Colle n°1 : Maths

1/ Théorème de Cantor :

Soit E un ensemble
Il existe une injection de E dans $\mathcal{P}(E)$
Il n'existe aucune injection de $\mathcal{P}(E)$ dans E
donc E n'est pas équipotent à $\mathcal{P}(E)$

∘ $f : E \to \mathcal{P}(E)$, $x \mapsto \{x\}$ est injective

∘ Supp $\exists$ une injection de $\mathcal{P}(E)$ vers E
Soit f une de ces injections $f : \mathcal{P}(E) \to E$
$\forall x \in E$ x a au plus un antécédent $Y(x)$ par f
posons $g : E \to \mathcal{P}(E)$

$$x \mapsto \begin{cases} Y(x) & \text{si } x \in \operatorname{Im} f \\ \emptyset & \text{sinon} \end{cases}$$

$\forall X \in$ $g\circ \underbrace{f(X)}_{(x)} = g(x) = Y(x) = X$ donc $g \circ f = Id_{\mathcal{P}(E)}$

alors g est surjective
Soit $A = \{x \in E \,/\, x \notin g(x)\}$
$A \in \mathcal{P}(E)$
si $x \in A$ alors $x \notin g(x)$ donc $A \neq g(x)$
si $x \in g(x)$ alors $x \notin A$ donc $A \neq g(x)$
donc A n'a pas d'antécédent par g
donc l'injection supposée existée n'existe pas
donc E et $\mathcal{P}(E)$ ne sont pas équipotents

2/ Toute partie d'un ens dénombrable est au plus dénombrable :

* Toute partie de $\mathbb{N}$ est soit finie (ok) soit dénombrable

Soit P une partie infinie de $\mathbb{N}$

$$\begin{cases} p_0 = \min P \\ \forall k \in \mathbb{N} \quad p_{k+1} = \min(P \setminus \{p_0 \dots p_k\}) \end{cases}$$

$\to (p_k)_{k\in\mathbb{N}} \nearrow$: $\forall p \in P \setminus \{p_0, \dots p_k\}$ $p \geq p_k$
Soit $k \in \mathbb{N}$

$\forall p \in P \setminus \{p_0 \dots p_k\}$ $p > p_k$
or $p_{k+1} = \min(P \setminus \{p_0 \dots p_k\})$ donc $p_{k+1} > p_k$
d'où $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est str croissante
donc $\varphi : \mathbb{N} \to P$, $k \mapsto p_k = \varphi(k)$ est injective

$\to$ Soit $n \in P$ supp $\forall k \in \mathbb{N}$ $\varphi(k) \neq n$
Soit $k_0 = \min\{k \in \mathbb{N} \,/\, p_{k_0} < n\}$
donc $p_{k_0} < n < p_{k_0+1}$
or $p_{k_0+1} = \min\{P \setminus \{p_0 \dots p_{k_0}\}\}$
et $n \in P \setminus \{p_0 \dots p_{k_0}\}$ donc contradiction
alors φ est surjective
donc φ est bijective

* Toute partie d'un ens. dénombrable est au plus dénombrable :

$$\begin{array}{ccc} E & \overset{f}{\approx} & \mathbb{N} \\ \cup & & \\ F & \xrightarrow[f_{|F}]{\approx} & f(F) \end{array}$$

$f(F)$ une partie de $\mathbb{N}$ donc au plus dénombrable

3/ $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable :

$\mathbb{R} \longrightarrow]0,1[$ est bijective

$x \longmapsto \frac{\operatorname{th} x+1}{2}$

Il suffit donc de mq $]0,1[$ est $\times$ dénombrable

Supp qu'il l'est :

$f : \mathbb{N} \longrightarrow]0,1[$

$n \longmapsto x_n$

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [\![0,9]\!]^{\mathbb{N}}$

$$x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a(n)}{10^{n+1}} = 0,a_0a_1a_2 \dots$$

$x_0 = 0,a_0(0)\,a_0(1)\,a_0(2) \dots$

$x_1 = 0,a_1(0)\,a_1(1)\,a_1(2) \dots$

$x_2 = 0,a_2(0)\,a_2(1)\,a_2(2) \dots$

Soit $b_n = \begin{cases} 1 & \text{si } a_n(n) \neq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$$x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{10^{n+1}} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad x \neq x_n$$

donc $]0,1[$ est infini non dénombrable

donc $]0,1[\approx \mathbb{R}$

4/ Toute réunion dénombrable d'ens au plus dénombrables est au plus dénombrable

Soit $(A_d)_{d\in D}$ une famille d'en au plus dénombrables Soit $\mathbb{N} \longrightarrow D$ une bijection

$n \longmapsto d_n$

Posons $\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad A_{d_n} = A'_n$ donc $\bigcup_{d\in\mathbb{N}} A_d = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A'_n$

$B_0 = A'_0$

$B_1 = A'_1 \setminus A'_0$

$\forall k \in \mathbb{N} \quad B_k = A'_k \setminus \{\bigcup_{p=0}^{k-1} A'_p\}$

on a donc $\quad \bigcup_{d\in D} A_d = \biguplus_{n\in\mathbb{N}} B_n$

B_n est au plus dénombrable donc $\forall n \in \mathbb{N}$

$\mathrm{Inj}(B_n, \mathbb{N}) \neq \emptyset$, $(\mathrm{Inj}(B_n,\mathbb{N}))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'ens. $\neq \emptyset$ 2 à 2 disjoints.

$(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \varphi_n \in \mathrm{Inj}(B_n, \mathbb{N})$

$h : \bigcup_{d\in D} A_d \longrightarrow \mathbb{N}^2$ $\qquad$ h est injective

$x \longmapsto (n, \varphi_n(x))$

puisque $\mathbb{N}^2$ dénombrable alors $\bigcup_{d\in D} A_d$ est au plus dénombrable.

5/ Théorème de Gauss - Lucas :

Soit $P \in \mathbb{C}[X]\setminus\{0\}$ les racines de P' sont dans l'enveloppe convexe des racines de P

$$P = \lambda (X-a_1)^{k_1}(X-a_2)^{k_2} \dots (X-a_n)^{k_n}$$

$$\frac{P'}{P} = \frac{k_1}{X-a_1} + \dots + \frac{k_n}{X-a_n}$$

Soit $z \in Z(P') \setminus Z(P)$

donc $0 = \frac{k_1}{z-a_1} + \dots + \frac{k_n}{z-a_n}$

$0 = \frac{k_1}{|z-a_1|^2}(\overline{z-a_1}) + \dots + \frac{k_n}{|z-a_n|^2}(\overline{z-a_n})$

$0 = \frac{k_1}{|z-a_1|^2}(z-a_1) + \dots + \frac{k_n}{|z-a_n|^2}(z-a_n)$

$0 = \frac{k_1}{MA_1^2}\overrightarrow{A_1M} + \dots + \frac{k_n}{MA_n^2}\overrightarrow{A_nM}$

$\forall i \in [\![1,n]\!] \quad \frac{k_1}{MA_1^2} > 0$

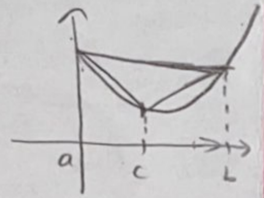
donc $M \in \mathrm{conv}(\{A_1 \dots A_n\})$

ie $z \in \mathrm{conv}(\{a_1 \dots a_n\})$

6/ Caract. de la convexité d'une f^{d} dérivable par la croissance de la dérivée :

$f : I \to \mathbb{R}$ dérivable est (str) convexe sur I ssi f' est (str) $\nearrow$ sur I

* Supp f dérivable sur I et f convexe



Soit $(a,b)\in I^2$ tq $a<b$

$$\underbrace{\frac{f(c)-f(a)}{c-a}}_{c\to a^+} \le \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \le \underbrace{\frac{f(b)-f(c)}{b-c}}_{c\to b^-}$$

$\xrightarrow[c\to a^+]{} f'_d(a) = f'(a)$ $\qquad \xrightarrow[c\to b^-]{} f'_g(b)$

donc $f'(a) \le f'(b) \implies f'$ est $\nearrow$

* Si f est supposée str convexe

Supp $(a,b)\in I^2$ tq $a<b$ et $f'(a)=f'(b)$

donc f serait affine sur $[a,b]$ et donc pas strictement convexe.

* Supp f' est $\nearrow$ sur I

Soit $(a,b)\in I^2$ et $\lambda \in]0,1[$

posons $c = \lambda a + (1-\lambda) b$

$\exists u \in]a,c[: \frac{f(c)-f(a)}{c-a} = f'(u)$

$\exists v \in]c,b[: \frac{f(b)-f(c)}{b-c} = f'(v)$

puisque $f' \nearrow$ alors $f'(u) \le f'(v) \implies \frac{f(c)-f(a)}{c-a} \le \frac{f(b)-f(c)}{b-c}$

donc $(b-c)(f(c)-f(a)) \le (c-a)(f(b)-f(c))$

$\implies (b-a)f(c) + (b-c)f(a) \le (c-a)f(b)$

donc $f(c) \le \frac{b-c}{b-a}f(a) + \frac{c-a}{b-a} f(b)$

alors $f(\lambda a+(1-\lambda)b) \le \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)$ donc f convexe

7/ Cas d'égalité ds l'inégalité de Jensen pour f strictement convexe :

$f : I \to \mathbb{R}$ convexe

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ $(x_1 \dots x_n)\in I^n$

Soit $\begin{cases} (\lambda_1 \dots \lambda_n)\in\mathbb{R}^n \\ \forall i\in[\![1,n]\!],\ \lambda_i \ge 0 \\ \lambda_1+\dots+\lambda_n = 0 \end{cases}$

on a $f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) \le \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n)$

$\to$ preuve inégalité (rec) :

f convexe donc $f(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2) \le \lambda_1 f(x_1) + \underbrace{(1-\lambda_1)}_{\lambda_2} f(x_2)$

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ tq $P(n)$:

$$f\left(\lambda_1 x_1 + (1-\lambda_1)\sum_{i=2}^{n} \frac{\lambda_i}{(1-\lambda_1)} x_i\right) \le \lambda_1 f(x_1) + (1-\lambda_1) f\left(\sum_{i=2}^{n} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_1} x_i\right)$$

or $\sum_{i=2}^{n} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_1} = \frac{1-\lambda_1}{1-\lambda_1} = 1$

donc appliquons $P(n)$:

$f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) \le \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \dots + \lambda_n f(x_n)$

$\to$ égalité : $n \ge 2$

$P(n)$: « f strictement convexe $\forall i\in[\![1,n]\!]$ $\lambda_i > 0$
$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ et $(x_1 \dots x_n)\in I^n$

$$f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) = \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n) \Leftrightarrow x_1 = x_2 = \dots = x_n \text{ »}$$

$P(2)$ ok par stricte convexité

Supp $P(n)$ pour $n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$

Soit $(x_1 \dots x_{n+1})\in I^{n+1}$ non tous égaux $\forall i\in[\![1,n]\!]$ $\lambda_i > 0$ et $\sum \lambda_i = 1$

$x_1 \ne x_2$ $\quad \Lambda = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$ avec $\tilde{x} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\Lambda} x_i$

On a $f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_{n+1} x_{n+1}) = f(\Lambda \tilde{x} + \lambda_{n+1} x_{n+1})$
$\le \Lambda f(\tilde{x}) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1})$

$x_1 \ne x_2 \implies f(\tilde{x}) < \frac{\lambda_1}{\Lambda} f(x_1) + \dots + \frac{\lambda_n}{\Lambda} f(x_n)$

donc $\Lambda f(\tilde{x}) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) < \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f(x_i)$

8/ Inégalité de Hölder :

$n \in \mathbb{N}^*$

$(\alpha_1 \dots \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$

$(\beta_1 \dots \beta_n) \in \mathbb{C}^n$ $\quad (p,q) \in]1,+\infty[^2$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i \beta_i| \leq \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}}_{\|\alpha\|_p} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} |\beta_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}}_{\|\beta\|_q}$$

si $\|\alpha\|_p = 0 \iff \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^p = 0 \iff a_1 = \dots = a_n = 0$

Hölder égalité si $(a_1 \dots a_n) = (0, \dots 0)$
ou $(\beta_1 \dots \beta_n) = (0 \dots 0)$

Supp $\alpha \neq (0, \dots 0)$ et $\beta \neq (0 \dots 0)$ donc $\begin{cases} \|\alpha\|_p \neq 0 \\ \|\beta\|_q \neq 0 \end{cases}$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{|\alpha_i|}{\|\alpha\|_p} \cdot \frac{|\beta_i|}{\|\beta\|_q} \overset{\text{young}}{\leq} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p} \cdot \frac{|\alpha_i|^p}{\|\alpha\|_p^p} + \frac{1}{q} \cdot \frac{|\beta_i|^q}{\|\beta\|_q^q}$$

$$\leq \frac{1}{p} \cdot \underbrace{\frac{1}{\|\alpha\|_p^p} \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^p}_{1} + \underbrace{\frac{1}{q\|\beta\|_q^q} \sum_{i=1}^{n} |\beta_i|^q}_{1}$$

$$\|\alpha\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq 1$$

donc $\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i \beta_i| \leq \|\alpha\|_p \|\beta\|_q$

Colle n°2 Maths :

1/ Caractérisation de la CV de la série de terme g^al : f(n) avec f continue ≥ 0 et ↓ :

$f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^+$ continue, ≥ 0 et ↓

* La série $\sum_{n \geq n_0+1} \left[\int_{n-1}^{n} f - f(n) \right]$ est CV
* $\sum f(n)$ est CV $\Leftrightarrow$ $x \longmapsto \int_{x_0}^{x} f$ admet une lim finie en $+\infty$ $\int_{n_0}^{+\infty} f$

* $\forall n \geq n_0+1 \quad \forall t \in [n-1, n] : \quad f(n) \leq f(t) \leq f(n-1)$

donc $f(n) \leq \int_{n-1}^{n} f \leq f(n-1)$

alors $\sum_{n=n_0+1}^{N} f(n) \leq \sum_{n=n_0+1}^{N} \int_{n-1}^{n} f \leq \sum_{n=n_0+1}^{N} f(n-1)$

donc $0 \leq \sum_{n=n_0+1}^{N} \left[\int_{n-1}^{n} f - f(n) \right] \leq f(n_0) - f(N)$

puisque $\sum_{n \geq n_0} f(n)$ CV car $\lim_{n \to +\infty} f(n) \in \mathbb{R}$

alors $\sum_{n \geq n_0+1} \left(\int_{n-1}^{n} f - f(n) \right)$ est une série à termes positifs convergente.

* Supp $\sum f(n)$ CV alors $\Leftrightarrow$

$\sum_{n \geq n_0+1} \left[\int_{n-1}^{n} f - f(n) \right] + \sum_{n \geq n_0+1} f(n)$ CV $\Leftrightarrow$ donc $\left(\int_{n_0}^{n} f(n) \right)_{n \in \mathbb{N}}$ CV

$\Leftrightarrow$ alors $x \longmapsto \int_{n_0}^{x} f(t)\,dt$ admet une lim finie en $+\infty$

2/ Équivalent de la somme partielle et du reste pour les séries de Riemann :

$t \longmapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est continue ≥ 0 et ↓ pour $\alpha \in [1, +\infty[$

$\left(\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha} \right)$ CV $\Leftrightarrow$ $\int_{1}^{n} \frac{1}{t^\alpha}$ admet une lim finie

$$\int_1^n \frac{dt}{t^\alpha} = \begin{cases} \ln(n) & \text{si } \alpha = 1 \\ \left[\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]_1^n & \text{si } \alpha \neq 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \ln(n) & \text{si } \alpha = 1 \\ \frac{1}{(1-\alpha) n^{\alpha-1}} - \frac{1}{1-\alpha} & \text{si } \alpha \neq 1 \end{cases}$$

$$\int_1^n \frac{dt}{t^\alpha} \longrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{1-\alpha} & \text{si } \alpha > 1 \\ +\infty & \text{si } \alpha = 1 \\ +\infty & \text{si } \alpha < 1 \end{cases}$$

Pour $\alpha \geq 0$ $\quad \sum \frac{1}{n^\alpha}$ CV $\Leftrightarrow$ $\alpha > 1$

→ Pour $\alpha < 0$ $\quad \frac{1}{k^\alpha} \longrightarrow +\infty \Rightarrow$ série DVG

→ $0 \leq \alpha < 1$ $\quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \underset{+\infty}{\sim} \int_1^n \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} \left(\frac{1}{n^{\alpha-1}} - 1 \right)$

$$\underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{(1-\alpha) n^{\alpha-1}}$$

→ $\alpha > 1$ $\quad R_n \leq \int_n^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} \leq R_{n-1}$

donc $\int_{n+1}^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} \leq R_n \leq \int_n^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$

$\underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)(n+1)^{\alpha-1}}$ $\qquad \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)(n)^{\alpha-1}}$

alors $R_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\alpha-1} \times \frac{1}{n^{\alpha-1}}$

Cls : si $\alpha \in [0, 1[$ $\quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{|\alpha-1| n^{\alpha-1}}$

si $\alpha > 1$ $\quad \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{1}{|\alpha-1| n^{\alpha-1}}$

3- Règle de Raabe Duhamel :

Soit $\sum_{n\geq 0} U_n$ une série à termes strictement positifs. Supp qu'il $\exists$ un réel a tque :

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Alors $\exists K > 0$ tq $U_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{K}{n^\alpha}$

donc $\sum U_n$ et $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ ont m̂ nature

Posons $\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad \vartheta_n = \ln(n^\alpha U_n)$

$(\vartheta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CV $\Leftrightarrow$ $(\sum \vartheta_{n+1} - \vartheta_n)$ CV

$$\vartheta_{n+1} - \vartheta_n = \ln\left((n+1)^\alpha U_{n+1} \times \frac{1}{n^\alpha} \times \frac{1}{U_n}\right)$$

$$= \ln\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha \frac{U_{n+1}}{U_n}\right)$$

$$= \ln\left(\left(1 + \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\left(1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right)$$

$$= \ln\left(1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

$$= O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

donc $(\vartheta_{n+1} - \vartheta_n)$ CV $\Leftrightarrow$ (ϑ_n) CV

donc $\exists\, l \in \mathbb{R}$: $\quad \vartheta_n \longrightarrow l$

donc $\quad n^\alpha U_n \longrightarrow K = e^l > 0$

donc $\quad n^\alpha U_n \sim K$

$\Leftrightarrow \quad U_n \sim \frac{K}{n^\alpha}$

donc $\sum U_n$ et $\sum \frac{K}{n^\alpha}$ ont m̂ nature

4- $\sum z_n$ à termes $\mathbb{C}$ et $\sum U_n$ une série à termes positifs à partir d'un certain rang

$\sum U_n$ DV et $\quad z_n = O(U_n) \Rightarrow \sum_{k=0}^{n} z_k = O\left(\sum_{k=0}^{n} U_k\right)$

$z_n = O(U_n)$

donc $\exists M \in \mathbb{R}^{+*}$: $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ $\forall n \geq n_1$ $\quad |z_n| \leq M|U_n|$

$\sum U_n$ série ≥ 0 à partir d'un certain rang :

$\exists\, n_2 \in \mathbb{N}$: $\forall n \geq n_2$ $\quad U_n \geq 0$

Soit $n_3 = \max(n_1, n_2)$

Soit $n > n_3$:

$$\left|\sum_{k=0}^{n} z_k\right| \leq \left|\sum_{k=0}^{n_3} z_k\right| + \left|\sum_{k=n_3+1}^{n} z_k\right|$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n_3} |z_k| + \sum_{k=n_3+1}^{n} |z_k|$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n_3} |z_k| + M\sum_{k=0}^{n} |U_n| - M\sum_{k=0}^{n_3} |U_k|$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n_3} |z_k| - M|U_k| + M\sum_{k=0}^{n} |U_n| \quad (*)$$

or $\quad \sum U_n$ DV

donc $\quad \sum_{k=0}^{n_3} |z_k| - M|U_k| = O\left(\sum_{k=0}^{n} U_k\right)$

$\exists n_4 \in \mathbb{N}$ pour $n \geq n_4 \geq n_3$

$$\sum_{k=0}^{n_3} |z_k| - M|U_k| \leq M\sum_{k=0}^{n} U_k \quad (**)$$

$(*) + (**) \Rightarrow \quad \left|\sum_{k=0}^{n} z_k\right| \leq 2M \sum_{k=0}^{n} U_k$

donc $\quad \sum_{k=0}^{n} z_k = O\left(\sum_{k=0}^{n} U_k\right).$

5 - Théorème de Cesaro (sommations des relations de comparaison):

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (ou $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$)

Supp qu'il $\exists$ $l \in \overline{\mathbb{R}}$ (ou $\mathbb{C}$) tq $\lim u_n = l$

alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{U_0 + \dots + U_n}{n+1} = l$

