# Equa diff :

(Toutes les bases ne sont pas répétées.)

## Equivalence équa diff matricielle - système linéaire :

$a : I \to \mathcal{L}(F)$, $b : I \to F$ continues $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ base de $F$.

$A(t) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(a(t))$, $B(t) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(b(t))$, $X(t) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x(t))$

$= (a_{ij}(t))_{i,j}$ $\quad = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}$ $\quad = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$

$x'(t) = a(t)(x(t)) + b(t) \iff X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$

$$\iff \begin{cases} x_1'(t) = a_{11}(t)x_1(t) + a_{12}(t)x_2(t) + \cdots + a_{1n}(t)x_n(t) + b_1(t) \\ x_2'(t) = a_{21}(t)x_1(t) + a_{22}(t)x_2(t) + \cdots + a_{2n}(t)x_n(t) + b_2(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) = a_{n1}(t)x_1(t) + a_{n2}(t)x_2(t) + \cdots + a_{nn}(t)x_n(t) + b_n(t) \end{cases}$$

## Problème de Cauchy + Mise sous forme intégrale.

$a : I \to \mathcal{L}(F)$, $b : I \to F$ continues, $(t_0, x_0) \in I \times F$

$$\begin{cases} x'(t) = a(t)(x(t)) + b(t) \quad (E) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

est le problème de Cauchy de $(E)$ en $(t_0, x_0)$

$$\iff x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} \big(a(u)(x(u)) + b(u)\big)\, du.$$

## Cauchy-Lipschitz linéaire.

Le problème de Cauchy admet une unique solution

## Corollaire (dimension) :

$\varphi \longmapsto \varphi(t_0)$ est un isomorphisme de $S(H) \to F$

donc $\dim(S(H)) = \dim F$

## Corollaire :

Soit $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ une famille de $n$ solutions de $(H)$ et $t_0 \in I$

On a :

$(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ base de $S(H) \iff (\varphi_1(t_0), \dots, \varphi_n(t_0))$ base de $F$

## Wronskien :

$B$ base de $F$ et $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ famille de $n$ solution

On pose
$$W_B : I \longrightarrow \mathbb{K}$$
$$t \longmapsto \det_B(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)).$$

On a équivalence entre :

i) $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ sfs de $(H)$

ii) $(\forall t \in I)$ $W_B(t) \neq 0$

iii) $(\exists t_0 \in I)$ $W_B(t) \neq 0$

## Méthode de la variation des csts :

$(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ sfs de $(H)$ ; $(E)$ $x'(t) = a(t)(x(t)) + b(t)$

$\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des fct dérivables

$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \varphi_k$ et solution de $(E) \iff \sum_{k=1}^{n} \lambda_k' \varphi_k = b$

## Equa diff linéaire d'ordre n :

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}, \quad A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \ddots & 1 \\ a_0(t) & a_1(t) & \cdots & \cdots & \cdots & a_{n-1}(t) \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}.$$

on a alors :

$$x^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(t) x^{(i)}(t) + b(t) \iff X'(t) = A(t) X(t) + B(t)$$

Scanned with CamScanner

... de $x'' = a(t)x'(t) + b(t)x(t) + c(t)$

M1

Si $(y_1, y_2)$ est un sfs de (H) alors $\exists$ une solution de (E) de la forme $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ avec $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R})$ telle que

$$\begin{cases} \lambda_1' y_1 + \lambda_2' y_2 = 0 \\ \lambda_1' y_1' + \lambda_2' y_2' = c(t) \end{cases}$$

M2

Si $x_0$ est une solution de (H) qui ne s'annule pas sur $I$, on cherche une solution de (E) de la forme

$\boxed{x = x_0 z}$ avec $z \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R})$

$z'$ vérifie alors une equa diff linéaire d'ordre 1

Méthode de Lagrange.

Systèmes différentiels linéaires d'ordre 1 à coeff. constants.

M1

La solution de $X'(t) = A \cdot X(t)$ est

$$X : I \longrightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$$
$$t \longmapsto X(t) = e^{tA} C$$

où $C$ est une matrice colonne.

La solution de $\begin{cases} X'(t) = A \cdot X(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$ est :

$$X : I \longrightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$$
$$t \longmapsto e^{(t-t_0)A} X_0$$

M2

La solution de $x'(t) = (x(t))$ est :

$$x : I \longrightarrow F$$
$$t \longmapsto \exp(ta)(u)$$

où $u \in F$

La solution de $\begin{cases} x'(t) = a(x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ est :

$$x : I \longrightarrow F$$
$$t \longmapsto \exp((t-t_0)a)(x_0)$$

M3

$(S) : X'(t) = AX(t)$

si A est diagonalisable alors soient $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ ses vp et $(V_1, \dots, V_n)$ une base de $\vec{vp}$ telle que $AV_i = \lambda_i V_i$

alors :

$$\left(\left(t \longmapsto e^{t\lambda_i} V_i\right)\right)_{i \in [\![1,n]\!]} \text{ est un sfs}$$

M4

$(S) : x'(t) = a(x(t))$

si $a$ est diagonalisable alors soient $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ ses vp et $(v_1, \dots, v_n)$ une base de $\vec{vp}$ telle que $a(v_i) = \lambda_i v_i$

alors $\left(\left(t \longmapsto e^{t\lambda_i} v_i\right)\right)_{i \in [\![1,n]\!]}$ est un sfs