent en $\sum_{k=0}^{n-1} \varphi(a+k(b-a)/n) = f(a)-f(b) = 0$. J'ai distingué entre deux cas, si tous les élements intérvenant dans la somme sont nuls alors c'est vérifié aisément, sinon il existe k_0 tel que $\varphi(a + k_0(b-a)/n) \neq 0$, on peut supposer sans nuire à la généralité que $\varphi(a + k_0(b-a)/n) > 0$. La somme nulle implique que nécessairement un des termes de la somme est négatif (sinon tous les termes sont positfs donc la somme est supérieure à $\varphi(a + k_0(b-a)/n) > 0$). On applique aisement le TVI (j'ai bien explicité les hypothéses en détails) pour trouver le résultat. La deuxième était un peu plus difficile, j'ai fait un dessin d'une bosse et j'ai dit que si on regarde les termes des a' et b' déja établi, les termes se rapprochent vers un point ou la fonction est extremale quand n croît, j'ai donc poser deux suite de tels termes j'ai montré qu'ils sont adjacents puis j'ai posé c leurs limites communes. J'ai proposé de montrer $f'(c) = 0$. J'ai supposé que c'est pas le cas et que sans perte de généralité que $f'(c) > 0$. Puis à l'aide de définition de la dérivée comme étant limite du taux d'accroissement (prendre $\varepsilon = f'(c)/2$), j'ai montré que sur un voisinage immédiat de c pour $x > c$, $f(x) > f(c)$ puis pour $x < c$, $f(x) < f(c)$. Après, j'ai dit que pour N assez grand on peut trouver les élements des suites définie sur ces voisinages et que l'une de ces deux suites ne stationnent pas en c. On trouve une contradiction avec le fait que les images par f sont égaux. D'où le résultat. Puis pour la troisième question une simple multiplication par $\exp(\lambda x)$ fait l'affaire. Enfin pour la dérnière question, j'ai dérivé une première fois la fonction ainsi définie. J'ai dit qu'on peut montrer que les dérivées d'ordres plus élevés s'écrivent comme produit de f et d'une fonction polynômiale R_n. J'ai puis dit puisque f ne s'annule jamais, on cherche les raçines de R_n. J'ai établi une relation de récurrence entre ces polynômes mais cela ne m'as pas servi. Le fait de transposer le problème à $\mathbf{R}[X]$ a rendu le problème plus difficile. J'ai aprés eu l'idée de raisonner par récurrence, de montrer que $f^{(n)}$ admet n racines distinctes. La petite étude sur les polynômes m'a pourtant permis de dire que $f^{(n)}$ admet au plus n racines (Gauss-Lucas). Donc si j'établit l'existence de n racines distinctes de $f^{(n)}$ ce sont les racines de $f^{(n)}$. J'ai fait un raisonnement classique pour montrer que si g admet n raçines, alors g' admet au moins $n-1$ raçines intercallés entre ceux de g. (Par simple application de théorème de Rolle). Il me restait donc 2 raçines. J'ai fait un dessin (qualitatif) de $f^{(n)}$ (quelques oscillations autour de 0 puis tend vers 0 à $\pm$l'infinie). J'ai dit que sur $]-\infty, x_1[$ (la plus petite raçine de $f^{(n)}$) on voit que la fonction déssiné est extremal en un point, et donc cet extremum sera une raçine de la fonction dérivée, idem sur $]x_n, +\infty[$ (plus grande raçine), et donc on trouve les $n+1$ distinctes de $f^{(n+1)}$. Ensuite j'ai essayé de rédiger rigouresement cela, en disant que si $f^{(n+1)}$ ne s'annule pas sur $]-\infty, x_1[$, par sa continuité elle est de signe constant, ce qui se manifeste par une monotonie stricte de $f^{(n)}$ (ce qu'est absurde puisqu'on trouve $f(-\infty) = 0 < f(x_1) = 0$). Puis j'ai dit que c'est vérifie pour $n = 1$ donc on peut conclure par récurrence. L'examinateur me dit que le résultat est plus général et est vérifie pour toute fonction négative qui converge vers 0 en $\pm\infty$ vérifie cela, j'ai dit oui. In retrospect, mes idées étaient très désordonné mais enfin de chaque étape je faisais une synthèse. L'examinateur m'a un peu déstabilisé dans les 10 premiers minutes car il semblait qu'il ne m'écoutais pas, il faisait que noter. Après j'ai dit que c'est peut être dans mon avantage.