* si $l \neq 0$ et $l \notin \{-\infty, +\infty\}$

alors $U_n \sim l$ donc $\sum\limits_{k=0}^{n} U_k \sim \sum\limits_{k=0}^{n} l$

alors $\frac{\sum\limits_{k=0}^{n} U_k}{n+1} \sim \frac{n+1}{n+1} \times l = l$

* Si $l = 0$

alors $U_n + 1 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$ donc $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{U_k + 1}{n+1} \longrightarrow 1$

alors $\frac{\sum\limits_{k=0}^{n} U_k}{n+1} + 1 \rightarrow 1 \Rightarrow \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} U_k}{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

* Si $l = +\infty$ $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

$1 = o(U_n)$ donc $n+1 = o\left(\sum\limits_{k=0}^{n} U_n\right)$

alors $\left.\frac{n+1}{\sum\limits_{k=0}^{n} U_n}\right\} \begin{matrix} = o(1) \\ \longrightarrow 0^+ \end{matrix}$ $\qquad \sum U_n$ est à termes positifs à partir d'un certain rang grossièrement DV

donc $\frac{\sum\limits_{k=0}^{n} U_n}{n+1} \longrightarrow +\infty$

6 - M la CV des séries alternées vérifiant le critère spécial et info sur le reste:

$\sum U_n$ une série à termes réels alternée ($|U_n|$) tend en $\downarrow$ vers 0 alors

$\rightarrow \sum\limits_{n \geq 0} u_n$ CV (de limite U)

$\rightarrow \forall p \in \mathbb{N}$ $U_{2p+1} \leq U \leq U_{2p}$

$\rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$ $R_n \circ U_{n+1} \geq 0$ et $0 \leq |R_n| \leq |U_{n+1}|$

$U_{2p+2} - U_{2p} = u_{2p+1} + u_{2p+2} = |u_{2p+2}| - |u_{2p+1}| \leq 0$

$U_{2p+3} - U_{2p+1} = u_{2p+2} + u_{2p+3} = |u_{2p+2}| - |u_{2p+3}| \geq 0$

donc $(U_{2p+2}) \downarrow$ et $(U_{2p+1}) \nearrow$

de plus $U_{2p+1} - U_{2p} = u_{2p+1} \xrightarrow[p \to +\infty]{} 0$

donc les 2 suites sont adjacentes et elles tendent vers la m limite l

donc (U_n) CV et tend vers l donc $U = l$

alors $\forall p \in \mathbb{N}$ $U_{2p+1} \leq U \leq U_{2p+2}$

$\rightarrow$ donc $\sum\limits_{k=0}^{2p+1} u_k \leq \sum\limits_{k=0}^{+\infty} U_k \leq \sum\limits_{k=0}^{2p+2} U_k$

donc $0 \leq \sum\limits_{k=2p+1}^{+\infty} U_k \leq u_{2p+2}$

alors $R_{2p+1} \circ u_{2p+2} \geq 0$ et $0 \leq |R_{2p+1}| \leq |U_{2p+2}|$

$\sum\limits_{k=0}^{2p+1} u_k \leq \sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k \leq \sum\limits_{k=0}^{2p} u_{2k}$

$u_{2p+1} \leq R_{2p} \leq 0$

donc $R_{2p} \circ u_{2p+1} \geq 0$ et $|u_{2p+1}| \geq |R_{2p}| \geq 0$

7 - Montrer la règle d'Abel pour les séries:

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle $\downarrow$ tq $a_n \longrightarrow 0$

Soit $(\sum z_n)_{n \geq 0}$ une série à valeurs complexes dont la suite des sommes partielles est bornée

$\exists M \in \mathbb{R}^+$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\left|\sum\limits_{k=0}^{n} z_k\right| \leq M$

Alors $\sum\limits_{n \geq 0} a_n z_n$ CV et $\forall n \in \mathbb{N}$ $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} a_k z_k\right| \leq 2M a_{n+1}$

Posons $\forall n \in \mathbb{N}$ $Z_n = \sum\limits_{k=0}^{n} z_n$

$Z_{-1} = 0$

donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $z_n = Z_n - Z_{n-1}$

$\sum\limits_{k=0}^{n} a_n z_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_n (Z_n - Z_{n-1}) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k Z_k - \sum\limits_{k=-1}^{n-1} a_{k+1} Z_k$

$= -\sum\limits_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) Z_n + a_n Z_n - 0$

$a_n Z_n \longrightarrow 0$ car Z bornée
$(a_n) \longrightarrow 0$

$|(a_{k+1}-a_k) Z_k| \le M\,|a_{k+1}-a_k| = M(a_k - a_{k+1})$

or $\sum a_k - a_{k+1}$ CV car $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ CV

donc $\sum (a_{k+1}-a_k) Z_k$ est ACV donc CV

donc la suite $\left(\sum_{k=0}^{n-1}(a_{k+1}-a_k) Z_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ CV

vers $l\in\mathbb{C}$ donc $\left(\sum_{k=0}^{n} a_k z_k\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \in \mathbb{C}$

Soit $p \in [\![n+1;+\infty[\![$

$$\sum_{k=n+1}^{p} a_k z_k = \sum_{k=n+1}^{p} a_k (Z_k - Z_{k-1})$$

$$= \sum_{k=n+1}^{p} a_k Z_k - \sum_{k=n}^{p-1} a_{k+1} \cdot Z_k$$

$$= \underbrace{a_p Z_p}_{\xrightarrow[p\to+\infty]{} 0} + \sum_{k=n+1}^{p-1}(a_k - a_{k+1}) Z_k + \underbrace{a_{n+1} Z_n}_{|\;| \le M a_{n+1}}$$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{p-1}(a_k - a_{k+1}) Z_k\right| \le M \sum_{k=n+1}^{p-1}(a_k - a_{k+1})$$

$$\le \underbrace{M(a_{n+1} - a_p)}_{\xrightarrow[p\to+\infty]{} M a_{n+1}}$$

donc $\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}(a_k - a_{k+1}) Z_k\right| \le M a_{n+1}$ CQFD

8- Mq si $\sum |z_n|$ est CV et aucun terme z_n ne vaut (-1) le produit infini $\prod(1+z_n)$ CV strictement:

$\forall n\in\mathbb{N}$ $P_n = \prod_{k=0}^{n}(z_k + 1)$

P_n CV $\iff \sum P_{n+1} - P_n$ CV

$P_{n+1} - P_n = P_n(z_{n+1}+1) - P_n = P_n z_{n+1}$

$|P_{n+1} - P_n| = |z_n| \cdot |P_n| \le |z_n| \prod_{i=1}^{p}(1+|z_i|)$

$\ln(1+|z_n|) \sim |z_n|$ (car $\sum_{n\ge0} |z_n|$ CV $\Rightarrow |z_n| \to 0$)

donc $\sum \ln(1+|z_n|)$ CV

alors $\left(\prod_{i=1}^{p}(1+|z_i|)\right)$ CVS en ↗

donc $\forall n\in\mathbb{N}$ $|P_{n+1}-P_n| \le \underbrace{|z_n| \underbrace{\prod_{i=1}^{+\infty}(1+|z_i|)}_{=l}}_{l|z_n|}$

or $\sum_{n\ge0} |z_n|$ CV donc $\sum_{n\ge0} |P_{n+1} - P_n|$ CV

alors $\sum_{n\ge0} P_{n+1} - P_n$ ACV donc CV

alors P_n CV donc $\prod(1+z_n)$ CV

* $\frac{1}{P_n} = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1+|z_i|} = \prod_{i=1}^{n}\left(1 - \frac{|z_i|}{1+|z_i|}\right)$

puisque $\frac{|z_n|}{1+|z_n|} \longrightarrow 0$

alors $\exists n_0 \in\mathbb{N} : \forall n \ge n_0 :$ $|z_n| < \frac{1}{2}$

$\left|\frac{z_n}{1+z_n}\right| = \frac{|z_n|}{|1+z_n|} \le \frac{|z_n|}{1-|z_n|} \le 2|z_n|$

donc $\sum_{n\ge0}\left|\frac{z_n}{1+z_n}\right|$ CV

donc $\sum_{n\ge0}\left|\frac{z_n}{1+|z_n|}\right|$ CV

alors $\underbrace{\prod_{i=1}^{n}\left(1 - \frac{|z_i|}{1+|z_i|}\right)}_{\longrightarrow l'}$ CV

$1 = P_n \times \prod_{i=1}^{n}\left(1 - \frac{z_k}{1+z_k}\right)$

d'où $1 = \lim P_n \times l'$ donc $\lim P_n \ne 0$

donc ~~lim~~ P_n CVS

Colle n°3 : Sommabilité

1/ Caractérisation de la sommabilité lorsque A est une réunion croissante des parties dans le cas des familles de réels positifs:

$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$

Soit $(x_a)_{a\in A}$ une famille de réels positifs $(x_a)_{a\in A}$ est sommable si et seulement si :

* $\forall n\in\mathbb{N}$ $(x_a)_{a\in A_n}$ est sommable
* La suite croissante $\left(\text{“}\sum_{a\in A_n} x_a\text{”}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée et

$\text{“}\sum_{a\in A} x_a\text{”} = \lim_{n\to+\infty} \text{“}\sum_{a\in A_n} x_a\text{”}$

Soit $(x_a)_{a\in A}$ une famille de réels positifs

$\Rightarrow$ Supp $(x_a)_{a\in A}$ est sommable alors $\forall n\in\mathbb{N}$ $(x_a)_{a\in A_n}$ est sommable

On a alors $\forall n\in\mathbb{N}$ $A_n \subset A_{n+1} \subset A$

donc $\text{“}\sum_{a\in A_n} x_a\text{”} \leq \text{“}\sum_{a\in A_{n+1}} x_a\text{”} \leq \text{“}\sum_{a\in A} x_a\text{”}$

donc $\left(\text{“}\sum_{a\in A_n} x_a\text{”}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est $\nearrow$ et majorée

et $\lim_{n\to+\infty} \sum_{n\in A_n} x_a = \text{“}\sum_{a\in A} x_a\text{”}$

$\Leftarrow$ Supp $\forall n\in\mathbb{N}$ $(x_a)_{a\in A_n}$ est sommable et la suite $\nearrow$ des $\left(\text{“}\sum_{a\in A_n} x_a\text{”}\right)$ est majorée et “ ” $= \lim_{n\to+\infty}$ “ ”

Soit $F\in\mathcal{P}_f(A)$ $(F\neq\emptyset)$

Posons $F = \{a_1 \dots a_k\}$ or $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$

donc $\forall i\in[\![1,k]\!]$ $a_i\in A_{n_i}$

Soit $N = \max(n_1 \dots n_k)$ on a $F\subset A_N$

donc $\text{“}\sum_{a\in F} x_a\text{”} \leq \text{“}\sum_{a\in A_N} x_a\text{”} \leq \underbrace{\lim_{n\to+\infty} \text{“}\sum_{a\in A_n} x_a\text{”}}_{\text{indépendant de } F}$

donc $(x_a)_{a\in F}$ est sommable

et $\text{“}\sum_{a\in A} x_a\text{”} \leq \lim_{n\to+\infty} \text{“}\sum_{a\in A_n} x_a\text{”}$

2/ Théorème de sommation par paquet pour les familles de réels positifs:

D un ens au plus dénombrable

$(P_i)_{i\in I}$ une partition de D

$(x_d)_{d\in D}$ une famille de réels positifs

$(x_d)_{d\in D}$ sommable $\Leftrightarrow$ $\left|\begin{array}{ll} \forall i\in I \quad (x_d)_{d\in P_i} \text{ sommable} & (1) \\ \left(\text{“}\sum_{d\in P_i} x_d\text{”}\right)_{i\in I} \text{ sommable} & (2) \end{array}\right.$

$$\text{“}\sum_{d\in D} x_d\text{”} = \text{“}\sum_{i\in I}\left(\sum_{d\in P_i} x_d\right)\text{”}$$

D dénombrable $\sigma : \mathbb{N} \to I$ bijection

$\Rightarrow$ Supp $(x_d)_{d\in D}$ sommable : alors (1) ✓

(2) $\Leftrightarrow$ $\left(\text{“}\sum_{d\in P_{\sigma(n)}} x_d\text{”}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ suite sommable

$\Updownarrow$

$\sum_{n\geq 0}\left(\text{“}\sum_{d\in P_{\sigma(n)}} x_d\text{”}\right)$ CV

$\sum_{k=0}^{n}\left(\text{“}\sum_{d\in P_{\sigma(k)}} x_d\text{”}\right) = \text{“}\sum_{d\in P_{\sigma(n)}\uplus\dots\uplus P_{\sigma(1)}} x_d\text{”}$

$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} P_{\sigma(0)} \uplus \dots \uplus P_{\sigma(n)} = D$

comme $(x_d)_{d\in D}$ sommable alors

$\lim_{n\to+\infty} \sum_{d\in P_{\sigma(0)}\uplus\dots\uplus P_{\sigma(n)}} x_d = \sum_{d\in D} x_d$

donc $\sum_{n\geq 0}\left(\text{“}\sum_{d\in P_{\sigma(n)}} x_d\text{”}\right)$ CV

et $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\text{“}\sum_{d\in P_{\sigma(n)}} x_d\text{”}\right) = \sum_{i\in I}\left(\sum_{d\in P_i} x_d\right) = \sum_{d\in D} x_d$

14h → 5

$\Leftarrow$ Supp (1) et (2) $D = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} P_{\sigma(0)} \uplus \dots \uplus P_{\sigma(n)}$

$(x_d)_{d\in P_{\sigma(0)}} \dots (x_d)_{d\in P_{\sigma(n)}}$ sont sommables

puisque (lemme) $(x_d)_{d\in P_{\sigma(0)}\uplus\dots\uplus P_{\sigma(n)}}$

est sommable alors

$$\sum_{d\in P_{\sigma(0)}\uplus\dots\uplus P_{\sigma(n)}} x_d = \sum_{k\in[\![0,n]\!]}\left(\sum_{d\in P_{\sigma(k)}} x_d\right)$$

or $\sum_{k\geq 0}\left(\sum_{d\in P_{\sigma(k)}} x_d\right)$ CV car $\left(\sum_{d\in P_i} x_d\right)_{i\in I}$ sommable

donc $\sum_{d\in P_{\sigma(0)}\uplus\dots\uplus P_{\sigma(n)}} x_d \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{d\in P_{\sigma(n)}} x_d\right)$

$$= \sum_{i\in I}\left(\sum_{d\in P_i} x_d\right)$$

3/ Sommabilité de $^{*}\left(\frac{1}{(p+q)^{\alpha}}\right)_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ et

de $^{**}\left(\frac{1}{(p^2+q^2)^{\alpha}}\right)_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2}$

* C'est une famille de réels positifs indexée par l'ens dénombrable $(\mathbb{N}^*)^2$

$P_n = \{(p,q)\in\mathbb{N}^* / \ p+q=n\}$ $(n\geq 2)$

$(\mathbb{N}^*)^2 = \bigcup_{n\geq 2} P_n$ Chaque P_n est fini

$\left(\frac{1}{(p+q)^{\alpha}}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^{*2}}$ est sommable pour tout $n\geq 2$

et $\sum_{(p,q)\in P_n}\frac{1}{(p+q)^{\alpha}} = \frac{|P_n|}{n^{\alpha}} = \frac{n-1}{n^{\alpha}}$ -

$\left(\sum_{(p,q)\in P_n}\frac{1}{(p+q)^{\alpha}}\right)_{n\geq 2}$ sommable $\iff \sum_{n\geq 2}\frac{n-1}{n^{\alpha}}$ CV

or $\frac{n-1}{n^{\alpha}} = \frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha}} \sim \frac{1}{n^{\alpha-1}}$

donc $\left(\sum_{(p,q)\in P_n}\frac{1}{(p+q)^{\alpha}}\right)_{n\geq 2}$ sommable $\iff \alpha > 2$

pour $\alpha>2$ on a

$$\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^{*2}}\frac{1}{(p+q)^{\alpha}} = \sum_{n=2}^{+\infty}\left(\sum_{(p,q)\in P_n}\frac{1}{(p+q)^{\alpha}}\right) = \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{n-1}{n^{\alpha}}$$

$$= \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha}}$$

$$= \zeta(\alpha-1) - \zeta(\alpha)$$

** C'est une famille de réels positifs indexée par un ens dénombrable

$\forall (p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2$ $\frac{(p+q)^2}{2} \leq p^2+q^2 \leq (p+q)^2$

donc $(\alpha\geq 0)$ $\frac{1}{(p+q)^{2\alpha}} \leq \frac{1}{(p^2+q^2)^{\alpha}} \leq \frac{2^{\alpha}}{(p+q)^{2\alpha}}$

pour $\alpha<0$ $\frac{2^{\alpha}}{(p+q)^{2\alpha}} \leq \frac{1}{(p^2+q^2)^{\alpha}} \leq \frac{1}{(p+q)^{2\alpha}}$

donc $\left(\frac{1}{(p^2+q^2)^{\alpha}}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^{*2}}$ sommable

$\Updownarrow$

$\left(\frac{1}{(p+q)^{2\alpha}}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^{*}}$ sommable $\iff \alpha > 1$

I- Étude du produit de Cauchy de 2 séries ACV :

$\sum_{n\geq 0} a_n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n$ deux séries à valeurs ds $\mathbb{C}$

$$C_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{\substack{p+q=n \\ (p,q)\in\mathbb{N}^2}} a_p b_q$$

$\sum_{n\geq 0} C_n$ est appelée produit de Cauchy des 2 séries $\sum_{n\geq 0} a_n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n$

$\sum_{n\geq 0} a_n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n$ des séries ACV alors $\sum_{n\geq 0} C_n$

et $\sum_{n=0}^{+\infty} C_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \times \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$

$(a_p b_q)_{p,q\in\mathbb{N}^2}$ une famille de complexes

* Soit $p\in\mathbb{N}$ $\sum_{q\geq 0} |a_p b_q| = |a_p| \sum_{q\geq 0} |b_q|$

c'est une série de somme $|a_p| \sum_{q=0}^{+\infty} |b_q|$

* $\sum_{p\geq 0}^{+\infty} |a_p| \sum_{q=0}^{+\infty} |b_q| = \left(\sum_{q=0}^{+\infty} |b_q|\right)\left(\sum_{p=0}^{+\infty} |a_p|\right)$

c'est une série de somme $\left(\sum_{q=0}^{+\infty} |b_q|\right)\left(\sum_{p=0}^{+\infty} |a_p|\right)$

D'après le th de Fubini, la famille $(a_p b_q)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable

et $\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} a_p b_q = \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{q=0}^{+\infty} a_p b_q = \left(\sum_{p=0}^{+\infty} a_p\right)\left(\sum_{q=0}^{+\infty} b_q\right)$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{\substack{p+q=n \\ (p,q)\in\mathbb{N}^2}} a_p b_q = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n$$

$|C_n| \leq \sum_{p+q=n} |a_p| \cdot |b_q|$ $(a_p b_q) \in \ell^1(\mathbb{N}^2, \mathbb{C})$

donc $\sum_{n\geq 0} \left(\sum_{p+q=n} |a_p| \cdot |b_q|\right)$ CV $\Rightarrow \sum_{n\geq 0} |C_n|$ CV

Colle N° 4 :

1- Si $\int_a^{+\infty} f$ CV et si f uniformément continue sur $[a,+\infty[$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f = 0$

$\int_a^{+\infty} f$ CV $\Rightarrow \exists A \in \mathbb{R}_+ : \forall (x,y) \in [A,+\infty[\quad \left|\int_x^y f\right| < \delta\varepsilon$

f unif. continue $\Rightarrow \exists \delta \in \mathbb{R}^{+*} : \forall (x,y) \in [a,+\infty[^2$

$|x-y| \leq \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq \varepsilon$

soit $x \geq A$

$$\delta|f(x)| = \left|\int_x^{x+\delta} f(x)\,dt\right|$$

$$= \left|\int_x^{x+\delta} f(x)-f(t)\,dt + \int_x^{x+\delta} f(t)\,dt\right|$$

$$\leq \underbrace{\int_x^{x+\delta} \underbrace{|f(x)-f(t)|}_{\leq \varepsilon} dt}_{\leq \delta\varepsilon} + \underbrace{\left|\int_x^{x+\delta} f(t)\,dt\right|}_{\leq \delta\varepsilon}$$

$$\leq 2\delta\varepsilon$$

donc $\underline{|f(x)| \leq \varepsilon}$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

2- $\int_a^{+\infty} f$ CV $\Leftrightarrow \forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [a,+\infty[^{\mathbb{N}}, x_n \xrightarrow[+\infty]{} +\infty$

