Séries entière

Lemme d'Abel :

Si $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ et $(a_n z_0^n)_n$ est bornée

alors $(\forall z \in \mathbb{C})$ $|z| < |z_0| \Rightarrow \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ CVA

$(\exists M \in \mathbb{R})$ $|a_n z_0^n| < M \Rightarrow |a_n z^n| < M \underbrace{\left|\frac{z}{z_0}\right|^n}$

sa série CV car $\left|\frac{z}{z_0}\right| < 1$

... etc

Théorème :

Si $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ et Δ_f son domaine de déf.

→ Pour $\mathbb{R}$: $]-R_a, R_a[\subseteq \Delta_f \subseteq [-R_a, R_a]$.

→ Pour $\mathbb{C}$: $D(0, R_a) \subseteq \Delta_f \subseteq D_f(0, R_a)$

Théorème :

- Si $|a_n| < |b_n|$ APCR alors $R_a \geq R_b$
- Si $a_n = o(b_n)$ ou $a_n = O(b_n)$ alors $R_a \geq R_b$.
- Si $a_n \sim b_n$ alors $R_a = R_b$

D'alembert : $(a_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \longrightarrow \ell \in [0, +\infty] \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{\ell} & \text{si } \ell \in]0, +\infty[\\ 0 & \text{si } \ell = +\infty \\ +\infty & \text{si } \ell = 0 \end{cases}$$

Th :

$\sum_{n \geq 0} a_n z_0^n$ est semi-convergente alors $R_a = |z_0|$

Théorème $\forall r \in]0, R_a[$:

$\rightarrow \sum a_n x^n$ CVN sur $[-r, r]$

$\rightarrow \sum a_n z^n$ CVN sur $D(0, r)$

$\Downarrow$

Théorème : $R_a \geq 0$

$$f :]-R_a, R_a[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

$$g : D(0, R_a) \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$z \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

sont définies continues sur leur ensemble de définition

Astuce : $(a_n)_n \in \mathbb{K}^n$ et $b_n = a_{n+1}$ et $c_n = n^k a_n$

alors $R_a = R_b = R_c$

Dérivation :

$$(\forall x \in]-R_a, R_a[) \quad f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$$

$$(\forall x \in]-R_a, R_a[) \quad f^{(p)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+p)!}{n!} a_{n+p} x^n$$

Toute les dérivées (d'ordre 0 inclue) ont m̂ rayon de convergence