Note: 15

ADS

Un document à propos des vents solaires. J'ai pas compris les deux dernières parties, je me suis donc concentré sur les deux premières parties. J'ai exactement réstitué le document avec un peu d'explications d'ionisation et d'exemples, puis j'ai essayé d'expliquer ce que j'ai compris quant au phénomènes magnétiques liés aux plasmas (tout ça moins de 10 minutes). L'examinateur me demande est-ce que j'ai lu les deux dernières parties, je lui dit oui mais j'ai préféré me concentrer sur les deux premières parties. Il m'a dit qu'il fallut mentionner ces parties. Puis il me demande d'établir une formule, je lui dit que je l'ai pas fait auparavant mais que je peux le faire sur le tableau (celle de vitesse de dérive), j'ai donné une démarche très calculatoire, il me dit que c'est pas nécessaire de se plonger dans tout ces calculs, et d'utiliser une formule (seule formule) fournies dans l'énoncé de l'exercice de produit vectoriel triple. Après, il m'a dit de considérer un rapport de deux pression puis d'établir chaqu'une des deux pressions. J'ai établi celle de l'énergie thermique (cours de sup) mais j'ai pas bien compris c'est quoi la pression magnétique, il m'a dit que c'est hors programme, et qu'il attend un raisonnement utilisant de l'analyse dimensionnel, j'ai parachuté l'expression $e_m = B^2/2\mu_0$ du cours d'EM puis par analyse dimensionel c'est homogène à une pression, il m'a dit c'est ce qu'on cherche et l'épreuve se termine. L'examinateur était grand et vieux, il était attentif et m'écoutait, mais s'agaçait assez facilement si je le comprenais pas.

Note: 7

Français

De '*Je sais que pour un entendement commun...*' (page 286) à '*...toutes les couleurs fondues ensemble ?*' (page 289) de Moby-Dick. Un résumé + un commentaire et une disscusion de 15min avec l'examinateur. (Rappel: Un 0 en français ne peut pas éliminer un candidat étranger speaking as of 2022)

Note: 11

Chimie

Un problème de 8 $\sim$ 9 questions (tous avec des petits sous questions, par exemple, commenter, pourquoi utiliser ceci...) à propos du sodium (^{22}Na et ^{24}Na)... Il traite très brievement l'aspect radioactif du sodium, puis essaie de tester le candidat sur un maximum de points du programme du chimie (Exemple, qst 1 structure électronique, qst 2 cinétique chimique, qst 3 petits calculs, qst 4 cristallographie, qst 5 thermochimie...) Les questions sont des applications directes du cours et ne nécessitent pas une réflexion profonde (en comparaison avec l'épreuve de physique ou bien celles de maths). newline
Note: 4(J'ai lu la chimie pour la première fois en prépa la matinée de l'epreuve mdr)

Anglais

Un vidéo (jusqu'à 5:30) à propos de la politique américaine. On nous demande un commentaire + une réstitution (voir rapport de jury 2015).

Note: 12

Physique

Au contraire des autres épreuves, ici l'examinateur se met debout et écrit l'énoncé sur le tableau:

$$\mathcal{R}_1 \longleftrightarrow \sum \longleftrightarrow \mathcal{R}_2$$

On considére le système schématisé ci contre, consitué de $\mathcal{R}_1$ un résérvoir d'eau liquide à $T_1 = 0°C$, un autre $\mathcal{R}_2$ aussi d'eau liquide à $T_2 = 100°C$ tout les deux reliés à $\sum$ une machine thermique fonctionnant en un cycle de Carnot réversible. Quelle est la quantité de l'eau dans le réservoir $\mathcal{R}_2$ qui va être vaporiser quand 1kg de l'eau en $\mathcal{R}_1$ se transforme en glace? (Après avoir répondu à cette question) Quel est le travail fourni par un opérateur exterieur à la machine thermique $\sum$? Calculer le rendement de cette machine. (Questions de cours proposés par l'examinateur) C'est quoi un cycle de Carnot? Comment peut on définir le rendement ρ?