$\sum\limits_{n\geq 0} \int_{x_n}^{x_{n+1}} f$ CV

$\Rightarrow$ Supp $\int_a^{+\infty} f$ CV soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [a,+\infty[^{\mathbb{N}}$ avec $x_n \xrightarrow[+\infty]{} +\infty$

$$\sum_{n=0}^{N} \int_{x_n}^{x_{n+1}} f = \int_{x_0}^{x_{N+1}} f \xrightarrow[N\to+\infty]{} \int_{x_0}^{+\infty} f$$

$\Leftarrow$ Supp que $\forall (x_n) \in [a,+\infty[^{\mathbb{N}}, x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

$\sum\limits_{n\geq 0} \int_{x_n}^{x_{n+1}}$ CV

Posons $F(x) = \int_a^x f$

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [a,+\infty[^{\mathbb{N}} : x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

$\sum\limits_{n\geq 0} \int_{x_n}^{x_{n+1}}$ CV $\Leftrightarrow \left(\int_{x_0}^{x_n} f\right)_{n\geq 0}$ converge vers ℓ

donc $F(x_n) = \int_a^{x_0} f + \int_{x_0}^{x_n} f \longrightarrow \int_a^{x_0} f + \ell = m \in \mathbb{K}$

Soit $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [a,+\infty[^{\mathbb{N}}$ avec $x'_n \xrightarrow[+\infty]{} +\infty$

$F(x'_n) \xrightarrow[+\infty]{} m' \in \mathbb{K}$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} U_{2n} = x_n \\ U_{2n+1} = x'_n \end{cases} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad U_n \in [a,+\infty[$

$\lim U_n = +\infty$

Par hyp $\sum\limits_{n\geq 0} \int_{U_n}^{U_{n+1}} f$ CV $\Rightarrow \int_{U_{2n}}^{U_{2n+1}} f \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

ie $\left.\begin{array}{l} F(U_{2n+1}) - F(U_{2n}) \xrightarrow[+\infty]{} 0 \\ F(x_n) - F(x'_n) \xrightarrow[+\infty]{} 0 \end{array}\right\} \Rightarrow m = m'$

F admet une limite finie en $+\infty \Rightarrow \int_a^{+\infty} f$ CV

3- Nature de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}$ CV mais non ACV

$f : x \mapsto \frac{|\sin(x)|}{x}$ est prolongeable par continuité sur $[0,+\infty[$

$(n\pi)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de $\mathbb{R}^+ \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin(x)|}{x}\,dx = \int_0^{\pi} \frac{|\sin(u)|}{u+n\pi}\,du \geq \int_0^{\pi} \frac{\sin(u)}{(1+n)\pi}\,du = \frac{1}{(n+1)\pi}(1+1)$$

or $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{2}{(n+1)\pi}$ DV donc $\sum\limits_{n\geq 0} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin(x)|}{x}\,dx$

donc $\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}$ DV

* $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ est prolongeable par continuité sur $[0,+\infty[$ donc étudions $\int_0^X \frac{\sin(x)}{x}dx$ quand $X \to +\infty$

$$\int_0^X \frac{\sin(x)}{x}dx = \left[\frac{1-\cos(x)}{x}\right]_0^X + \int_0^X \frac{1-\cos(x)}{x^2}dx$$
$$= \frac{1-\cos(X)}{X} + \int_0^X \frac{1-\cos(x)}{x^2}dx$$

or $\left|\frac{1-\cos(x)}{x^2}\right|dx \leqslant \frac{2}{x^2} \quad \forall x>0$

et $\int_1^{+\infty}\frac{2dx}{x^2}$ CV donc $\int_1^{+\infty}\frac{|1-\cos(x)|}{x^2}dx$ CV

$$\Downarrow$$

$$\int_1^{+\infty}\frac{1-\cos(x)}{x^2}dx \quad \text{CV}$$

car $x \mapsto \frac{1-\cos(x)}{x^2}$ est prolongeable par continuité sur $[0,+\infty[$ $\leftarrow$ $\Downarrow$

$$\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos(x)}{x^2}dx \quad \text{CV}$$

$$\Downarrow$$

$$\int_0^X \frac{\sin(x)}{x}dx \quad \text{CV}$$

4/ Si $f = o(g)$ et $g \geqslant 0$ et $\int_a^{+\infty} g$ CV

alors $\int_x^{+\infty} f \underset{+\infty}{=} \int_x^{+\infty} g$

Supp $\int_a^{+\infty} g$ CV : $\exists M \in \mathbb{R}^+ : \exists c \in [a,+\infty[: \forall x \geqslant c \ |f(x)| \leqslant M\, g(x)$

or $\int_c^{+\infty} g$ CV donc $\int_c^{+\infty}|f|$ CV $\Rightarrow \int_a^{+\infty}|f|$ CV

et $\forall x \in [c,b[\quad \left|\int_x^{+\infty} f\right| \leqslant \int_x^{+\infty}|f| \leqslant M\int_x^{+\infty} g$

donc $\int_x^{+\infty} f \underset{+\infty}{=} O\left(\int_x^{+\infty} g\right)$

5/ Si $f = o(g)$ et $g \geqslant 0$ $\int_a^{+\infty} g$ DV

alors $\int_a^x f \underset{a}{=} O\left(\int_a^x g\right)$

Supposons $\int_a^{+\infty} g$ DV ie $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_a^x g(x)\,dx = +\infty$

$\exists M \in \mathbb{R}^+ : \exists c \in [a,+\infty[: \forall x \geqslant c \quad |f(x)| \leqslant M\, g(x)$

Soit $x \geqslant c$

$$\left|\int_a^x f\right| \leqslant \left|\int_a^c f\right| + \int_c^x |f| \leqslant \left|\int_a^c f\right| + M\int_c^x g$$

or $\frac{\int_a^c f}{\int_a^x g} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$

donc $\exists c' \geqslant c : \forall x \geqslant c' \quad \left|\int_a^c f\right| \leqslant M\int_a^x g$

donc $\forall x \geqslant c' \quad \left|\int_a^x f\right| \leqslant 2M\int_a^x g$

donc $\int_a^x f \underset{+\infty}{=} O\left(\int_a^x g\right)$

Colle de Maths
Semaine 6

1/ Idéaux de $K[X]$:

K est un corps donc les idéaux de $(K[X],+,\times)$ sont les idéaux principaux $P\,K[X]$ avec $P \in K[X]$

→ Soit I un idéal de $(K[X],+,\times)$

- $I = \{0\} = 0K[X]$
- Si $I \neq \{0\}$ alors $A = \{\deg P \,/\, P \in I\}$ est non vide partie de $\mathbb{N}$

donc il admet un ppe d

Soit $P_0 \in I\setminus\{0\}$: $\deg P_0 = d$ $\quad P_0 \in I$ donc $P_0K[X] \subset I$

Soit $P \in I$ donc $\exists (Q,R) \in K[X]^2$: $P = QP_0 + R$ avec $\deg R < d$

donc $R = \underbrace{P}_{\in I} - \underbrace{P_0Q}_{\in I} \in I$ donc $R = 0$

alors $P = P_0Q \in P_0K[X]$ donc $I = P_0K[X] = \hat{P}_0K[X]$

$\hat{P}_0$ unitaire

2/ Théorème de Wilson : $n \geq 2$

n premier $\iff (n-1)! \equiv -1\,[n]$

* Si $(n-1)! \equiv -1\,[n]$ $\quad \exists k \in \mathbb{Z} : (n-1)! + kn = -1$

donc $\forall q \in [\![1, n-1]\!]$ $\quad n \wedge q = 1$ donc n est premier

* Supp. n premier :

D'après le petit th. de Fermat $\forall p \in [\![1, n-1]\!]$ $\quad p^{n-1} \equiv 1\,[n]$

donc $\forall p \in [\![1, n-1]\!]$ $\quad p$ est racine de $X^{n-1} - 1 = 0$ ds $\mathbb{F}_p$

donc $P = X^{n-1} - 1$ a au moins $n-1$ racines distinctes

or $\deg P = n-1$ ~~racines~~ dont $P = \prod_{k=1}^{n-1}(X-k)$

alors $P(0) = -1 = \prod_{k=1}^{n-1}(-k) = (-1)^{n-1}(n-1)!$

donc $(n-1)! \equiv (-1)^n\,[n]$

si $n = 2$ alors $1 \equiv -1\,[2]$ OK

sinon $(-1)^n = -1$ et donc $(n-1)! \equiv -1\,[n]$

3/ $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} \underset{\text{ann}}{\simeq} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \iff m \wedge n = 1$

* Supp $m \wedge n = 1$

$$f : (\mathbb{Z},+,\times) \longrightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$
$$k \longmapsto (\bar{k}, \hat{k})$$

f est un morphisme d'anneaux

$k \in \ker f \iff \begin{cases}\bar{k} = \bar{0} \\ \hat{k} = \hat{0}\end{cases} \iff \begin{cases} m \mid k \\ n \mid k\end{cases} \overset{m\wedge n = 1}{\iff} mn \mid k \iff k \equiv 0\,[mn]$

donc $\ker f = mn\mathbb{Z}$

donc $\hat{f} : \mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un morphisme d'anneaux
$$\tilde{k} \longmapsto \bar{k}, \hat{k}$$

or $\begin{cases} |\operatorname{im} f| = |\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}| = mn \\ \operatorname{im} f \subset \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\ |\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}| = mn \end{cases}$ donc $\operatorname{im} f = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

donc $\hat{f} : \mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un isomorphisme d'anneaux

* Supp que $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sont isomorphes

donc $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \xrightarrow[\text{groupes}]{\simeq} \mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$

donc $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ est un gpe cyclique. Soit $(\bar{a}, \hat{b})$ un générateur

donc $\exists (p,q) \in \mathbb{Z}^2$: $(\bar{1}, \hat{0}) = p(\bar{a}, \hat{b}) = (\bar{p}\bar{a}, \hat{p}\hat{b})$
$(\bar{0}, \hat{1}) = q(\bar{a}, \hat{b}) = (\bar{q}\bar{a}, \hat{q}\hat{b})$

donc $\begin{cases} \bar{a} \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times \\ \bar{q} \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times \end{cases} \iff \begin{cases} a \wedge m = 1 \\ q \wedge m = 1 \end{cases}$ or $m \mid aq$

donc $m \mid q$ et $q \wedge m = 1$ donc $m \wedge n = 1$

4- Th d'Euler + expression des solutions du système de congruence « chinois » :

$n \in \mathbb{N}^*$ $a \in \mathbb{Z}$ $a \wedge n = 1 \Rightarrow a^{\varphi(n)} \equiv 1 [n]$

$a \wedge n = 1 \Rightarrow \bar{a} \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$

or $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ est un gpe de cardinal $\varphi(n)$ donc $\overline{a^{\varphi(n)}} = \bar{1}$

donc $a^{\varphi(n)} \equiv 1 [n]$

$m_i \wedge m_j = 1$ pour $\begin{cases} i \neq j \\ (i,j) \in [\![1,r]\!]^2 \end{cases}$ $(m_1, \dots, m_r) \in \mathbb{N}^r$

Le système $\begin{cases} x \equiv n_1 [m_1] \\ x \equiv n_2 [m_2] \\ \vdots \\ x \equiv n_r [m_r] \end{cases}$ a pour sol $\{x_0 + k\, m_1 \cdots m_r / k \in \mathbb{Z}\}$

avec $x_0 = n_1 \hat{m}_1^{\varphi(m_1)} + \dots + n_r \hat{m}_r^{\varphi(m_r)}$

avec $\hat{m}_i = \frac{m_1 \cdots m_r}{m_i}$

$\forall i \in [\![1,r]\!]$ $\hat{m}_i \wedge m_i = 1$ donc $\hat{m}_i^{\varphi(m_i)} \equiv 1 [m_i]$

$\Downarrow$

$n_i \hat{m}_i^{\varphi(m_i)} \equiv n_i [m_i]$

puisque $x_0 - n_i \hat{m}_i^{\varphi(m_i)} \equiv 0 [m_i]$

alors $x_0 \equiv n_i [m_i]$

5- Tout elmt d'un anneau principal est prod d'elmts irréductibles :

$\exists r \in \mathbb{N}^*$ $p_1 \dots p_r$ irréductibles tels que $a = p_1 \cdots p_r$

si $a = q_1 \cdots q_s$ alors $r = s$ et $\exists \sigma \in S_r$ $\forall i \in [\![1,r]\!]$ $p_i, q_{\sigma(i)}$ associés

Existence : Soit a un elmt non nul et non inversible. Supp qu'il ne possède pas une telle décomposition donc il n'est pas irréductible donc

$\exists (b_1, c_1) \in A^2$: b_1 et c_1 sont non associés à a et $a = b_1 c_1$

supp b_1 ne possède pas de décomp en elmts irréductibles

$\exists (b_2, c_2) \in A^2$: b_2 et c_2 ne sont pas associés à b_1 et $b_1 = b_2 c_2$

$\vdots$

$\forall n \in \mathbb{N}$ $\begin{cases} b_{n+1} | b_n \\ b_{n+1} \text{ et } b_n \text{ sont non associés} \end{cases}$ donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $b_n A \subsetneq b_{n+1} A$

donc $(b_n A)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite strictement ↗ d'idéaux : impossible car A noethérien

Unicité : $a = p_1 \cdots p_r = q_1 \cdots q_s$ avec $r \leq s$

$\begin{cases} p_1 | q_1 \cdots q_s \\ p_1 \text{ irréductible} \end{cases}$ $\Rightarrow \exists i \in [\![1,s]\!]$: $p_1 | q_i$ donc $\exists u_i \in A^\times$: $p_1 u_i = q_i$

à permutation près on a donc :

$\underbrace{u_1 \times \cdots \times u_r}_{\in A^\times} = q_{r+1} \cdots q_s$ donc $q_s \in A^\times$ faux

donc $r = s$

6- $C(PQ) = C(P) \times C(Q)$

$P = C(P) P_1$ $P_1 \in \mathbb{Z}[X]$

$Q = C(Q) Q_1$ $Q_1 \in \mathbb{Z}[X]$ primitifs donc

$PQ = C(P) C(Q) P_1 Q_1$

donc $C(PQ) = C(P) C(Q)\, C(P_1 Q_1)$

Supp $C(P_1 Q_1) \geq 2$ soit $q \in \mathbb{N}$: $q | C(P_1 Q_1)$ q premier

$f : \mathbb{Z}[X] \longrightarrow \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}[X]$ f est un morphisme d'anneaux

$\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n X^n \longmapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} \bar{a}_n X^n$ $f(1) = \bar{1}$

$f\left(\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n X^n + \sum_{n \in \mathbb{N}} b_n X^n\right) = f\left(\sum_{n \in \mathbb{N}} (a_n + b_n) X^n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \overline{a_n + b_n} X^n$

$= \sum_{n \in \mathbb{N}} (\bar{a}_n + \bar{b}_n) X^n = \sum_{n \in \mathbb{N}} \bar{a}_n X^n + \sum_{n \in \mathbb{N}} \bar{b}_n X^n$

$f\left(\left(\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n X^n\right)\left(\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n X^n\right)\right) = f\left(\sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n X^n\right) a_n X^n\right)$

$= \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k b_{n-k}} X^n$

$= \sum_{n \in \mathbb{N}} \bar{a}_k X^n \times \sum_{n \in \mathbb{N}} \bar{b}_n X^n$

donc $f(P_1 Q_1) = \bar{0} = \bar{P}_1 \times \bar{Q}_1$ or $\mathbb{F}_q[X]$ intègre donc $\bar{P}_1 = \bar{0}$ ou $\bar{Q}_1 = \bar{0}$

donc $q | C(P_1)$ ou $q | C(P_2)$ faux donc $C(P_1 Q_1) = 1$ □

7- Tout polynôme primitif de $\mathbb{Z}[X]$ et irréductible ds $\mathbb{Q}[X]$ est un polynôme non constant irréductible de $\mathbb{Z}[X]$

* Si $\deg P = 0$ alors $P = \pm$ premier or P primitif contradiction donc $\deg P \geq 1$
* $P \notin \mathbb{Z}[X]^\times = \mathbb{Z}^\times$ Supp $P = QR$ avec $(Q, R) \in \mathbb{Z}[X]^2$

donc $C(P) = 1 = C(Q) \times C(R)$ donc $C(Q) = C(R) = 1$

P irréductible ds $\mathbb{Q}[X] \Rightarrow Q \in \mathbb{Q}^*$ ou $R \in \mathbb{Q}^* \Rightarrow Q \in \mathbb{Z}^*$ ou $R \in \mathbb{Z}^*$

d'où $Q \in \{-1, 1\}$ ou $R \in \{-1, 1\}$ donc R est irréductible ds $\mathbb{Z}[X]$

Colle de Maths N°7

1/ Ex d'endo sans polynôme minimal

$I_f = \{0_{K[X]}\}$ $\quad D : \mathbb{C}[X] \longrightarrow \mathbb{C}[X]$ $\quad D \in \mathcal{L}(\mathbb{C}[X])$
$\qquad\qquad Q \longmapsto Q'$

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ avec $P(D) = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{C}[X])}$

Posons $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $(a_0, \dots a_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$

$P(D) = 0 \iff a_0 Id_{\mathbb{C}[X]} + a_1 D + \dots + a_n D^n = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{C}[X])}$

$\Updownarrow$

$\forall Q \in \mathbb{C}[X]\ a_0 Q + a_1 Q' + \dots + a_n Q^{(m)} = 0_{\mathbb{C}[X]}$

$\Downarrow$ $Q = 1$ puis $Q = X$ puis $\dots$ $Q = X^n$

$a_0 = a_1 = \dots = a_n = 0$

donc $P = 0_{\mathbb{C}[X]}$

Base de $K[u]$ u endo tq $I_u \neq \{0_{K[X]}\}$

Supposons l'existence d'un polynôme minimal pour f de degré d

Soit $P \in K[X]$ $\quad \exists (Q,R) \in K[X]^2$: $\deg R < d$ et $P = Q\Pi_f + R$

donc $P(f) = R(f)$

alors $K[f] \subset \{id, f, \dots f^{d-1}\} \subset K[f]$

donc $K[f] = \{id, f, \dots f^{d-1}\}$

D'autre part si $a_0 id + a_1 f + \dots + a_{d-1} f^{d-1} = 0_{\mathcal{L}(E)}$

alors $\Pi_f \mid a_0 id + a_1 f + \dots + a_{d-1} f^{d-1}$.

or $\deg \Pi_f = d$ $\quad$ donc $a_0 = \dots = a_{d-1} = 0$

donc $\{id, f, \dots, f^{d-1}\}$ est une K-base de $K[f]$

donc $\underline{\dim K[f] = d}$

2_ $GL_n(K)$ est engendré par les dilatations et les transvections :

Toute matrice $M \in GL_n(K)$ s'écrit sous la forme
$M = T_1 \times \dots \times T_n \times D_n(\det M) \times T_1' \times \dots \times T_n'$ (T_i, T_j') des transvections

$*$ Pour $n = 1$ $\quad M = (\alpha) \in GL_1(K)$
$\qquad = D_1(\det(M))$ $\quad \det M = \alpha$

$*$ Supposons le résultat vrai pour n

$M \in GL_{n+1}(K)$ $\quad M = \left(\begin{array}{c|c} m_{11} & \\ \hline m_{21} & \\ m_{31} & \\ \vdots & \\ m_{n+1\,1} & \end{array} \right)$

1er cas : $\exists i_0 \in [\![2, n+1]\!]$ tq $m_{i_0 1} \neq 0$

On effectue l'opération $L_1 \leftarrow L_1 - \frac{m_{11}-1}{m_{i_0}} L_{i_0}$

donc $M' = T_{1 i_0}\left(\frac{m_{11}-1}{m_{i_0}}\right) \times M$

ensuite $L_i' \leftarrow L_i' - m_{i1} L_1$ $\quad \forall i \in [\![2, n+1]\!]$ et $m_{i1} \neq 0$

ce qui donne $M'' = \underbrace{T_{12}(m_{21})}_{T_{n+1}} T_{13}(m_{31}) \dots \underbrace{T_{1,n+1}(m_{n+1,1})}_{T_2} \underbrace{T_{1 i_0}\left(\frac{m_{11}-1}{m_{i_0}}\right)}_{T_1} M$

$= T_{n+1} \dots T_2 T_1 M$

ensuite $C_j \leftarrow C_j - m_{1j} C_1$

donc $M''' = T_{n+1} \dots T_2 T_1 M T_2' T_3' \dots T_n'$

$= \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \cdots 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & M_1 \\ 0 & \end{array} \right)$ avec $M_1 \in GL_n(K)$
$\Downarrow$
$\det(M_1) = \det(M)$

On applique $P(n)$ pour M_1 :

$M_1 = \Pi_1 \dots \Pi_n D_n(\det M_1) \Pi_1' \dots \Pi_n'$

donc $\left(\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline & \Pi_1 \end{array}\right) \times \left(\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline & \Pi_2 \end{array}\right) \times \dots \times \left(\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline & \Pi_n \end{array}\right) \times \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline & D_n(\det M_1) \end{array}\right)}_{= D_{n+1}(\det M)} \times \dots = M'''$

alors

ce qui nous donne le résultat

3/ Deux matrices carrées réelles semblables dans $\mathbb{R}$ sont semblables dans $\mathbb{C}$:

$A \overset{\mathbb{C}}{\sim} B$ donc $\exists P \in GL_n(\mathbb{C})$: $A = PBP^{-1}$

Posons $P = U + iV$ donc $AU + iAV = UB + iVB$

soit $\begin{cases} AU = UB \\ AV = VB \end{cases}$ donc $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ $A(U+\lambda V) = (U+\lambda V)B$

$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $\lambda \longmapsto \det(U+\lambda V)$ est une f^{ct} polynomiale

$f(i) = \det(P) \neq 0$ donc f est non identiquement nulle donc le polynôme correspondant n'est pas nul donc il n'a qu'un nbre fini de racines soit $x_0 \in \mathbb{R}$: $f(x_0) \neq 0$

Posons $Q = U + x_0 V$

on a donc $A = (U + x_0 V) B (U + x_0 V)^{-1}$

donc $A \underset{\mathbb{R}}{\sim} B$

4/ Dimension de l'ev $K_m[X_1, \dots X_n]$

$P \in K[X_1 \dots X_n]$ $\quad P = \sum_{(i_1, \dots i_n) \in \mathbb{N}^n} a_{i_1, \dots i_n} X_1^{i_1} \dots X_n^{i_n}$

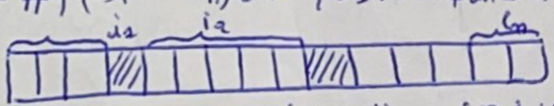
où $\{(i_1 \dots i_n) \in \mathbb{N}^n \,/\, a_{i_1 \dots i_n} \neq 0_K\}$ fini

si $P \neq 0$ alors $\deg P = \max\{i_1 + \dots + i_n \,/\, a_{i_1 \dots i_n} \neq 0\}$

pour $d \in \mathbb{N}$ on pose $H_d = \{P \in K[X_1 \dots X_n] \,/\, a_{i_1 \dots i_n} \neq 0 \Rightarrow i_1 + \dots + i_n = d\}$

Les H_d sont des sev de $K[X_1 \dots X_n]$ alors $K[X_1 \dots X_n] = \bigoplus_{d \in \mathbb{N}} H_d$

$\dim H_d = \#\{(i_1, \dots i_n) \in \mathbb{N}^n \,/\, i_1 + \dots + i_n = d\}$



$n-1$ séparateurs

$n-1+d$ cases

donc $\dim H_d = \binom{n-1+d}{n-1} = \binom{n-1+d}{d}$

or $K_m[X_1 \dots X_n] = \bigoplus_{d=0}^{m} H_d$ donc $\dim K_m[X_1 \dots X_n] = \sum_{d=0}^{m} \binom{n-1+d}{d}$

$\parallel$

$\#\{(i_1 \dots i_n) \in \mathbb{N}^n \,/\, i_1 + \dots + i_n \leq m\}$

$\binom{n+m}{m} = \#\{(i_1 \dots i_{n+1}) \in \mathbb{N}^{n+1} \,/\, i_1 + \dots + i_n + i_{n+1} = m\}$

5/ Générateurs de $SL_n(K)$ et cardinal de $SL_n(\mathbb{F}_p)$:

$\det : (GL_n(K), \times) \longrightarrow (K^*, \times)$ est un morphisme de groupes donc $\ker \det = SL_n(K) \triangleleft GL_n(K)$

De plus toute transvection est élément de $SL_n(K)$

et pour $M \in SL_n(K)$

$M = T_1 T_2 \dots T_r \underbrace{D_n(\underbrace{\det(M)}_{=1})}_{I_n} T_1' \dots T_s'$

donc $SL_n(K)$ est engendré par les transvections

$\# SL_n(\mathbb{F}_p)$: $|GL_n(\mathbb{F}_p)|$ est le nombre de bases de $\mathbb{F}_p^n$

soit $(e_1 \dots e_n)$ une base

pour e_1 on a $p^n - 1$ choix

pour $e_2 \notin \mathrm{Vect}\{e_1\}$ on a $p^n - p$ choix

$\vdots$

pour $e_n \notin \mathrm{Vect}\{e_1 \dots e_{n-1}\}$ on $p^n - p^{n-1}$ choix

donc $|GL_n(\mathbb{F}_p)| = (p^n - 1) \dots (p^n - p^{n-1})$

$\det : GL_n(\mathbb{F}_p)/SL_n(\mathbb{F}_p) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Im}(\det) = \mathbb{F}_p^*$

donc $|SL_n(\mathbb{F}_p)| = \dfrac{|GL_n(\mathbb{F}_p)|}{|\mathbb{F}_p^*|} = p^{\frac{1}{2}n(n-1)} (p^n - 1)(p^{n-1} - 1) \dots (p^2 - 1)$

Colle n° 8

1/ Invariance du polynôme minimal par extension de corps : K sous corps de L $\quad \pi_{A,K} = \pi_{A,L}$

$\pi_{A,K} \in K[X] \subset L[X]$ donc $\pi_{A,K}(A) = 0 \Rightarrow \underbrace{\pi_{A,L}}_{d'} | \underbrace{\pi_{A,K}}_{d}$ ds $L[X]$

donc $d' \leq d$

$(I, A, \dots, A^{d-1})$ est une famille K-libre ds $K[A]$

Supp $\exists (\lambda_0, \dots, \lambda_{d-1}) \in L^d$ tq $\lambda_0 I + \dots + \lambda_{d-1} A^{d-1} = 0$

$\text{Vect}\{\lambda_0, \dots, \lambda_{d-1}\}$ est un K sev de L donc soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base de ↗ donc $\forall i \in [\![0, d-1]\!]$ $\quad \lambda_i = \sum_{j=1}^{p} k_{ij} e_j$

donc $\sum_{i=1}^{d-1} \left(\sum_{j=1}^{p} k_{ij} e_j \right) A^i = 0$

$(e_1, \dots, e_p)$ est une base donc libre donc $\sum_{i=1}^{d-1} \underbrace{k_{ij} A^i}_{\in K} = 0 \Rightarrow \forall i \in [\![1, d-1]\!] \; k_{ij} = 0$ $\quad \forall j \in [\![1, p]\!]$

donc $(1, A, \dots, A^{d-1})$ est L-libre dans $K[X] \subset L[X]$

or $\dim L[A] = \dim \pi_{A,L} = d'$ donc $d' \geq d$

donc $\begin{cases} \pi_{A,L} | \pi_{A,K} \\ d = d' \\ 2 \text{ polynômes unitaires} \end{cases}$ donc $\pi_{A,L} = \pi_{A,K}$

2/ Lemme de décomposition du noyau :

$P_1, \dots, P_r$ des elmts de $K[X]$ premiers entre eux deux à 2 $u \in \mathcal{L}_K(E)$ $r \in \mathbb{N}^*$

$$\ker((P_1 \times \dots P_r)(u)) = \bigoplus_{i=1}^{r} \ker P_i(u)$$

Par ré sur $r \geq 2$

* Soit $(P, Q) \in K[X]^2$ $P \wedge Q = 1$

$\begin{cases} \ker P(u) \subset \ker(PQ)(u) \\ \ker Q(u) \subset \ker(PQ)(u) \end{cases}$ donc $\ker P(u) + \ker Q(u) \subset \ker(PQ)(u)$

$\exists (A, B) \in K[X]^2$: $AP + BQ = 1 \Rightarrow A(u) \circ P(u) + B(u) \circ Q(u) = id$

soit $x \in \ker P(u) \cap \ker Q(u)$ donc $x = 0_E \Rightarrow \ker P(u) \oplus \ker Q(u) \subset \ker(PQ)(u)$

$\forall x \in E \quad x = A(u)(P(u).x) + B(u).(Q(u).x) = x_1 + x_2$

$x \in \ker(PQ)(u) \quad x = x_1 + x_2 \quad Q(u) \circ x_1 = A(u) \circ (PQ(u) \circ x) = 0_E \Rightarrow x_1 \in \ker Q(u)$

$P(u).x_2 = B(u) \circ (PQ(u).x) = 0_E \Rightarrow x_2 \in \ker P(u)$

donc $\ker(PQ)(u) = \ker P(u) \oplus \ker Q(u)$

* Supposons le résultat vrai pour n polynômes

Soient $P_1, \dots, P_{n+1}$ n+1 poly premiers 2 à 2 Donc $P_{n+1} \wedge (P_1 \times \dots \times P_n) = 1$

or $\ker(P_1 \dots P_n)(u) = \bigoplus_{i=1}^{n} \ker P_i(u) \underset{P(2)}{\Rightarrow} \ker(P_1 \dots P_{n+1})(u) = \bigoplus_{i=1}^{n+1} \ker P_i(u)$

3/ Spectre de P(A) si K algébriquement clos :

$P \in K[X]$, K algébriquement clos $\quad Sp_K(P(A)) = \{\tilde{P}(\lambda) / \lambda \in Sp_K(A)\}$

* Soit $\lambda \in Sp_K(A)$ donc $\exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(K) \setminus \{0\}$ tq $AX = \lambda X$ donc $P(A)X = \tilde{P}(\lambda)X$

comme $X \neq 0$ alors $\tilde{P}(\lambda) \in Sp_K(P(A))$

* Supp K algébriquement clos Soit $\mu \in Sp_K(P(A))$ Posons $Q = P - \mu \in K[X]$

. si P constant $= a$ $\quad P(A) = a.I_n$ donc $Sp_K(P(A)) = \{a\}$

comme K algébriquement clos $\deg(\pi_A) \geq 1 \Rightarrow \pi$ scindé

donc $Sp_K(A) \neq \emptyset$ donc $\{\tilde{P}(\lambda) / \lambda \in Sp_K(A)\} = \{a\}$

. si $P \neq ct$: $\quad Q = P - \mu = k \prod_{\alpha \in Z(Q)} (X - \alpha)^{n_\alpha} \quad k \in K^*$

$Q(A) = P(A) - \mu I_n$ est non inversible car $\mu \in Sp(P(A))$

donc $\exists \alpha \in Z(Q)$: $\quad A - \alpha . I_n$ non inversible

$\Downarrow$

$\alpha \in Sp_K(A)$ or $Q(\alpha) = 0 \Rightarrow P(\alpha) = \mu$

$\Downarrow$

$\mu \in \{\tilde{P}(\lambda) / \lambda \in Sp_K(A)\}$

donc $Sp_K(P(A)) \subset \{\tilde{P}(\lambda) / \lambda \in Sp_K(A)\}$

4/ $\chi_{AB} = \chi_{BA}$

$$\begin{pmatrix} XI_n & B \\ A & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & -B \\ 0 & XI_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} XI_n & -XB + XB \\ A & -AB + XI_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} XI_n & 0 \\ A & -AB + XI_n \end{pmatrix} = M$$

$$\begin{pmatrix} I_n & -B \\ 0 & XI_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} XI_n & B \\ A & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} XI_n - BA & B - B \\ XA & XI_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} XI_n - BA & 0 \\ XA & XI_n \end{pmatrix} = N$$

$\det M = \det N \Rightarrow \det(XI_n) \times \det(XI_n - AB) = \det(XI_n - BA) \times \det(XI_n)$

$\Downarrow$

$X^n \times \det(XI_n - AB) = X^n \det(XI_n - BA)$

or $K[X]$ est un anneau intègre et $X^n \neq 0 \Rightarrow \chi_{AB} = \chi_{BA}$

4/ $\Pi_{C(P)}$ et $\chi_{C(P)}$ d'une matrice compagnon :

$P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$ $\quad C(P) = \begin{pmatrix} 0 & & & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & 0 & \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$

$$\chi_{C(P)} = \begin{vmatrix} X & 0 & \dots & 0 & a_0 \\ -1 & X & & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & \\ 0 & \dots & 0 & -1 & X+a_{n-1} \end{vmatrix} \quad L_1 \leftarrow L_1 + XL_2 + X^2L_3 + \dots + X^{n-1}L_{n-1}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & \dots & & 0 & P \\ -1 & X & & & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & X & \\ 0 & \dots & 0 & -1 & X+a_{n-1} \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} \times P \times (-1)^{n-1} = P$$

(Caley-Hamilton) $\chi_{C(P)}(C(P)) = 0 \Rightarrow \Pi_{C(P)} \mid \chi_{CP} = P$

donc $\deg \Pi_{C(P)} = m \leq n$ $\quad$ Supp $m < n$

soit γ l'endo canoniquement associé à $C(P)$

donc $\gamma^m + C_{m-1}\gamma^{m-1} + \dots + C_1\gamma + a_0 Id = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{K})}$

Soit $(e_1 \dots e_n)$ la base canoniquement associée à K^n

on a donc $\underbrace{\gamma^m(e_1)}_{e_{m+1}} + C_{m-1}\underbrace{\gamma^{m-1}(e_1)}_{e_m} + \dots + C_1\underbrace{\gamma(e_1)}_{e_2} + a_0 \cdot e_1 = 0$

juste $\leftarrow e_{m+1}$ car $m < n$

or $(e_1 \dots e_m)$ est libre donc impossible $\Rightarrow m = n$

$$\Downarrow$$

$$\chi_{CP} = \Pi_{C(P)} = P$$

5/ Th de Caley Hamilton :

χ_m est un polynôme annulateur de A

Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$ $\quad \deg \Pi_A \leq n$ $(I, A, \dots A^n)$ liée

$\chi_A(A) = 0$ donc $\Pi_A \mid \chi_A$ d'où $\deg \Pi_A \leq n$

$(X.I_m - A)\, {}^t\underbrace{com(X.I_m - A)}_{B_0 + B_1X + \dots + B_{n-1}X^{n-1}} = \det(X.I_m - A).I_m$ $\quad$ avec $(B_0, \dots B_{n-1}) \in \mathcal{M}_n(K)$

donc $\det(X.I_n - A).I_n = (X^n + C_{n-1}X^{n-1} + \dots + C_0).I_n$ dans $\mathcal{M}_n(K)$ $\quad (C_0, \dots C_{n-1}) \in K^n$

donc $\sum_{k=0}^{n-1} B_k X^{k+1} - \sum_{k=0}^{n-1} X^k A B_k = \chi_A(X).I_m$

$B_{n-1}X^n + \sum_{k=1}^{n-1} (B_{k-1} - AB_k)X^k - AB_0 = \chi_A(X).I_n$

$\begin{cases} B_{n-1} = I_n \\ B_{k-1} - B_k A = C_k \; \forall k \in [\![1, n-1]\!] \\ -AB_0 = C_0 I_n \end{cases}$ $\quad \chi_A(A) = C_0 I_m + \sum_{k=1}^{n-1} C_k A^k + A^n$
$\quad = AB_0 + \sum_{k=1}^{n-1} (B_{k-1} - B_k A)A^k + A^n = 0$

7/ Preuve de la réduction selon les sous-espaces caractéristiques : $f \in \mathcal{L}_K(E)$ avec $\dim E = n \in \mathbb{N}^*$

Supposons Π_f scindé dans K

Alors $E = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i$ avec F_i f stable $\lambda_i \in K$ $\quad f_{|F_i} = \lambda_i Id_{F_i} + n_i$

$n_i \in \mathcal{L}(F_i)$ nilpotent

$\exists B$ de E tq $\mathrm{Mat}_B(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 I + N_1 & & & \\ & \lambda_2 I + N_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_p I + N_p \end{pmatrix}$

où $N_1 \dots N_p$ sont des matrices nilpotentes

$\lambda_1 \dots \lambda_p$ valeurs propres de f

taille des blocs = multip. dans χ_f

$\Pi_f = \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)^{n(\lambda_i)}$ $\quad \lambda_1 \dots \lambda_p$ les valeurs propres distinctes de f

LDN : $\quad E = \bigoplus_{i=1}^{p} \ker\left((X - \lambda_i)^{n(\lambda_i)}\right) = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i$ avec $F_i = \ker(X - \lambda_i)^{n(\lambda_i)}$

F_i stable par f

$\forall x \in F_i \; (f - \lambda_i id_E)^{n(\lambda_i)} \circ x = 0_E \Rightarrow (f_{|F_i} - \lambda_i id_{F_i})^{n(\lambda_i)} \circ x = 0_{F_i}$

donc $n_i = (f_{|F_i} - \lambda_i id_{F_i})$ est nilpotent $\quad f_{|F_i} = n_i + \lambda_i id_{F_i}$

D'autre part $\chi_f(X) = \prod_{i=1}^{p} \chi_{\lambda_i I + N_i}(X) = \prod_{i=1}^{p} \det(XI - \lambda_i I - N_i)$

$= \prod_{i=1}^{p} \det((X - \lambda_i)I - N_i) = \prod_{i=1}^{p} \chi_{N_i}(X - \lambda_i)$

donc $Sp(f) = \bigcup_{i=1}^{p} \quad (Z_K \mid \chi_{N_i}(X - \lambda_i)) = \bigcup_{i=1}^{p} \{\lambda_i\}$

Colle de Maths n°10 :

1/ $\mathbb{K}$ - evn de dim finie ($\mathbb{R}/\mathbb{C}$) toutes les normes sont équivalentes :
$B = (e_1 \dots e_p)$ base de E. Soit N une norme

* Soit $x \in E$ donc $x = \sum_{i=1}^{p} x_i e_i \Rightarrow N(x) \leq \sum_{i=1}^{p} |x_i| N(e_i) \leq \underbrace{\sum_{i=1}^{p} N(e_i)}_{\alpha} N_{\infty,B}(x)$

donc $\underbrace{N \leq \alpha N_{\infty,B}}$

* On veut mq $K N_{\infty,B} \leq N$ avec $K > 0$

soit $\forall x \in E \setminus \{0\}$ $K \leq N\left(\frac{x}{N_{\infty,B}(x)}\right)$

posons $k = \inf\left\{N\left(\frac{x}{N_{\infty,B}(x)}\right) / x \in E \setminus \{0\}\right\} = \inf\{N(x) / x \in S_{\infty,B}(0_E,1)\}$

$\exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in S_{\infty,B}(0_E,1)^{\mathbb{N}} : N(x_n) \longrightarrow k$

or $\forall n \in \mathbb{N}$ $N_{\infty,B}(x_n) = 1$ donc $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée de $(E, N_{\infty,B})$

Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement $\nearrow$ tq $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ CV au sens de $N_{\infty,B}$ vers x'

or $N(x_{\varphi(n)} - x') \leq \alpha N_{\infty,B}(x_{\varphi(n)} - x')$ donc $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ CV vers x' au sens de N

donc $N(x_{\varphi(n)}) \xrightarrow[n \to +\infty]{} N(x') = k$

or $S_{\infty,B}(0,1)$ est un fermé dans $N_{\infty,B}$ donc $\lim_{\substack{n \to +\infty \\ N_{\infty,B}}} x_{\varphi(n)} \in S_{\infty,B}(0_E,1)$

donc $x' \in S_{\infty,B}(0_E,1)$ donc $x' \neq 0 \Rightarrow N(x') > 0 \Rightarrow k > 0$

2/ Tout sev de dim finie d'un evn est fermé :

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ tq $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} \ x_n \in F \\ x_n \xrightarrow[+\infty]{N} l \in E \end{cases}$ donc $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans (E, N)

donc $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée ds $(F, N_{|F})$.

comme F est de dim finie alors $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une sous-suite CV tq

$\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strict. $\nearrow$ et $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ CV vers $l' \in F$ ds $(F, N_{|F})$

donc $x_{\varphi(n)} \xrightarrow{N} l' \in (E, N)$ or $x_{\varphi(n)} \xrightarrow[+\infty]{N} l$ donc par unicité de la limite

$l = l' \in F$ donc F est fermée de (E, N)

3/ Différentes caractérisations de la continuité d'une application linéaire.

f continue au moins en 1 pt de $E \Rightarrow f$ continue en $0_E \Leftrightarrow$ f continue sur $E \Leftrightarrow f$ bornée sur $S_E(0_E,1) \Leftrightarrow \exists c > 0, \forall x \in E \ \|f(x)\|_F \leq c \|x\|_E$

f bornée sur $B'_E(0_E,1) \Leftrightarrow f$ lipschitzienne sur $E \Leftrightarrow f$ uniformément continue sur E

$\Leftrightarrow f$

i) $\Rightarrow$ ii) $\Rightarrow$ iii) * Supp f continue en 0_E

donc $\exists \delta > 0 : \forall x \in B'(0_E, \delta) \cap E$ $f(x) \in B'_E(f(0_E) = 0_F, 1) \cap E$