Déroulement (50min): J'avais oublié le cours des machines thermiques, du coup j'ai essayé de tous demontrer (pour quel sens dans le diagramme (P, V) le travail est positif, comment tracer une isotherme en comparaison avec une adiabatique révérsible...) après un peu près de 40min de rappels de cours, j'ai réalisé qu'il ne fallait qu'appliquer le 2$^{\text{nd}}$ principe de la thermodynamique. Pour le travail ça se trouve par premier principe et le rendement est supérieur à 3. Cela m'a semblé illogique et au correcteur aussi, j'ai dit je pense que j'ai fait une erreur de signes, il m'a dit "C'est ça". Après j'ai réfléchi un petit peu et je me suis dit qu'il est naturel que l'énergie reçue par $\mathcal{R}_2$ soit supérieure au travail puisqu'elle reçoit de plus de l'energie de la part du premier récipient.

Note: 16

Ressenti après passage des oraux d'X

La majorité du temps les examinateurs (matières scientifiques) ne faisaient que noter sur leurs tablettes. J'ai discuté à propos de ça avec mes amis qui passaient l'X, ils m'ont dit que pour l'X, l'examinateur n'a pas droit de te poser une note directement , il ne fait que noter ce que t'as fait. En parallèle avec toi, d'autres passent le même exercice que toi avec d'autres examinateurs et enfin de la séances ces examinateurs se rassemblent et comparent, à l'aide de ce qu'ils ont écrit sur leurs tablettes les candidats entre eux puis posent (collectivement) les notes.

Maths

EXERCICE 1: Soit $n, p \geq 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ telle que $A^p = I_n$. Soit $\omega \in \mathbf{U}_p$ telle que ω^{-1} ne soit pas une valeur propre de A. Montrer que $\sum_{k=0}^{p-1} \omega^k A^k = 0_n$.

EXERCICE 2: Soit $(a_n) = (\int_0^{\pi/4} \tan^n t \; \mathrm{d}t)$.
1) Étudier (a_n).

2) Établir une relation de récurrence entre les termes de (a_n).

3) On définit $u_n(x) : x \to \frac{a_n x^n}{n^\alpha}$. Étudier la série de terme général $u_n(x)$ en fonction de x et α.

4) On définit $u(x) : x \to \sum_{k=0}^{+\infty} a_n x^n$. Exprimer u par des fonctions usuelles.

EXERCICE 3: Soit $n, p \geq 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ telle que $A^p = 0_n$.
1) Montrer que $A^n = 0_n$.

2) Calculer $\det(I_n + A)$.

3) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ telle que $AM = MA$. Exprimer $\det(M + A)$ (Indication donnée dans l'énoncé: Commencer par $M \in \mathbf{GL}_n(\mathbf{C})$).