Soit $\forall x \in E$ $\|x\| < \delta \Rightarrow$ $\|f(x)\| < 1$

Soit $x \in B'_E(0_E,1)$ donc $\|\frac{\delta}{2} x\| = |\frac{\delta}{2}| \times \|x\| \leq |\frac{\delta}{2}| < \delta \Rightarrow \|f(\frac{\delta}{2} x)\| < 1$

soit $\|f(x)\| < \frac{2}{\delta}$ donc f bornée sur $B'_E(0_E,1) \Rightarrow$ IV)

iii) $\Rightarrow$ (IV) $\Rightarrow$ V) Si f bornée sur $S_E(0_E,1)$

alors $\exists c > 0$ tq $\forall x \in E$ $\left(\|f(\frac{x}{\|x\|})\| < c \Leftrightarrow \|f(x)\| < c\|x\|\right.$

vi) $\Rightarrow$ Soit $(x,y) \in E^2$ $\|f(x) - f(y)\| = \|f(x-y)\| < c\|x-y\|$

$\hookrightarrow f$ lipschitzienne

vii) $\Rightarrow$ viii) $\Rightarrow$ i

4/ Caractérisation de la continuité d'une forme linéaire par le caractère fermé du noyau : $l : (E, \|\cdot\|_E) \to \mathbb{K}$

l est une forme linéaire continue $\Leftrightarrow$ $\ker l$ est une partie fermée de E

* Supp l continue. $\ker l = l^{-1}(\{0\})$, partie fermée de $\mathbb{K}$ + l continue $\Big\}$ $l^{-1}(\{0\})$ partie fermée de E

* Supp $\ker l$ fermée de E. Si l est non continue donc elle n'est pas bornée donc $\exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in S(0_E,1)^{\mathbb{N}}$:

$\forall n \in \mathbb{N}$ $|l(x_n)| \geq n+1$

Soit $u \in E$: posons $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n = u - \frac{l(u)}{l(x_n)} x_n$

donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $l(u_n) = l(u) - \frac{l(u) l(x_n)}{l(x_n)} = 0 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$ $u_n \in \ker l$

or $\left\|\frac{l(u)}{l(x_n)} x_n\right\| \leq \frac{|l(u)|}{n+1}$ donc $\frac{l(u)}{l(x_n)} x_n \xrightarrow[+\infty]{\|\cdot\|} 0$

donc $u_n \xrightarrow[+\infty]{\|\cdot\|} u$ or $\ker l$ fermé donc $u \in \ker l$

donc $\forall u \in E$ $u \in \ker l \Rightarrow l = 0^*$ absurde car l non continue

5/ Toute partie compacte est fermée et bornée :

* Soit K une partie compacte de E

Soit $\begin{cases} (x_n) \in K^{\mathbb{N}} \\ x_n \xrightarrow[+\infty]{} \ell \in E \end{cases}$ puisque K est compacte alors $\exists \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strict. $\nearrow$: $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ CV vers $\ell' \in K$

par unicité de la limite $\ell = \ell' \in K$ donc K est fermée

* Supp K non bornée : donc $\exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$:

$\forall n \in \mathbb{N}$ $\|x_n\| \geq n$ donc pour $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strict $\nearrow$

$\forall n \in \mathbb{N}$ $\|x_{\varphi(n)}\| \geq \varphi(n) \geq n$

donc $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée $\Rightarrow$ n'est pas convergente

donc K n'est pas une partie compacte.

Toute partie fermée d'un compact est compacte :

* Soit A une partie fermée du compact K

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$ donc $\exists \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ stri $\nearrow$ tq

$(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ CV vers $\ell \in K$

or $\begin{cases} A \text{ une partie fermée} \\ \forall n \in \mathbb{N} \ x_{\varphi(n)} \in A \end{cases}$ donc $\ell \in A$ donc A compacte

6/ Les compacts d'un evn de dim finie sont les parties fermées bornées :

Soit $\begin{cases} E \text{ un } \mathbb{K} \text{ evn de dim finie} \\ K \text{ une partie de } E \text{ fermée et bornée} \end{cases}$

donc $\exists R > 0$: $K \subset B'(0_E, R)$ or E est de dim finie donc $B'(0_E, R)$ est compact

donc $\begin{cases} K \text{ fermée} \\ K \subset B'(0_E, R) \end{cases} \Rightarrow K$ est compacte

Colle de math n°11

1/ Adhérence des matrices diagonalisables réelles :

$\overline{DG_n(\mathbb{R})} = T_n(\mathbb{R})$

* Soit $T \in T_n(\mathbb{R})$ alors $T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ posons $T_k = \frac{1}{k}\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & n \end{pmatrix} + T$ $\quad T_k \xrightarrow[k]{} T$

∘ si $\forall i,j \in [\![1,n]\!]$ $\lambda_i = \lambda_j$ alors $\forall k \in \mathbb{N}^*$ $\frac{i}{k} + \lambda_i \neq \frac{j}{k} + \lambda_j$ si $i \neq j$ donc $\forall k \in \mathbb{N}^*$ $T_k \in DG_n$

∘ sinon posons $\alpha = \min\{|\lambda_i - \lambda_j| \,/\, \lambda_i \neq \lambda_j\}$

$\frac{i}{k} + \lambda_i = \frac{j}{k} + \lambda_j \Rightarrow |\lambda_i - \lambda_j| \underset{(*)}{=} \frac{|i-j|}{k} < \frac{n}{k}$ + soit k_0 tq $\forall k \geq k_0$ $\frac{n}{k} < \alpha$

donc $\forall k \geq k_0$ $(*)$ est fausse donc $\forall k \geq k_0$ $T_k \in DG_n(\mathbb{R})$ donc $T_k \to T$

d'où $T \in \overline{DG_n(\mathbb{R})}$ soit $T_n(\mathbb{R}) \subset \overline{DG_n(\mathbb{R})}$

* Soit $M \in \overline{DG_n(\mathbb{R})}$ donc $\exists (M_k) \in DG_n(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$: $M_k \to M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$\chi_M = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_0$ $\quad$ par continuité du polynôme

$\chi_{M_k} = X^n + a_{n-1}(k)X^{n-1} + \dots + a_0(k)$ $\quad$ caractéristique $a_i(k) \to a_i$

Soit $\lambda_1(k) \leq \dots \leq \lambda_n(k)$ les valeurs propres de M_k

soit λ l'une des λ $\quad \exists M \geq 1 : \forall i \in [\![0, n-1]\!]$ $|a_i(k)| \leq M$

donc $|\lambda^n| = |a_0(k) + a_1(k)\lambda + \dots + a_{n-1}(k)\lambda^{n-1}| \leq M(1 + |\lambda| + \dots + |\lambda^{n-1}|)$

si $|\lambda| \geq 1$ alors $|\lambda^n| \leq nM|\lambda|^{n-1}$ ie $\underline{|\lambda| \leq nM}$

si $|\lambda| < 1$ alors $|\lambda| \leq nM$ $\quad$ donc $(\lambda_1(k) \dots \lambda_n(k))$ est bornée dans $\mathbb{R}^n$ un $\mathbb{R}$-ev de dim finie

donc la suite admet une sous-suite CV :

$(\lambda_1(\varphi(k)), \dots, \lambda_n(\varphi(k))) \xrightarrow[k \to +\infty]{} (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ $\quad$ or $a_i(\varphi(k))$ est le $n-i$ ème poly sym. élémentaire de $(\lambda_1(\varphi(k)) \dots \lambda_n(\varphi(k)))$

donc par passage à la lim a_i est le $(n-i)$ ième poly sym. élémentaire de $(\lambda_1 \dots \lambda_n)$ donc $\chi_M = \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i)$ scindé dans $\mathbb{R}[X]$ $\hookrightarrow$ $\underline{M \in T_n(\mathbb{R})}$

donc $\overline{DG_n(\mathbb{R})} = T_n(\mathbb{R})$

2/ Lien valeurs d'adhérence d'une suite & adhérence de l'ens. de ses termes :

$VA((x_n)_{n\in\mathbb{N}})$ l'ens des valeurs d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$l \in VA((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ $\{n \in \mathbb{N} \,/\, x_n \in B(l,\varepsilon)\}$ infini

$\Updownarrow$

$\forall \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N : x_n \in B(l,\varepsilon)$

$\Updownarrow$

$\forall N \in \mathbb{N}, \forall \varepsilon > 0$ $\exists n \geq N : x_n \in B(l,\varepsilon)$

$\Updownarrow$

$\forall N \in \mathbb{N}, \forall \varepsilon > 0$ $\{x_n / n \geq N\} \cap B(l,\varepsilon) \neq \emptyset$

$\Updownarrow$

$\forall N \in \mathbb{N}$ $l \in \overline{\{x_n / n \geq N\}}$

donc $VA((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \bigcap_{N\in\mathbb{N}} \overline{\{x_n / n \geq N\}}$ ← c'est une fermé ($\cap$ de fermés)

donc $VA((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) \subset \overline{\{x_n / n \geq 0\}}$

3/ Convexité de l'adhérence et de l'intérieur d'une partie convexe

∘ A convexe de E. Soit $(u,v) \in \bar{A}$ donc $\exists ((x_n),(y_n)) \in (A^{\mathbb{N}})^2 : x_n \to u$, $y_n \to v$

soit $\lambda \in [0,1]$

A convexe $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$ $\lambda x_n + (1-\lambda)y_n \in A$ or $\lambda x_n + (1-\lambda)y_n \to \lambda u + (1-\lambda)v$

donc $\lambda u + (1-\lambda)v \in \bar{A} \Rightarrow \bar{A}$ convexe

∘ Soit $(u,v) \in \mathring{A}$ donc $\exists \varepsilon > 0 : B(u,\varepsilon) \subset A$ et $B(v,\varepsilon) \subset A$

Soit $w \in E$ tq $\|w\| < \varepsilon$

$\lambda u + (1-\lambda)v + w = \lambda(\underbrace{u+w}_{\in A}) + (1-\lambda)(\underbrace{v+w}_{\in A}) \in A$

donc $B(\lambda u + (1-\lambda)v, \varepsilon) \subset A \Rightarrow \mathring{A}$ convexe

4/ Caractérisation séquentielle d'un fermé relatif :

$\phi \in \mathcal{P}(A)$ $A\backslash\phi$ ouvert relatif de A $\Leftrightarrow$ ϕ un fermé relatif de A $\Leftrightarrow$ toute suite d'élts de ϕ CV dans A a sa limite ds ϕ

* Si $A\backslash\phi$ ouvert relatif de A alors $\exists O$ ouvert dans E : $A\backslash\phi = O \cap A$ ie $\phi = A\backslash(O\cap A) = A \cap O^c$

ie $\phi = O^c \cap A$ fermé dans E $\Rightarrow$ ϕ est un fermé relatif dans E

* ϕ fermé relatif de A Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \phi^{\mathbb{N}}$ tq $x_n \to a \in A$

$\exists F$ fermé de E tq $\phi = F \cap A$ donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F^{\mathbb{N}}$ donc x_n CV dans F

soit $a \in F$ donc $a \in \phi$

* Supposons que $A\backslash\phi$ n'est pas un ouvert relatif de A

donc $\exists a \in A\backslash\phi$ tq $A\backslash\phi \notin \mathcal{V}_A(a)$ donc $\forall r > 0$: $B(a,r) \cap A \not\subset A\backslash\phi$

donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $B(a,\frac{1}{n}) \cap A \not\subset A\backslash\phi$ donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\exists a_n \in A$: $\begin{cases} \|a_n - a\| \leq \frac{1}{n} \\ a_n \in \phi \end{cases}$

donc $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \phi^{\mathbb{N}}$ $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a \in A\backslash\phi$ (re non (iii)) □

5/ Caractérisation de la continuité par l'image réciproque des ouverts

$f : X \to F$ $\quad$ f continue $\Leftrightarrow$ l'image réciproque de tout ouvert de F est un ouvert relatif de X

* Soit $f : X \to F$ continue Soit O une partie ouverte de F

Mq $f^{-1}(O)$ est un ouvert relatif de X soit $\forall x \in f^{-1}(O)$ · $f^{-1}(O)$ est un voisinage relatif de x

Soit $x \in f^{-1}(O)$ $f(x) \in O$ donc $\exists \varepsilon > 0$: $B(f(x),\varepsilon) \subset O$

or f continue en x donc $\exists r > 0 : \forall y \in X$ $\|y - x\| < r \Rightarrow f(y) \in B(f(x),\varepsilon) \subset O$

donc $B(x,r) \cap X \subset f^{-1}(O)$ donc $f^{-1}(O)$ est un voisinage relatif de x

* Supposons que l'image réciproque de tout ouvert de F est un ouvert relatif de X

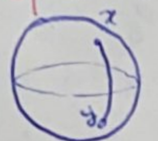
Soit $x \in X$ Soit $\varepsilon > 0$ $B(f(x),\varepsilon)$ est un ouvert de F donc $f^{-1}(B(f(x),\varepsilon))$

est un ouvert relatif de X contenant x

donc $\exists r > 0$: $B(x,r) \cap X \subset f^{-1}(B(f(x),\varepsilon))$ ie $f(B(x,r) \cap X) \subset B(f(x),\varepsilon)$

donc f continue en x.

6/ Connexité par arcs d'une sphère en dim sup ou égale à 2



Soit $\gamma : [0,1] \longrightarrow S$

$t \longmapsto \dfrac{tx+(1-t)y}{\|tx+(1-t)y\|}$

$tx+(1-t)y=0 \Leftrightarrow (1-t)y=-tx \Rightarrow \|(1-t)y\|=\|tx\|$ $\Downarrow$ $1-t=t \Rightarrow \underbrace{t=\frac{1}{2}}$ $\hat{\Downarrow}$ $x=-y$

* si $x \neq -y$ γ est continue $\begin{cases}\gamma(0)=y\\ \gamma(1)=x\end{cases}$

* si $x=-y$. Soit $z \in S \setminus \{x,-x\}$ (ie $z \notin \mathrm{Vect}\{x\}$) $\dim E \geq 2$
on relie x à $\frac{z}{\|z\|}$ puis $\frac{z}{\|z\|}$ à $y=-x$

donc S est connexe par arcs.

* si $\dim E = 1$ alors $S(0_E,1)=\left\{\frac{-u}{\|u\|},\frac{u}{\|u\|}\right\}$ fini de cardinal 2 donc S pas cpa.

7/ Une partie connexe par arcs est connexe.
Supposons X cpa Soit $f : X \to \{0,1\} \subset \mathbb{R}$ une application continue donc $f(X)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ inclus ds $\{0,1\}$
donc $f=[0]$ ou $f[1]$ donc f est constante
$\hookrightarrow$ X connexe

8/ si $X=\biguplus_{i=1}^{n} X_i$ $\forall D \in P([\![1,n]\!])$, $|D| \geq 2 \Rightarrow \biguplus_{i \in D} X_i$ n'est pas cpa
Alors $(X_1 \dots X_n)$ sont les composantes connexes par arcs de X

Soit $i_1 \in [\![1,n]\!]$ soit $x \in X_{i_1}$ X_{i_1} est cpa donc $X_{i_1} \subset C(x)$ ← plus grande partie cpa
Supposons $X_{i_1} \neq C(x)$
$P(k)$: "$\exists (i_2 \dots i_k) \in [\![1,n]\!]^k$ / $X_{i_1} \uplus X_{i_2} \uplus \dots \uplus X_{i_k} \subset C(x)$" $k \in [\![2,n]\!]$

* $P(2)$: Soit $y \in C(x) \setminus X_{i_1}$ donc $\exists i_2 \in [\![1,n]\!] \setminus \{i_1\}$: $y \in X_{i_2}$ ie $y \in C(x) \cup X_{i_2}$
donc $C(x) \cup X_{i_2}$ cpa or $C(x) \subset C(x) \cup X_{i_2} \Rightarrow X_{i_2} \subset C(x)$
donc $X_{i_1} \uplus X_{i_2} \subset C(x)$

* Supp $P(k)$ vraie pour $2 \leq k \leq n-1$ $\underbrace{X_{i_1} \uplus \dots \uplus X_{i_k}}_{n\,cpa} \subset C(x)$
$\exists i_{k+1} \in [\![1,n]\!] \setminus \{i_1 \dots i_k\}$ tq $X_{i_1} \uplus X_{i_2} \dots \uplus X_{i_{k+1}} \subset C(x)$
donc après une réc finie on trouve $\cup X \subset C(x)$ ie $X = C(x)$
absurde car X n'est pas cpa donc $X_{i_1} = C(x)$

9/ $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.
Soit $M \in GL_n(\mathbb{C})$ $\exists P \in GL_n(\mathbb{C})$: $M = PTP^{-1}$ avec $T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ et $\lambda_1 \dots \lambda_n \neq 0$

$\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} t_{11} & \dots & t_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & t_{nn} \end{pmatrix} / \ t_{11} \dots t_{nn} \neq 0 \right\}$

$\varphi : (\mathbb{C}^*)^n \times \mathbb{C}^{\frac{n(n-1)}{2}} \longrightarrow \mathcal{E}$

$(t_{11} \dots t_{nn}, t_{12} \dots t_{n-1 n}) \longmapsto \begin{pmatrix} t_{11} & & t_{ij} \\ & \ddots & \\ 0 & & t_{nn} \end{pmatrix}$

φ continue bijective (restriction d'une app. linéaire ev fini)

et $(\mathbb{C}^*)^n \times \mathbb{C}^{\frac{n(n-1)}{2}}$ cpa (prod. cartésiens de cpa) donc $\varphi(\ \ ) = \mathcal{E}$ est cpa

or $GL_n(\mathbb{C}) = \bigcup_{P \in GL_n(\mathbb{C})} \{PTP^{-1} / T \in \mathcal{E}\}$

$\psi : \mathcal{E} \longrightarrow \{PTP^{-1} / T \in \mathcal{E}\}$ est continue (car restriction de l'application linéaire $M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow M_n(\mathbb{C})$, $T \longmapsto PTP^{-1}$)

$T \longmapsto PTP^{-1}$

donc $\psi(\mathcal{E})$ est cpa
de plus $\forall P \in GL_n(\mathbb{C})$ $I \in \{PTP^{-1} / T \in \mathcal{E}\}$ donc $\bigcap_{P \in GL_n(\mathbb{C})} \{PTP^{-1} / T \in \mathcal{E}\} \neq \emptyset$
donc $GL_n(\mathbb{C})$ est cpa

10/ $GL_n(\mathbb{R})$ possède deux composantes connexes par arcs.
$\det : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue et $\det(GL_n(\mathbb{R})) = \mathbb{R}^*$
$\mathbb{R}^*$ n'est pas cpa donc $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas cpa
$\underline{GL_n(\mathbb{R}) = GL_n^+(\mathbb{R}) \uplus GL_n^-(\mathbb{R})}$
Soit $M \in GL_n^+(\mathbb{R})$ donc $M = T_{i_1 j_1}(\lambda_1) T_{i_2 j_2}(\lambda_2) \dots T_{i_r j_r}(\lambda_r) \times D_n(\det M) \times T_{i_{r+1}}(\lambda_{r+1}) \times \dots \times T_{i_p}(\lambda_p)$

$\gamma : [0,1] \longrightarrow GL_n^+(\mathbb{R})$
$t \longmapsto T_{i_1}(t\lambda_1) \times \dots \times T_{i_r}(t\lambda_r) D_n\big(\underbrace{t\det M + (1-t)}_{\in [1,\det M] \text{ ou } [\det M, 1] \subset \mathbb{R}^{*+}}\big) \times T_{i_{r+1}}(t\lambda_{r+1}) \times \dots \times T_{i_p}(t\lambda_p)$

γ est continue à valeurs ds $GL_n^+(\mathbb{R})$
et $\begin{cases}\gamma(0) = I_n \\ \gamma(1) = M\end{cases}$ donc $\underline{GL_n^+(\mathbb{R}) \text{ est cpa}}$

$\varphi : GL_n^+(\mathbb{R}) \longrightarrow GL_n^-(\mathbb{R})$ continue bijective donc $GL_n^-(\mathbb{R}) = \varphi(GL_n^+(\mathbb{R}))$ $\underline{\text{est cpa}}$

$M \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -1 \end{pmatrix} M$

donc les composantes cpa de $GL_n(\mathbb{R})$ sont $GL_n^+(\mathbb{R})$ et $GL_n^-(\mathbb{R})$

Colle de Maths
Semaine 12

1/ f diago $\Leftrightarrow \exists P$ poly annulateur de f scindé à racines simples
$\Leftrightarrow \pi_f$ scindé à r simples

$*$ Supp f diago donc $E = \bigoplus_{\lambda \in Sp(\lambda)} E_\lambda(f) = \bigoplus_{\lambda \in Sp(\lambda)} \ker(f - \lambda . id_E)$

$= \ker(P(f))$

avec $P = \prod_{\lambda \in Sp(\lambda)} (X - \lambda)$ $\quad \lambda \neq \mu \Rightarrow (X-\lambda) \wedge (X - \mu) = 1$

donc P est un poly annulateur de f scindé à r simples

$*$ Si P poly annulateur scindé à r simples alors $\pi_f | P$
donc π_f scindé à r simples

$*$ Supp π_f scindé à r. simples $\quad \pi_f = \prod_{\lambda \in Sp(f)} (X - \lambda)$
donc $\ker \pi_f(f) = \bigoplus_{\lambda \in Sp(f)} \ker(f - \lambda id_E)$ et $E = \bigoplus_{\lambda \in Sp(f)} E_\lambda(f)$
$\hookrightarrow f$ diago

2/ Codiagonalisabilité d'une f. d'endo. diagonalisables
$\forall i$ f_i diago
$\forall (i,j) \in I^2$ $f_i \circ f_j = f_j \circ f_i$ $\quad \Leftrightarrow$ Les f_i sont codiagonalisables
$\hookrightarrow \exists B$ commune de diagonalisation aux f_i

$\Leftarrow$ Supp f_i codiago donc $\exists B$ base et $(D_i)_{i \in I}$
$\forall i \in I$ $\quad D_i = Mat_B(f_i)$ $\quad \forall (i,j) \in I^2$ $D_i \times D_j = D_j \times D_i$
donc $\forall (i,j) \in I^2$ $f_i \circ f_j = f_j \circ f_i$

$\Rightarrow$ Réc sur n. $n = 1$ $(\lambda_i)_{i \in I} \in K^I$ une f. tq
$\forall i \in I$ $f_i = \lambda_i id_E$ $\Rightarrow \forall B$ de E_i $Mat_B(f_i) = (\lambda_i)$ diagonale

$*$ Supp $P(n)$ pour n. Soit $(f_i)_{i \in I}$ famille d'endo diagonalisables
$\dim E = n+1$
$\forall (i,j) \in I^2$ $f_i \circ f_j = f_j \circ f_i$

Cas 1: $\forall i \in I$ $f_i = K id_E$ toute base est base de codiago
Cas 2: $\exists i_0 \in I$: $f_{i_0} \notin K id_E$
f_{i_0} diago donc $Sp(f_{i_0}) \neq 0$ $\quad E = \bigoplus_{\lambda \in Sp(f_{i_0})} E_\lambda(f_{i_0})$
$\forall i \in I$ $f_{i_0} \circ f_{i_0} = f_{i_0} \circ f_i$ donc $\forall \lambda \in Sp(f_{i_0})$ $E_\lambda(f_{i_0})$ stable par f_i

donc $(f_i | E_\lambda f_{i_0})_{i \in I}$ est une famille d'endo de $E_\lambda(f_{i_0})$ qui commutent 2 à 2. $f_{i_0} \neq id_E$ donc $\dim E_\lambda(f_{i_0}) \leq n+1-1 = n$
Donc par hyp de réc.
$\exists$ une base B_λ de $E_\lambda(f_{i_0})$ formée de vecteurs propres communs à tous les f_i. $B = \bigcup_{\lambda \in Sp(f_{i_0})} B_\lambda$ est alors une base de E formée de vecteurs propres de f_i $\forall i \in I$

3/ Caractérisation de la trigonalisabilité par un polynôme annulateur scindé :
f trigo $\Leftrightarrow \chi_f$ scindé $\Leftrightarrow \exists P$ annulateur de f scindé $\Leftrightarrow \pi_f$ scindé

$1 \Rightarrow 2)$ f trigo $\Rightarrow \exists B$ de E tq $Mat_B(f) = \begin{pmatrix} d_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}$ donc $f(e_1) = d_1 e_1$
$\Downarrow$
$Sp(f) \neq \emptyset$

donc $\pi_f = \prod_{i=1}^{n} (X - d_i) \Rightarrow \chi_f$ scindé

$2 \Rightarrow 3)$ χ_f scindé $\quad \chi_f(f) = 0$ donc $\exists P$ - - -
$3 \Rightarrow 4)$ $\pi_f | \chi_f$ donc π_f scindé
$4 \Rightarrow 1)$ $*$ Si $\dim E = 1$ $\quad f = \lambda . id_E$ $\quad f$ diago $\Rightarrow f$ trigo.
$*$ Supp le résultat vrai pour $\dim E = n$ Soit $f \in L(E)$, $\dim E = n+1$, π_f scindé

π_f scindé, $\deg \pi_f \geq 1$ $\Rightarrow \begin{cases} \lambda \in Sp(f) \\ \dim \underbrace{E_\lambda(f)}_{\ker(f - \lambda . id_E)} \geq 1 \end{cases}$ $\Rightarrow rg(f - \lambda id_E) \leq n+1-1 = n$

Soit H hyperplan de E contenant $im(f - \lambda id_E)$
$\forall x \in H$ $\quad f(x) = \underbrace{(f(x) - \lambda x)}_{\in im(f - \lambda id_E) \subset H} + \underbrace{\lambda x}_{\in H}$ $\in H$

donc H est f- stable

$\pi_{f_{|H}} | \pi_f$ et donc $\pi_{f_{|H}}$ scindé par hyp de réc. $f_{|H}$ trigon.
soit $(e_1 \dots e_n)$ une base de H trigonalisant $f_{|H}$
on la complète en $(e_1 \dots e_n, e_{n+1})$ base de E

$Mat_B(f) = \left(\begin{array}{ccc|c} d_1 & & * & x \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & d_n & x \\ \hline & 0 & & d_{n+1} \end{array} \right)$ f trigo

4/ Cotrigonalisation de 2 endomorphismes trigonalisables qui commutent :

* f est trigonalisable donc $Sp(f) \neq \phi$
Soit $\lambda \in Sp(f)$ f commute avec g donc $E_\lambda(f)$ est g-stable
g trigonalisable $\Rightarrow g_{|E_\lambda(f)}$ trigonalisable
Soit $\mu \in Sp(g_{|E_\lambda(f)})$ $\exists x \in E_\lambda(f) \setminus \{0\}$: $g(x) = \mu x$
or $f(x) = \lambda . x$ car $x \in E_\lambda(f)$ donc f et g ont un vecteur propre en commun

* → Si $\dim E = 1$: toute base de E cotrigonalise f et g
→ Supposons le résultat vrai dans K-ev de dim n
→ Soit $\dim E = n+1$ f et g trigonalisables qui commutent

Soit e_1 un vecteur propre commun à f et g
$B(e_1 \dots e_{n+1})$ base de E

donc $\underset{B}{Mat}(f) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & L \\ \hline 0 & A \end{array}\right) = F$ $\underset{B}{Mat}(g) = \left(\begin{array}{c|c} \mu & \Lambda \\ \hline 0 & B \\ \vdots & \\ 0 & \end{array}\right) = G$

$F \times G = G \times F \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c|c} \lambda\mu & \lambda\Lambda + LB \\ \hline 0 & AB \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda\mu & \mu L + \Lambda A \\ \hline 0 & BA \\ \vdots & \\ 0 & \end{array}\right) \Leftrightarrow AB = BA$

χ_f, χ_g scindés $\Rightarrow \chi_A, \chi_B$ scindés

$\begin{cases} \chi_f = (X-\lambda)\chi_A \\ \chi_g = (X-\mu)\chi_B \end{cases}$ donc

$\Downarrow$
A et B trigonalisables qui commutent
$\Downarrow P(n)$
A et B cotrigonalisables

$\exists P \in Gl_n(K)$: $\begin{cases} A = PTP^{-1} \\ B = PT'P^{-1} \end{cases}$

$\underset{B}{Mat}(f) = \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & P \end{array}\right)}_{P} \times \left(\begin{array}{c|c} \lambda & M \\ \hline 0 & T \end{array}\right) \times \overbrace{\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & P^{-1} \end{array}\right)}^{P^{-1}} = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & LP^{-1} \\ \hline 0 & PTP^{-1} = A \\ \vdots & \\ 0 & \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{c} MP^{-1} = L \\ \Downarrow \\ M = LP \end{array}$

$\underset{B}{Mat}(g) = \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \dots 0 \\ \hline 0 & P \\ \vdots & \end{array}\right)}_{\in Gl_{n+1}(K)} \left(\begin{array}{c|c} \mu & \Lambda P \\ \hline 0 & T' \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & P^{-1} \\ \vdots & \\ 0 & \end{array}\right)$

5/ Dimension du commutant d'un endomorphisme diagonalisable :

Supp f diagonalisable de vp distinctes $\lambda_1 \dots \lambda_p$
$g \in \mathcal{C}(f)$ $\forall i \in [\![1, r]\!]$ $E_{\lambda_i}(f)$ stable par g

$\varphi : \mathcal{C}(f) \longrightarrow \mathcal{L}(E_{\lambda_1}(f)) \times \dots \times \mathcal{L}(E_{\lambda_r}(f))$
$g \longmapsto (g_{|E_{\lambda_1}(f)}, \dots, g_{|E_{\lambda_r}(f)})$

φ est linéaire.
$g \in \mathcal{C}(f)$ $\varphi(g) = (0, \dots 0) \Rightarrow g_{|E_{\lambda_1}(f)} = 0 \dots g_{|E_{\lambda_r}(f)} = 0$
or $E = \bigoplus_{i=1}^{r} E_{\lambda_i}(f)$ donc $g = 0_{\mathcal{L}(E)}$ donc φ injective

* $(h_1 \dots h_r) \in \mathcal{L}(E_{\lambda_1}(f)) \times \dots \times \mathcal{L}(E_{\lambda_r}(f))$
$h : E \longrightarrow E$
$x = \sum_{i=1}^{r} x_i \longmapsto \sum_{i=1}^{r} h_i(x_i)$

• h bien définie
$\forall i \in [\![1, r]\!]$ $h_{|E_{\lambda_i}(f)} = h_i$

B_i une base de $E_{\lambda_i}(f)$ $B = \bigcup_{i=1}^{r} B_i$

$F = Mat_B(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{m_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_r I_{m_r} \end{pmatrix}$ $H = \underset{B}{Mat}(h) = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_r \end{pmatrix}$

$FH = HF$ donc $f \circ h = f \circ h \Rightarrow h \in \mathcal{C}(f)$ φ est surjective
donc φ est un isomorphisme de K-ev
donc $\dim(\mathcal{C}(f)) = \sum_{i=1}^{r} \dim \mathcal{L}(E_{\lambda_i}(f)) = \sum_{i=1}^{r} \dim E_{\lambda_i}{}^2 = \sum_{\lambda \in Sp(f)} \dim E_\lambda(f)^2$
$= \sum_{\lambda \in Sp(f)} m(\lambda)^2$ car f diagonalisable

6/ Existence d'une décomposition de Dunford + Unicité

$M = P \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{i_1} + N_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_k I_{i_k} + N_k \end{pmatrix} P^{-1}$ $N_1 \dots N_k$ nilpotentes
$M = D + N$ $D = P \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{i_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_k I_{i_k} \end{pmatrix} P^{-1}$

$DN = DN$

$N = P \begin{pmatrix} N_1 & & \\ & \ddots & \\ & & N_k \end{pmatrix} P^{-1}$

Unicité : $M = D + N$ $\begin{cases} D \in K[M] \text{ diago} \\ N \in K[M] \text{ nilpo} \end{cases}$ $M = D' + N' = D + N$

$MD' = (D' + N')D' = D'^2 + N'D' = D'(D' + N') = D'M$ D' commute avec $M \Rightarrow$ D' commute avec D
donc $D' + D$ diagonalisable
N' commute avec M donc avec tout elmt de $K[M]$ avec N
$N' - N$ nilpotente donc $D' - D = N - N' \Rightarrow D' - D = N - N' = 0$
diago nilpo

Colle n° 12

1/ Continuité croissante et décroissante d'une proba et lim de la proba d'une $\cap$ de n événements:

* Soit $(A_n) \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$ $\quad P\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) \xrightarrow[+\infty]{} P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_k\right)$

posons $\begin{cases} A_0' = A_0 \\ \forall n\in\mathbb{N} \quad A_{n+1}' = A_{n+1} \setminus \left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) \end{cases}$ $\qquad \mathcal{P}(n)$: « $\bigcup_{k=0}^{n} A_k = \biguplus_{k=0}^{n} A_k'$ » $(n\in\mathbb{N})$

• $P(0)$ ok • Soit n tq $P(n)$ $\quad \bigcup_{k=0}^{n+1} A_k' = A_{n+1}' \cup \left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) = \bigcup_{k=0}^{n+1} A_k$

or $\bigcup_{k=0}^{n+1} A_k' = \biguplus_{k=0}^{n+1} A_k'$ donc $\biguplus_{k=0}^{n+1} A_k' = \bigcup_{k=0}^{n+1} A_k$

donc $\forall n\in\mathbb{N}$ $\bigcup_{k=0}^{n} A_k = \biguplus_{k\geq 0}^{n} A_k' \Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\left(\biguplus_{k=0}^{n} A_k'\right)$ ie $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_k = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_k'$

Donc $P\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) = P\left(\biguplus_{k=0}^{n} A_k'\right) = \sum_{k=0}^{n} P(A_k') \xrightarrow[n\to+\infty]{} P\left(\biguplus_{n\in\mathbb{N}} A_k'\right) = P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_k\right)$

si (A_n) suite $\nearrow$ alors $P\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n)$

* $P\left(\bigcap_{k=0}^{n} B_k\right) = 1 - P\left(\bigcup_{k=0}^{n} \overline{B_k}\right) \xrightarrow[+\infty]{} 1 - P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{B_n}\right) = 1 - P\left(\overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n}\right) = P\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n\right)$

$P\left(\bigcap_{k=0}^{n} B_k\right) \xrightarrow[+\infty]{} \lim P(B_n)$

2/ Caractérisation d'une proba sur un ensemble dénombrable (muni de la tribu grossière): Si P proba sur Ω alors $\forall\omega\in\Omega$ $P(\{\omega\}) \geq 0$ et $\sum_{\omega\in\Omega} P(\{\omega\}) = 1$

Récip. Si $(p_\omega)_{\omega\in\Omega}$ famille sommable de $\mathbb{R}_{\geq 0}$ de somme $= 1$ alors $\exists!$ proba P sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ tq $\forall\omega\in\Omega$ $P(\omega) = p_\omega$

$\Rightarrow$ P à val. ds $[0,1]$ donc $\forall\omega\in\Omega$ $P(\{\omega\}) \geq 0$ de plus $\Omega = \biguplus_{\omega\in\Omega} \{\omega\}$

Ω au plus dénombrable donc $P(\Omega) = \sum_{\omega\in\Omega} P(\{\omega\})$

$\Leftarrow$ Analyse: Supposons l'existence de P

Soit $A\in\mathcal{P}(\Omega)$ $\quad A = \biguplus_{\omega\in A} \{\omega\}$ $\quad A$ au plus dénombrable

donc $P(A) = \sum_{\omega\in A} P(\{\omega\}) = \sum_{\omega\in A} p_\omega = \sum_{\omega\in\Omega} \mathbb{1}_A(\omega) p_\omega = \sum_{\omega\in\Omega} \delta_\omega(A) p_\omega \Rightarrow P = $ « $\sum_{\omega\in\Omega} p_\omega \delta_\omega$ »

Synthèse: $(p_\omega)_{\omega\in\Omega} \in \ell^1(\Omega, \mathbb{R}^+)$ et $\sum_{\omega\in\Omega} p_\omega = 1$

si $A\in\mathcal{P}(\Omega)$ alors $(p_\omega)_{\omega\in A}$ sommable donc $P : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}^+$, $A \longmapsto \sum_{\omega\in A} p_\omega$

• $P(\Omega) = \sum_{\omega\in\Omega} p_\omega = 1$ • $\forall A\in\mathcal{P}(\Omega)$ $P(A)\in[0,1]$

• $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite d'élmts de $\mathcal{P}(\Omega)$ disjoints 2 à 2 $\quad A = \biguplus_{n\in\mathbb{N}} A_n$

$\forall\omega\in\Omega$ $\mathbb{1}_A(\omega) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{A_n}(\omega)$ au plus dénombrable

$P(A) = \sum_{\omega\in A} p_\omega = \sum_{\omega\in\Omega}\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{A_n}(\omega)\right) p_\omega = \sum_{n\in\mathbb{N}}\left(\sum_{\omega\in\Omega} \mathbb{1}_{A_n}(\omega) p_\omega\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n)$

3/ Inégalité de Boole: $\begin{cases} A_0' = A_0 \\ \forall n\in\mathbb{N} \quad A_{n+1}' = A_{n+1} \setminus \left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) \end{cases}$

$\forall k\in\mathbb{N}$ $A_k' \subset A_k$ donc $\forall k\in\mathbb{N}$ $P(A_k') \leq P(A_k)$

donc $\underbrace{\sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_k')}_{P\left(\biguplus_{n\in\mathbb{N}} A_k'\right)} \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} P(A_k)$ (dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$)

donc $\boxed{P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_k\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n)}$

4/ Lemme de Borel-Cantelli: $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ espace probabilisé

$(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$ $\quad \limsup_{n\to+\infty} A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}}\left(\bigcup_{k\geq n} A_k\right) \in \mathcal{F}$

1) $\sum_{k\geq 0} P(A_k)$ CV $\Rightarrow P\left(\limsup_{n\to+\infty} A_n\right) = 0$

2) $\sum_{n\geq 0} P(A_n)$ DV (*) les A_n mut. indép. alors $P\left(\limsup A_n\right) = 1$

On a $\bigcup_{k\geq n+1} A_k \subset \bigcup_{k\geq n} A_k$ donc $\limsup A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}}\left(\bigcup_{k\geq n} A_k\right)$

donc $P(\limsup A_n) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcup_{k\geq n} A_k\right)$

1) $\sum_{k\geq 0} P(A_k)$ CV alors $\forall n\in\mathbb{N}$ $P\left(\bigcup_{k\geq n} A_k\right) \leq \sum_{k\in[n,+\infty[} P(A_k)$ (Inég de Boole)

$= \sum_{k\geq n}^{+\infty} P(A_k)$

donc $\lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcup_{k\geq n} A_k\right) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} P(A_k) = 0$ car CV

2) Supp (*) Soit $n\in\mathbb{N}$ et $N \geq n$

$P\left(\bigcup_{n\leq k\leq N} A_k\right) = 1 - P\left(\bigcap_{k=n}^{N} \overline{A_k}\right) = 1 - \prod_{k=n}^{N} P(\overline{A_k}) = 1 - \prod_{k=n}^{N}(1 - P(A_k))$

or $\forall x\in[0,1]$ $e^{-x} \geq 1-x \geq 0$ donc $\prod_{k=n}^{N} e^{-P(A_k)} \geq \prod_{k=n}^{N}(1 - P(A_k))$

donc $1 \geq P\left(\bigcup_{n\leq k\leq N} A_k\right) \geq 1 - \underbrace{e^{-\sum_{k=n}^{N} P(A_k)}}_{\xrightarrow[N\to+\infty]{} 0}$ car $\sum_{n\geq 0} P(A_n)$ DV

donc $\forall n\in\mathbb{N}$ $P\left(\bigcup_{n\leq k} A_k\right) = 1$

↳ $P(\limsup A_n) = 1$

5/ Somme de deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Poisson: $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ $\quad Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)$ $\quad X$ et Y indép. $\quad X+Y \hookrightarrow$

$X(\Omega) = \mathbb{N}$, $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ donc $(X+Y)(\Omega) \subset \mathbb{N}$ $\quad$ Soit $k\in\mathbb{N}$

$P(X+Y=k) = P\left(\biguplus_{q=0}^{k}(X=q, Y=k-q)\right) = \sum_{q=0}^{k} P(X=q)P(Y=k-q)$

$= \sum_{q=0}^{k} e^{-\lambda}\frac{\lambda^q}{q!} \times e^{-\mu}\frac{\mu^{k-q}}{(k-q)!} = \frac{1}{k!}\sum_{q=0}^{k}\binom{k}{q} e^{-(\lambda+\mu)} \lambda^q \mu^{k-q}$

$= e^{-(\lambda+\mu)}\frac{(\lambda+\mu)^k}{k!}$ $\quad$ donc $X+Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda+\mu)$

6/ Existence d'une suite finie de v.a.d indépendantes de lois donnés.