Déroulement (15min de préparation, dans mon cas 5min j'étais en retard, 45min $\sim$ 1h de passage, dans mon cas 1h)): Pour l'exercice 1, j'ai introduit $P(X) = \sum_{k=0}^{p-1} \omega^k X^k$, j'ai dit que $(X\omega - 1)P(X) = X^p - 1$, donc $(A\omega - I_n)P(A) = 0$, j'ai après utilisé le fait que ω^{-1} ne soit pas une valeur propre pour dire que la matrice $A\omega - I_n$ est inversible pour trouver le résultat ensuite l'examinateur cherche dans son bureau et me donne un papier contenant le deuxième exerice 1 se résout par convergence dominée et 2 en remarquant que $\int \tan^{n+2} = \int \tan^n \tan' - \int \tan^n$. Pour la troisième j'ai proposé d'utiliser, après d'avoir justifié que a_n est non nulle pour tout entier et supposant que $x \neq 0$, la régle de d'Alembert, je trouve alors un terme en a_{n+1}/a_n. J'ai dit que je pense que cela tend vers 1 afin qu'on ait plus dependance de a_n. J'ai établi des inégalités pour montrer cela mais sans succes, il m'indique alors de montrer un équivalent de a_n et m'aide à faire cela, j'ai après dit qu'on a même pas besoin de la régle de d'Alembert après avoir établi cet équivalent, il suffit d'utiliser le fait que $u_n(x) \sim_{+\infty} \frac{x^n}{2n^{\alpha+1}}$ pour conclure, et puis j'ai fait les disjonctions des cas nécessaires. Pour la $4-$ième question, j'ai proposé d'utiliser une interversion série intégrale (après l'avoir justifié) pour aboutir à une intégrale d'une certaine fraction rationnelle dont le calcul est aisé, il me dit d'utiliser la relation de récurrence établie, j'ai donc multiplié par x^{n+2} puis sommer pour établir une relation entre $x^2 f(x)$ et $f(x)$ avant de compléter les calculs, il me file une autre feuille contenant le troisième exercice. Pour la première question il suffit de montrer que la seule valeur propre de A est 0 donc $\chi_A(X) = X^n$ ce qui nous permet de conclure par Cayley-Hamilton (piste proposée par un ami raisonner sur la famille $(I_n, A, \cdots, A^{k-1})$ où $k = \min\{r | A^r = 0\}$ montrer qu'elle est libre donc $k \leq n$), pour 2, relier ce qu'on cherche avec $\chi_A(-1)$. Pour la troisième, pour $M \in \mathbf{GL}_n(\mathbf{C})$ on peut 'factoriser' par M pour montrer que c'est $\det(M)$ (on se rend à la deuxième question à l'aide de l'hypothèse de la commutativité). Je dit que pour le cas général on peut invoquer la densité de $\mathbf{GL}_n(\mathbf{C})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ puis utiliser le fait que det est continue mais qu'on aura problème de commutativité j'ai donc proposer de cotrigonaliser A et M pour trouver le résultat assez facilement après de montrer que les deux matrices sont cotrigonalisables, je me lance dans la démonstration et l'examinateur m'interromps et me dit d'utiliser la densité $\mathbf{GL}_n(\mathbf{C})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ je lui répondu qu'on aura problème de commutativité et il se met debout et commence à réfléchir en face du tableau il me sembla lui meme perdu, il me dit que l'épreuve est finie. Un ami m'a dit après l'oral qu'on peut utiliser la suite $(M + I_n/r)_{r \geq 1}$ qui est à valeurs dans $\mathbf{GL}_n(\mathbf{C})$ à partir d'un certain rang et ce qui va donner le résultat.

Physique

Exercice 1: (Aucune figure fournie) Soit $\mathcal{T}$ un récipient contant n moles d'un gaz parfait délimité par un piston de masse m et de section S. La pression atmosphérique est notée P_0 et on suppose qu'à l'état initial le volume du gaz est V_0.

1) On enfonce très légèrement le piston et on suppose que son mouvement se fait sans frottements et qu'il est assez rapide pour qu'on peut supposer la transformation adiabatique mais aussi quasi-statique. Étudier le mouvement du piston. Montrer qu'à l'aide de cet étude on peut mesurer γ.

2) On fixe (à l'aide d'un électroaimant par exemple) la pression au sein du gaz à P_0 et on suppose que le volume du gaz est de V_0. On lâche alors le piston sans lui communiquer une vitesse initiale. Déterminer le déplacement L du piston avant qu'il se rebrousse.

Exercice 2: Soit une distribution de charges dont le potentiel crée est pour $q, a > 0$.

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left(1 + \frac{r}{a}\right)\exp\left(-\frac{2r}{a}\right)$$

Définir et déterminer l'énergie de liason de cette distribution. (Question intermédiaire: Déterminer l'expression de ΔV (laplacien) en sphérique (je voulais calculer ρ, je trouve un laplacien, il y'avait une feuille sur la table avec les différents opérateurs, il m'a dit supposant que je n'avais pas ces formules qu'est ce que je vais faire?)

Questions de cours: Quelles sont les grandeurs fondamentales de l'analyse dimensionnelle? Donner des constantes permettant une définition théorique des unités de ces grandeurs.

Anglais

Un extrait d'une magazine, 20min de présentation et 20min de préparation. Pour l'entretien des questions genre: Do you think work from home worsens social divide?

Français

Je me rappelle plus de la source du texte mais beaucoup plus sympa que celui de l'X, un texte explicant que la baisse des lecteurs et de la lecture est dû à la transition du livre en papier à celui digital. 20min de présentation et 20min de préparation.