Soit $(\Omega_1, \mathcal{P}(\Omega_1), P_1) \dots (\Omega_n, \mathcal{P}(\Omega_n), P_n)$ suite finie d'E probabilisés au + dénombrables

$(Y_1, \dots Y_n)$? tq $P_{Y_1} = P_1 \dots P_{Y_n} = P_n$

Posons $\Omega = \Omega_1 \times \dots \times \Omega_n$ (au + dénombrable) donc $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$

pour $(w_1 \dots w_n) \in \Omega$ $P(\{w_1 \dots w_n\}) = P_1(\{w_1\}) \times \dots \times P_n(\{w_n\})$

on a bien $P(\{w_1 \dots w_n\}) = \sum_{w_1 \in \Omega_1} P_1(\{w_1\}) \times \dots \times P_n(\{w_n\})$

$= \left(\sum_{w_1 \in \Omega_1} P_1(\{w_1\})\right) \times \dots \times \left(\sum_{w_n \in \Omega_n} P_n(\{w_n\})\right)$

$= P_1(\Omega_1) \times \dots \times P_n(\Omega_n) = 1$

on pose alors pour $i \in [\![1, n]\!]$ $Y_i : (\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P) \longrightarrow \Omega_i$

$(w_1, \dots w_n) \longmapsto w_i$

$Y_i(\Omega) = \Omega_i$

$(Y_i = w_i) = \Omega_1 \times \dots \times \Omega_{i-1} \times \{w_i\} \times \dots \times \Omega_n \in \mathcal{P}(\Omega)$

donc Y_i est une v.a.d.

$P(Y_i = w_i) = P_1(\Omega_1) \times P_2(\Omega_2) \times \dots \times P_i(w_i) \times \dots P_n(w_n) = P_i(\{w_i\})$

donc $P_{Y_i} = P_i$

$P_1(Y_1 = w_1, \dots Y_n = w_n) = P(\{w_1, \dots w_n\}) = P_1(\{w_1\}) \times \dots \times P_n(\{w_n\})$

donc $(Y_1 \dots, Y_n)$ sont indép.

7/ Étude des v.a à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ sans mémoire :

$X : (\Omega, \mathcal{F}, P) \to \mathbb{N}^*$ est sans mémoire $\Longleftrightarrow$ $X \hookrightarrow$ loi géométrique

$\Leftarrow$ $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ Soit $(k, l) \in \mathbb{N}^2$

$P(X > k+l \mid X > l) = \dfrac{P(X > k+l \cap X > l)}{P(X > l)} = \dfrac{P(X > k+l)}{P(X > l)}$

or $P(X > m) = \sum_{k=m+1}^{+\infty} P(X = k) = \sum_{k=m+1}^{+\infty} p(1-p)^{k-1} = p \times (1-p)^m \times \dfrac{1}{1-1+p} = (1-p)^m$

donc $= (1+p)^k = P(X > k)$

$\Rightarrow$ Supp X sans mémoire $\forall k \in \mathbb{N}$ $P(X > k+1 \mid X > 1) = P(X > k)$

ie $\forall k \in \mathbb{N}$ $P(X > k+1) = P(X > 1) P(X > k)$ posons $P(X > 1) = 1 - p$

• $p \neq 1$ car $X : (\Omega, \mathcal{F}, P) \to \mathbb{N}^*$

• Si $p = 0$ alors $\forall k \in \mathbb{N}$ $P(X > k+1) = P(X > k) = P(X > k+1) + P(X = k+1)$

donc $\forall k \in \mathbb{N}^*$ $P(X = k) = 0$ $\Rightarrow P(\Omega) = 0$!

donc $p \in]0, 1[$ donc $P(X > k) = (1-p)^k \underbrace{P(X > 0)}_{P(\Omega) = 1}$

donc $\forall k \in \mathbb{N}$ $P(X = k+1) + \underbrace{P(X > k+1)}_{(1-p)^{k+1}} = (1-p)^k$

donc $\forall k \in \mathbb{N}$ $P(X = k+1) = p(1-p)^k$ $\Rightarrow$ $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$

Colle Semaine 13 :

1/ Approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson :

$(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ suite de v.a.r. tq $\begin{cases} \forall n\in\mathbb{N}^* \; X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p_n) \\ np_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda>0 \end{cases}$

Alors $\forall k\in\mathbb{N}$ $\mathbb{P}(X_n=k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$ (ie $X_n \xrightarrow[+\infty]{\mathcal{L}} Y$ avec $Y\hookrightarrow\mathcal{P}(\lambda)$)

Soit k fixé

$\mathbb{P}(X_n=k)=\binom{n}{k}p_n^k(1-p_n)^{n-k}$ $\quad \binom{n}{k}=\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^k}{k!}$

donc $\mathbb{P}(X_n=k) \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^k}{k!}p_n^k(1-p_n)^{n-k}$

$\underset{+\infty}{\sim} \frac{\lambda^k}{k!}(1-p_n)^n \times \underbrace{\frac{1}{(1-p_n)^k}}_{\to 1}$ car $p_n\sim\frac{\lambda}{n}\to 0$

$\underset{+\infty}{\sim} \frac{\lambda^k}{k!}(1-p_n)^n$

$(1-p_n)^n=\exp(n\ln(1-p_n))$ or $n\ln(1-p_n)\underset{+\infty}{\sim}-np_n \underset{+\infty}{\sim} -\lambda$

donc $\lim_{n\to+\infty} n\ln(1-p_n)=-\lambda$

par continuité de l'exp $(1-p_n)^n \xrightarrow[+\infty]{} e^{-\lambda}$

d'où $\mathbb{P}(X_n=k)\xrightarrow[+\infty]{} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$

2/ Formule de transfert : X v.a.d, $f: X(\Omega)\to\mathbb{K}$ application

$f(X)\in L^1 \Leftrightarrow (f(x)\mathbb{P}(X=x))_{x\in X(\Omega)}$ est sommable

$E(f(X)) \overset{\text{def}}{=} \sum_{y\in f(X(\Omega))} y\,\mathbb{P}(f(X)=y) \overset{FT}{=} \sum_{x\in X(\Omega)} f(x)\,\mathbb{P}(X=x)$

$\Omega \xrightarrow{X} X(\Omega) \xrightarrow{f} \mathbb{K}$, $\underbrace{\qquad}_{f(X)}$ $\quad D=f(X(\Omega))$ au + dénombrable

Soit $y\in D$ $f^{-1}(\{y\})=\{x\in X(\Omega) / f(x)=y\}$

donc $\biguplus_{y\in D} f^{-1}(\{y\})=X(\Omega)$

$\sum_{x\in X(\Omega)} |f(x)|\,\mathbb{P}(X=x)=\sum_{y\in D}\sum_{x\in f^{-1}(\{y\})}|f(x)|\,\mathbb{P}(X=x)=\sum_{y\in D}\sum_{x\in f^{-1}(\{y\})}|y|\,\mathbb{P}(X=x)$

$=\sum_{y\in D}|y|\sum_{x\in f^{-1}(\{y\})}\mathbb{P}(X=x)=\sum_{y\in D}|y|\,\mathbb{P}(X\in f^{-1}(\{y\}))$

$=\sum_{y\in D}|y|\,\mathbb{P}(f(X)=y)$

3/ Linéarité de l'espérance :

Soit $(X,Y)\in L^1_{\mathbb{K}}(\Omega)^2$ et $(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2$

$(X,Y): \Omega\to\mathbb{K}^2$, $\omega\mapsto(X(\omega),Y(\omega))$ est une v.a.d.

$f: (X,Y)(\Omega)\to\mathbb{K}$, $(x,y)\mapsto\lambda x+\mu y$

$\underset{\overset{\shortparallel}{f(X,Y)}}{\lambda X+\mu Y}\in L^1_{\mathbb{K}}(\Omega) \Leftrightarrow \left(f(x,y)\,\mathbb{P}((X,Y)=(x,y))\right)_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)}$ sommable

$\sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} |\lambda x+\mu y|\,\mathbb{P}((X,Y)=(x,y))=\sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)}|\lambda x+\mu y|\,\mathbb{P}(X=x,Y=y)$

$\leq |\lambda|\underbrace{\sum_{(x,y)\in\ldots\times\ldots}|x|\,\mathbb{P}(X=x,Y=y)}_{E(X)<+\infty}+|\mu|\underbrace{\sum_{(x,y)\in\ldots\times\ldots}|y|\,\mathbb{P}(X=x,Y=y)}_{E(Y)<+\infty}$

$<$

donc (FT) $\lambda X+\mu Y\in L^1_{\mathbb{K}}(\Omega)$

et $E(\lambda X+\mu Y)=\lambda E(X)+\mu E(Y)$

4/ Inégalité de Markov :

1/ $X\in L^1_{\mathbb{K}}(\Omega)$ $\forall a>0$ $\mathbb{P}(|X|\geq a)\leq\frac{E(|X|)}{a}$

$a\mathbb{P}(|X|\geq a)=aE(\mathbb{1}_{|X|\geq a})=E(a\mathbb{1}_{(|X|\geq a)})$

or $\forall\omega\in\Omega$ $a\mathbb{1}_{(X\geq a)}(\omega)=\begin{cases}0 & \text{si } X(\omega)<a\\ a & \text{sinon}\end{cases}$

donc $a\mathbb{1}_{|X|\geq a}(\omega)\leq|X(\omega)| \Rightarrow a\mathbb{1}_{|X|\geq a}\leq|X|$

par ↗ de l'E pour vadr $E(a\mathbb{1}_{|X|\geq a})\leq E(|X|)$

2/ $X^p\in L^1_{\mathbb{K}}(\Omega)$ $\forall a>0$ $\mathbb{P}(|X|\geq a)\leq\frac{E(|X|^p)}{a^p}$

$(|X|\geq a)=(|X|^p\geq a^p)$ donc $\mathbb{P}(|X|\geq a)=\mathbb{P}(|X^p|\geq a^p)\leq\frac{E(|X|^p)}{a^p}$

* Inég de Tchebychev : $X\in L^2(\Omega)$ $\forall a>0$ $\mathbb{P}(|X-E(X)|\geq a)\leq\frac{V(X)}{a^2}$

Markov $p=2$ $\mathbb{P}(|X-E(X)|\geq a)\leq\frac{E((X-E(X))^2)}{a^2}=\frac{V(X)}{a^2}$

5/ Variance d'une v.a suivant une L géométrique

$X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$

$E(X^2) = \sum_{k \in \mathbb{N}^*} k^2 p(1-p)^{k-1}$

$\frac{(k+1)^2 p(1-p)^k}{k^2 p(1-p)^{k-1}} \Rightarrow 1-p < 1$ donc $X^2 \in L^1(\Omega)$

donc $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

$= E(X^2 - X) + E(X) - E(X)^2$

$E(X^2-X) \overset{PT}{=} \sum_{k=1}^{+\infty} (k^2-k)p(1-p)^{k-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} k(k+1)p(1-p)^k$

$|x|<1$: $\left(\frac{1}{1-x}\right)^3 = \left(\frac{1}{1-x}\right)^2 \times \frac{1}{1-x} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right)$

par absolue CV des série

$\left(\frac{1}{1-x}\right)^3 = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} (k+1)x^k x^{n-k} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \sum_{k=0}^{n}(k+1)$

$= \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \times \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

donc $E(X^2-X) = p(1-p) \times 2 \left(\frac{1}{1-(1-p)}\right)^3 = \frac{2(1-p)}{p^2}$

donc $V(X) = 2\left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p}\right) + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} = \frac{1-p}{p^2}$

6/ Loi faible des grands nombres :

$(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ suite de v.a
1) non corrélées 2 à 2
2) de m̂ loi
3) possédant une variance

$\forall \varepsilon > 0 \quad P\left(\left|\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - E(X_1)\right| \geq \varepsilon\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \qquad \frac{S_n}{n} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{P} E(X_1)$

$\frac{S_n}{n} = \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n) \in L^2$

$E\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = E(X_1) \quad V\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} V(X_i) = \frac{V(X_1)}{n}$

donc (Tchebychev)

$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - E(X_1)\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{V\left(\frac{S_n}{n}\right)}{\varepsilon^2} = \frac{V(X_1)}{n\varepsilon^2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

donc CQFD

Colle n°15 :

1- Lemme d'Abel et rayon de CV / CV de la série :

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

S'il existe $z_0 \in \mathbb{C}^*$ tq $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée alors $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ CVA $\forall z$ tq $|z| < |z_0|$

Soit $M \in \mathbb{R}^+$ tq $\forall n \in \mathbb{N}$ $|a_n z_0^n| \leq M$

Soit $z \in \mathbb{C}$ $\quad |a_n z^n| = |a_n z_0^n| \times \left|\frac{z}{z_0}\right|^n$

$\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad |a_n z^n| \leq M \times \left|\frac{z}{z_0}\right|^n$ $\quad$ si $|z| < |z_0|$ alors $\sum_{n\geq 0} \left|\frac{z}{z_0}\right|^n$ CV

donc $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ CVA $\quad R = \rho\left(\sum_{n\geq 0} a_n z^n\right)$

$R = +\infty$ Alors $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ CVA $\forall z \in \mathbb{C}$

$R = 0$ " $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ DVG $\forall z \in \mathbb{C}^*$

$R \in]0,+\infty[$ $\quad |z| < R \Rightarrow \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ CV

$|z| > R \Rightarrow \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ DVG

$|z| = R$ on ne veut rien dire

$*$ $R = +\infty$ donc $(a_n(|z|+1))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée

or $|z| < |z|+1$ donc (lemme d'Abel) $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ ACV

$*$ $R = 0$ soit $z \neq 0$ donc $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée

donc $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0 $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ DVG

$*$ $R \in]0,+\infty[$ soit $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| < R$ soit $r = \frac{|z|+R}{2} < R$ donc $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée

or $|z| < r$ donc (lemme d'Abel) $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ ACV

soit $|z| > R$ donc $(a_n |z|^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée donc $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ DVG

2- Une série entière et sa 1ère primitive ont m̂ rayon de CV :

$R = \rho\left(\sum_{n\geq 0} a_n z^n\right)$ avec $R =]0,+\infty]$ alors $\rho\left(\sum_{n\geq 0} a_n \frac{z^{n+1}}{n+1}\right) = R$

$\tilde{R} = \rho\left(\sum_{n\geq 0} a_n \frac{z^{n+1}}{n+1}\right) \underset{\uparrow}{=} \rho\left(\sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n} z^{n+1}\right) = \rho\left(\sum_{n\geq 1} \frac{a_{n+1}}{n+1} z^{n+1}\right) = \rho\left(\sum_{n\geq 2} \frac{a_n}{n} z^n\right)$

$\frac{a_n}{n+1} \sim \frac{a_n}{n}$

or $\frac{a_n}{n} = O(a_n)$ donc $R \leq \tilde{R}$

Soit $r \in [0,\tilde{R}[$ soit $r < s < \tilde{R}$ $\quad a_n r^n = a_n \frac{s^{n+1}}{n+1} \times \left(\frac{r}{s}\right)^{n+1} \times \frac{n+1}{r}$

or $s < \tilde{R}$ donc $\left(a_n \frac{s^{n+1}}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et comme $0 \leq \frac{r}{s} < 1$ et $\frac{n+1}{r}\left(\frac{r}{s}\right)^{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

donc $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et tend vers 0

donc $r \in [0,R)$ donc $[0,\tilde{R}[\subset [0,R]$ donc $\tilde{R} \leq R$ $\quad$ d'où $\underline{R = \tilde{R}}$

3/ Exemple d'une f^{ct} indéfiniment dérivable dont la série de Taylor est de rayon de CV nul :

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$

$x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n} e^{in^2 x}$

$|e^{-n} e^{in^2 x}| = e^{-n}$ et $\sum_{n\geq 0} e^{-n}$ CV donc f est bien définie sur $\mathbb{R}$

$f_n^{(k)}(x) = (in^2)^k e^{-n} e^{in^2 x}$ $\quad \|f_n^{(k)}(x)\| = n^{2k} e^{-n}$

$\forall k \in \mathbb{N}$ $\sum_{n\geq 0} n^{2k} e^{-n}$ CV donc il y a CV normale sur $\mathbb{R}$ de $\sum_{n\geq 0} f_n^{(k)}$

avec $f_n : x \longmapsto e^{-n} e^{in^2 x}$ donc $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$

$\forall k \in \mathbb{N}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (in^2)^k e^{-n} e^{in^2 x} = i^k \sum_{n=0}^{+\infty} n^{2k} e^{-n} e^{in^2 x}$

$f^{(k)}(0) = i^k \sum_{n=0}^{+\infty} n^{2k} e^{-n}$

Soit $r > 0$ $\quad \frac{|f^{(k)}(0)|}{k!} r^k \geq \frac{k^{2k} e^{-k}}{k!} r^k$

or $\frac{k^{2k} e^{-k}}{k!} r^k \underset{+\infty}{\sim} \frac{k^{2k} e^{-k}}{k^k} \times e^k \times \frac{r^k}{\sqrt{2\pi k}} = \frac{k^k r^k}{\sqrt{2\pi k}} \xrightarrow[k\to+\infty]{} +\infty$

donc $\rho\left(\sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n\right) = 0$

4/ Établir $(1+x)^\alpha$ admet un DES avec $\alpha \in \mathbb{C}$:

$f \in \mathcal{C}^\infty(]-1,+\infty[)$ $\quad$ Soit $x \in]-1,1[$

$\left|\frac{x^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-u)^n \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)(1+xu)^{\alpha-n-1} du\right|$

$\leq \left|\frac{x^{n+1}}{n!} \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)\right| \times \int_0^1 \left|\frac{1-u}{1+xu}\right|^n |1+xu|^{\alpha-1} du$

$\varphi : u \longmapsto \frac{1-u}{1+xu}$ est décroissante sur $[0,1]$

donc $0 = \varphi(1) \leq \varphi(u) \leq \varphi(0) = 1$

D'où $\left|\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt\right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{n!} |\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)| \int_0^1 |(1+xu)^{\alpha-1}| du = U_n$

Soit $x \in]-1,0[\cup]0,1[$ $\quad \frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{|x|}{n+1} |\alpha-n-1| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |x| < 1$

Donc $\sum_{n\geq 0} U_n$ CV donc $\lim_{n\to+\infty} U_n = 0$

donc f est développable en série entière sur $]-1,1[$

$\forall x \in]-1,1[$ $\quad (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$

5/ X est d'espérance finie ssi G_X est dérivable en 1 :

$X : \Omega \to \mathbb{N}$

Supp $X \in L^1(\Omega)$ donc $(n\mathbb{P}(X=n))_{n\in\mathbb{N}}$ sommable

or $G_X = \sum_{n=0}^{+\infty} g_n$ avec $g_n : t \mapsto \mathbb{P}(X=n)t^n$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[-1,1]$

et $g_n'(t) = n\mathbb{P}(X=n)t^{n-1}$

pour $n \geq 1$ $\|g_n'\|_{\infty,[-1,1]} = n\mathbb{P}(X=n)$

donc $\sum_{n\geq 1} g_n'$ CVN donc uniformément sur $[-1,1]$

donc $G_{X|[-1,1]} \in \mathcal{C}^1([-1,1])$ donc dérivable en 1 (à gauche)

$\forall t \in [-1,1]$ $G_X'(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} n\mathbb{P}(X=n)t^{n-1}$ donc $G_X'(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} n\mathbb{P}(X=n) = E[X]$

* Supp G_X dérivable en 1 à gauche :

$\forall t \in [0,1[$ $\frac{G_X(t)-G_X(1)}{t-1} = \frac{1}{t-1} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n)(t^n-1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n)(t^{n-1}+\dots+t+1)$

donc $\forall t \in [0,1[$ $\forall N \in \mathbb{N}^*$ $\frac{G_X(t)-G_X(1)}{t-1} \geq \sum_{n=0}^{N} \mathbb{P}(X=n)(t^{n-1}+\dots+t+1)$

lorsque $t \to 1^-$ $G_X'(1) \geq \sum_{n=0}^{N} n\mathbb{P}(X=n)$

donc $\sum_{n\geq 1} n\mathbb{P}(X=n)$ est à termes positifs et la suite de ses sommes partielles est majorée donc X est d'espérance finie.

6/ X admet un moment d'ordre k ssi G_X est k fois dérivable en 1 : Supposons $E(X^k) < +\infty$

Donc $X \in L^\ell(\Omega)$ $\forall \ell \in [\![1,k]\!]$ donc $\forall \ell \in [\![1,k]\!]$ $X(X-1)\dots(X-\ell+1) \in L^1(\Omega)$

$g_n \in \mathcal{C}^k$ $\forall \ell \in [\![1,k]\!]$ pour $n \geq \ell$ $g_n^{(\ell)} : t \mapsto n(n-1)\dots(n-\ell+1)\mathbb{P}(X=n)t^{n-\ell}$

donc $\|g_n^{(\ell)}\|_{\infty,[-1,1]} = n(n-1)\dots(n-\ell+1)\mathbb{P}(X=n)$

or $\sum_{n\geq 0} n(n-1)\dots(n-\ell+1)\mathbb{P}(X=n)$ CV car $X(X-1)\dots(X-\ell+1) \in L^1(\Omega)$

$\forall t \in [-1,1]$ $G_X^{(k)}(t) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)\mathbb{P}(X=n)t^{n-\ell}$

et $G_X \in \mathcal{C}^\infty([-1,1])$ donc $G_X^{(k)}(1) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)\mathbb{P}(X=n)$

$= E(X(X-1)\dots(X-k+1))$

Réciproquement : Supp G_X dérivable $(k+1)$ fois en 1

$\frac{G_X^{(k)}(t) - G_X^{(k)}(1)}{t-1} \underset{\text{Par HP}}{=} \frac{1}{t-1}\sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)\mathbb{P}(X=n)(t^{n-k}-1)$

$= \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)\mathbb{P}(X=n)(1+t+\dots+t^{n-k-1})$

$\geq \sum_{n=k}^{N} n(n-1)\dots(n-k+1)\mathbb{P}(X=n)(1+t+\dots+t^{n-k-1})$

$t \to 1$

$G_X^{(k+1)}(1) \geq \sum_{n=k}^{N} n(n-1)\dots(n-k+1)(n-k)\mathbb{P}(X=n)$

donc $X(X-1)\dots(X-k) \in L^1(\Omega)$ donc $X^{k+1} + Y \in L^1(\Omega) \Rightarrow X^{k+1} \in L^1(\Omega)$

Colle n°16

1) Théorème de convergence dominée:

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}_{pm}(I,\mathbb{K})$ (I intervalle)

Supp

1 - $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CVS} f \in \mathcal{C}_{pm}(I,\mathbb{K})$ sur I

2 - il existe $\varphi : I \to \mathbb{R}^+ \in \mathcal{C}_{pm} \cap \mathcal{L}(I)$

$\forall n\in\mathbb{N}\ \forall x\in I \cdot \ |f_n(x)| \leq \varphi(x)$

Alors $\cdot \forall n\in\mathbb{N}$ $f_n \in \mathcal{L}^1$ et $f\in\mathcal{L}^1$

$\cdot \begin{cases} \|f_n - f\|_1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \\ \int_I f_n \longrightarrow \int_I f \end{cases}$

$\cdot \left\{\begin{array}{l}\forall n\in\mathbb{N} \\ \varphi\in\mathcal{L}^1(I,\mathbb{K})\end{array}\right.$ $|f_n| \leq \varphi$ donc $f_n \in \mathcal{L}^1(I,\mathbb{K})$

$\downarrow n\to+\infty$

$|f|$ donc $|f| \leq \varphi$ donc $f\in\mathcal{L}^1(I,\mathbb{K})$

$\cdot$ Soit $\varepsilon>0$ $\varphi \in \mathcal{L}^1(I,\mathbb{R}^+)$ $\lim\limits_{\substack{a\to\inf I \\ b\to\sup I}} \int_a^b \varphi = \int_I \varphi$

donc $\exists a<b \in I$ tq $\left| \int_I \varphi - \int_a^b \varphi \right| \leq \varepsilon$

$\|f_n - f\|_1 = \int_I |f_n - f| = \int_{I\setminus[a,b]} |f-f_n| + \int_a^b |f-f_n|$

$|f-f_n| \leq |f| + |f_n| \leq 2|\varphi|$

$\int_{I\setminus[a,b]} |f-f_n| \leq 2\int_{I\setminus[a,b]} |\varphi| \leq 2\varepsilon$

$\left.\begin{array}{l} \cdot\ |f-f_n| \in \mathcal{C}_{pm}([a,b,\mathbb{R}^+]) \\ \cdot\ |f-f_n| \xrightarrow{CVS} [0] \\ \cdot\ |f-f_n| \leq 2\|\varphi\|_{\infty,[a,b]} \end{array}\right\}$ th de conv. bornée : $\int_{[a,b]} |f-f_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

donc $\exists N\in\mathbb{N}$: $\forall n\geq N$ $\int_a^b |f-f_n| < \varepsilon$

donc $\forall n \geq N$ $\|f-f_n\|_1 < 3\varepsilon$ donc $\|f-f_n\|_1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

on a $\left| \int_I f_n - \int_I f \right| = \left| \int_I f_n - f \right| \leq \int_I |f-f_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

donc $\int_I f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_I f$

2) Théorème d'intégration terme à terme:

$\sum_{n\geq 0} f_n$ série de f^cts $\mathcal{C}_{pm}$ sur I et intégrables sur I

Si $\begin{cases} \sum_{n\geq 0} f_n \text{ CV} \\ \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \text{ continue par morceaux sur I} \\ \sum_{n\geq 0} \int_I |f_n| \text{ une série CV} \end{cases}$ Alors $*$ $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est intégrable sur I

$*$ $\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n$

soit $N\in\mathbb{N}$ pour $p\geq N$ $g_p : I \longrightarrow \mathbb{R}^+$

$x \longmapsto \min\left(\left|\sum_{n=N}^{+\infty} f_n(x)\right|, \sum_{n=N}^{p} |f_n(x)| \right)$

$\forall p\geq N$ $g_p \in \mathcal{C}_{pm}(I)$

on a $\underbrace{\left|\sum_{n=N}^{+\infty} f_n(x)\right|}_{\in\mathbb{R}^+} \leq \underbrace{\sum_{n=N}^{+\infty} |f_n(x)|}_{\in\mathbb{R}^+\cup\{+\infty\}}$

soit $x\in I$

cas 1 : Si $\left|\sum_{n=N}^{+\infty} f_n(x)\right| < \sum_{n=N}^{+\infty} |f_n(x)|$

donc $\exists p_0 \geq N$ tq $\forall p\geq p_0$ $\left|\sum_{n=N}^{+\infty} f_n(x)\right| < \sum_{n=N}^{p} |f_n(x)|$

$\forall p\geq p_0$ $g_p(x) = \left|\sum_{n=N}^{+\infty} f_n(x)\right| \xrightarrow[p\to+\infty]{} \left|\sum_{n=N}^{+\infty} f_n(x)\right|$

cas 2 : Si $\left|\sum_{n=N}^{+\infty} f_n(x)\right| = \sum_{n=N}^{+\infty} |f_n(x)|$

$\forall p\geq N$ $\sum_{n=N}^{p} |f_n(x)| \leq \left|\sum_{n=N}^{+\infty} f_n(x)\right|$

$\hookrightarrow$ $g_p(x) = \sum_{n=N}^{p} |f_n(x)| \xrightarrow[p\to+\infty]{} \sum_{n=N}^{+\infty} |f_n(x)| = \left|\sum_{n=N}^{+\infty} f_n(x)\right|$

donc $g_p \xrightarrow[p\to+\infty]{CVS} \left|\sum_{n=N}^{+\infty} f_n\right|$ sur I

$[a,b]\subset I$ donc $g_{p|[a,b]} \xrightarrow[p\to+\infty]{CVS} \left|\sum_{n=N}^{+\infty} f_n\right|_{|[a,b]} \in \mathcal{C}_{pm}([a,b])$

$0 \leq g_{p|[a,b]} \leq \left|\sum_{n=N}^{+\infty} f_n\right|_{|[a,b]} \in \mathcal{L}^1([a,b])$ car $\mathcal{C}_{pm}$ sur un segment

donc d'après TCD $\lim\limits_{p\to+\infty} \int_a^b g_{p|[a,b]} = \int_a^b \left|\sum_{n=N}^{+\infty} f_n\right|$

or $\int_a^b g_p \leq \int_a^b \sum_{n=N}^{p} |f_n| \leq \sum_{n=N}^{p} \int_a^b |f_n| \leq \sum_{n=N}^{p} \int_I |f_n|$

$\Big\downarrow p\to+\infty$

$\int_a^b \left|\sum_{n=N}^{+\infty} f_n\right| \leq \sum_{n=N}^{+\infty} \int_I |f_n| < +\infty$ (hyp) vrai $\forall$ segment $\subset I$

donc $\sum_{n=N}^{+\infty} f_n$ intégrable sur I donc $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \in \mathcal{L}^1$

et $\int_I \left|\sum_{n=N}^{+\infty} f_n\right| \leq \sum_{n=N}^{+\infty} \int_I |f_n|$ d'où $\left|\int_I R_n\right| \leq \int_I |R_n| \leq \sum_{n=N}^{+\infty} \int_I |f_n| \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$

3/ Continuité d'une $\int$ à paramètre :

$f : A \times I \to \mathbb{K}$, $(x,t) \mapsto f(x,t)$

- $t \mapsto f(x,t) \in \mathcal{C}_{pm}(I)$
- $x \mapsto f(x,t) \in \mathcal{C}(A)$
- $\exists \varphi : I \to \mathbb{R}^+ \in \mathcal{C}_{pm} \cap \mathcal{L}$ $\forall (x,t) \in A \times I$ $|f(x,t)| \leq \varphi(t)$

$g : A \to \mathbb{K}$, $x \mapsto \int_I f(x,t)\,dt$ définie et $\mathcal{C}(A)$

Soit $x \in A$ $\begin{cases} |f(x,\cdot)| \leq \varphi \\ \varphi \in \mathcal{L} \end{cases}$ donc $g(x)$ existe, g bien définie

- Soit $x_0 \in A$ $f_x : t \mapsto f(x,t)$

Soit $t \in I$ $f_x(t) = f(x,t) \xrightarrow[x \to x_0]{} f(x_0,t)$

$\underset{\underset{f(x,\cdot)}{\parallel}}{f_x} \xrightarrow[x \to x_0]{CVS} f_{x_0}$

$\forall x \in A$ $|f_x| \leq \varphi \in \mathcal{L}^1$ donc (TCD) $\lim_{x \to x_0} \int_I f_x = \int_I f_{x_0}$

ie $\lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$ donc g continue en x_0

Colle 17 :

1_ Caractérisation des normes euclidiennes (id. du $\square$) :

$\|\cdot\|$ norme euclidienne sur $\mathbb{R}$-ev $\iff \forall (x,y) \in E^2$

$\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ (*)

$\Rightarrow$ OK $\Leftarrow$

* Soit $\|\cdot\|$ une norme qui vérifie (*) $\quad \varphi : E^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x,y) \longmapsto \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$

$\rightarrow \varphi(x,y) = \varphi(y,x)$ φ symétrique

$\rightarrow (x,y,z) \in E^3$ $\varphi(x+y,z) = \frac{1}{4}(\|x+y+z\|^2 - \|x+y-z\|^2)$

$\|x+y+z\| + \|x-y+z\| = 2(\|x+z\| + \|y\|^2)$

$\|x+y+z\| + \|-x+y+z\| = 2(\|y+z\| + \|x\|^2)$

$\|x+y+z\| = \|x+z\| + \|y+z\| + \|y\|^2 + \|x\|^2 - \frac{1}{2}(\|x-y+z\| + \|-x+y+z\|)$

$\|x+y-z\| = \|x-z\| + \|y-z\| + \|y\|^2 + \|x\|^2 - \frac{1}{2}(\|x+y+z\| + \|x-y+z\|)$

$\varphi(x+y,z) = \frac{4}{4}\left(\|x+z\| - \|x-z\|\right) + \frac{1}{4}\left(\|y+z\| - \|y-z\|\right)$

$= \varphi(x,z) + \varphi(y,z)$

$\rightarrow \varphi(-x,y) = -\varphi(x,y)$

$\forall n \in \mathbb{N}$ $\varphi(nx,y) = n\varphi(x,y)$ $\quad \varphi\left(\frac{p}{p}x,y\right) = p\,\varphi\left(\frac{x}{p},y\right)$

$\frac{1}{p}\varphi(x,y) = \varphi\left(\frac{x}{p},y\right)$ donc $\varphi\left(\frac{p}{q}x,y\right) = \frac{p}{q}\varphi(x,y)$

$\forall r \in \mathbb{Q}$ $\varphi(rx,y) = r\varphi(x,y)$

$h : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$

$t \longmapsto \frac{1}{t}\varphi(tx,y) = \frac{1}{4t}(\|tx+y\|^2 - \|tx-y\|^2)$

h continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ et cte sur $\mathbb{Q}^{+*}$ (dense de $\mathbb{R}^{+*}$) donc h est cte égale à $\varphi(x,y)$ $\quad \forall t \in \mathbb{R}^*$ $\varphi(tx+y) = t\varphi(x,y)$ $\quad$ clc : φ FBS sur E

* $\forall x \in E$ $\varphi(x,x) = \frac{1}{4}\|2x\|^2 - \|x\|^2 \geq 0$

$\|x\|^2 = \sqrt{\varphi(x,x)}$ $\quad \varphi(x,x) = 0 \Rightarrow x = 0_E$

* $\forall (x,y) \in E^2$ $\quad 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \leq \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2$

$\frac{1}{2}(\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2) \leq \|u\|^2 + \|v\|^2$

2_ Procédé d'orthonormalisation de Schmidt :

$\forall$ suite libre $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ $\exists!$ suite orthonormale $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tq

$\forall n \in \mathbb{N}$ $\begin{cases} \text{vect}\{x_0 \dots x_n\} = \text{vect}\{e_0, \dots e_n\} \\ \langle e_n, x_n \rangle > 0 \end{cases}$

Unicité : Supp l'$\exists$ de 2 suites orthonormale $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad$ vect $(\{x_0, \dots x_n\}) = $ vect$\{e_0, \dots e_n\} = $ vect$\{f_0, \dots f_n\}$

$\langle x_n, e_n \rangle > 0$ et $\langle x_n, f_n \rangle > 0$

vect$(e_0) = $ vect$\{f_0\} \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}$: $\quad f_0 = \lambda e_0$ $\quad$ or $\|f_0\| = 1 = |\lambda| \underbrace{\|e_0\|}_{=1} \Rightarrow |\lambda| = 1 \Rightarrow \lambda \in \{-1,1\}$

or $\underbrace{\langle x_0, f_0 \rangle}_{>0} = \lambda \underbrace{\langle x_0, e_0 \rangle}_{>0}$ $\quad$ donc $\boxed{\lambda = 1}$

• P(0) vraie • Supp P(0) ... P(k) vraies pour k fixé ds $\mathbb{N}$

• $f_{k+1} \in$ vect$(\{e_0, \dots e_{k+1}\})$ $\quad f_{k+1} = \sum_{p=0}^{k+1} \alpha_p e_p$

soit $p \in [\![0,k]\!]$ $\langle f_{k+1}, f_p \rangle = 0 \overset{HR}{=} \langle f_{k+1}, e_p \rangle = \alpha_p$ $\quad$ donc $f_{k+1} = \alpha_{k+1} e_{p+1}$

on trouve $\alpha_{k+1} = 1$ $\quad$ donc $\quad$ CQFD

Existence : $\quad$ Posons $\quad e_0 = \frac{x_0}{\|x_0\|}$ $\quad \forall k \in \mathbb{N}^*$ $e_k = \dfrac{x_k - \sum_{p=0}^{k-1} \langle e_p, x_k \rangle . e_p}{\|x_k - \sum_{p=0}^{k-1} \langle e_p, x_k \rangle . e_p\|}$

• $P(k)$: " $e_0, \dots e_k$ bien définies

$(e_0, \dots e_k)$ f. orthonormale

vect $(\{x_0, \dots x_k\}) = $ vect $(\{e_0, \dots, e_k\})$ "

$\rightarrow \|e_0\| = 1$ $\quad$ et vect$\{x_0\} = $ vect$\{e_0\}$ $\quad$ P(0) est vraie

$\rightarrow$ Supp P(k) vraie pour $k \in \mathbb{N}$

$x_{k+1} \notin$ vect$(\{x_0, \dots, x_k\})$ $x_{k+1} \notin$ vect$(\{e_0, \dots e_k\})$ $e_{k+1} = \dfrac{x_{k+1} - \sum_{p=0}^{k} \langle e_p, x_{k+1} \rangle . e_p}{\| \dots \|}$ bien définie

donc vect$(\{x_0, \dots x_k, x_{k+1}\}) = $ vect$(\{e_0, \dots e_{k+1}\})$

$x_{k+1} = \lambda e_{k+1} + \underbrace{u}_{\in \text{vect}\{e_0, \dots e_k\}}$

$p' \in [\![0,k]\!]$ $\quad \langle e_{p'}, e_{k+1} \rangle = \dfrac{\langle e_{p'}, x_{k+1} \rangle - \langle e_{p'}, x_{k+1} \rangle}{\| \dots \|} = 0$

donc $(e_0, \dots e_{k+1})$ orthonormale $\quad$ car $\|e_{k+1}\| = 1$

Pour $n \in$ $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existe $k \geq 1$ $\langle x_k, e_k \rangle = \langle \lambda e_{k+1} + u, e_k \rangle = \overset{>0}{\lambda} \|e_k\| > 0$

$\langle x_0, e_0 \rangle = \langle x_0, \frac{x_0}{\|x_0\|} \rangle = \|x_0\| > 0$

3/ Caract. projecteurs orthogonaux : p proj. $\perp \iff \forall x \in E \; \|p(x)\| \leq \|x\|$

$\Rightarrow$ $x = \underbrace{x - p_F(x)}_{\in F^\perp} + \underbrace{p_F(x)}_{\in F}$ donc $\|x\|^2 = \|x - p_F(x)\| + \|p_F(x)\|$ (1)

$\forall x \in E \quad \|p(x)\| \leq \|x\|$

$\Leftarrow$ Supp p projecteur $\forall x \in E \; \|p(x)\| \leq \|x\|$ soit $x \in \ker p$ et $y \in Im(p)$

$\forall t \in \mathbb{R} \; \|p(tx+y)\| \leq \|tx+y\|$ $\quad \forall t \in \mathbb{R} \quad 0 \leq t^2 \|x\|^2 + t\langle x+y \rangle$

$tp(x)+p(y) = p(y) = y$

$\forall t>0 \quad 0 \leq t\|x\| + \langle x+y \rangle$
$\forall t<0 \quad 0 \geq t\|x\| + \langle x,y \rangle$
$t \to 0^+$, $t \to 0^-$: $0 \leq \langle x,y \rangle$, $0 \geq \langle x,y \rangle$ $\Rightarrow \langle x,y \rangle = 0$

4/ Inég. de Bessel (1) et preuve de (*)

$\to$ $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite ON totale de E $\forall x \in E$ $\sum_{n\geq 0} \langle e_n, x \rangle . e_n$ cv et $\sum_{n=0}^{+\infty} \langle e_n, x \rangle e_n = x$

$x = \lim_{N\to+\infty} \underbrace{\sum_{n=0}^{N} \langle e_n, x \rangle . e_n}_{P_{F_n}(x)}$ $\quad F_n = vect(\{e_k \mid k \in [\![0,n]\!]\})$

$(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite ONT soit $\varepsilon > 0$ $\quad$ soit $x \in E$

$\exists n_0 \in \mathbb{N}$ et $y \in F_{n_0}$ tq $\|x-y\| < \varepsilon$

$\forall n \geq n_0 \quad F_{n_0} \subset F_n$ donc $\forall n \geq n_0 \quad \|x - P_{F_n}(x)\| \leq \|x-y\| < \varepsilon$

donc $\quad P_{F_n}(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$

5/ Orthotrigonalisation des matrices carrées réelles avec blocs diagonaux de taille 1 ou de taille 2 irréductible

- Si $n=1$ ok . Supp le résultat vrai jusqu'à n (taille de matrice)

1er cas : $Sp_{\mathbb{R}}(f) \neq \emptyset$ Soit $\lambda \in Sp_{\mathbb{R}}(A)$ Soit e unitaire tq $f(e) = \lambda . e$

Complétons e en une base orthonormale $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^{n+1}$

$Mat_{\mathcal{B}}(f) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & L \\ \hline 0 & A' \end{array}\right)$ $\exists P \in O(n+1)$: $A = P \left(\begin{array}{c|c} \lambda & L \\ \hline 0 & A' \end{array}\right) P^{-1}$ d'après l'HR $A' = Q \begin{pmatrix} A_1 & \\ & \ddots \\ & & A_p \end{pmatrix} Q^{-1}$

donc $A = P \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & Q \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} \lambda & L' \\ \hline 0 & \begin{matrix} A_1 & \\ & A_p \end{matrix} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & Q^{-1} \end{array}\right) P^{-1}$ $\quad \in O(n+1)$

2nd cas : $Sp_{\mathbb{R}}(f) = \emptyset$ Soit $X^2 + aX + b$ facteur irréductible de π_A $f^2 + af + id_{\mathbb{R}^{n+1}} \notin Gl(E)$

$\exists P \in \mathbb{R}[X]$: $P(f) = 0$ et $\deg P = \deg \pi - 2$

Soit e vect unitaire tq $f^2(e) + af(e) + be = 0$ ie $f(f(e)) = -af(e) - b.e$

$F = vect(\{e, f(e)\})$ stable par f et $(e, f(e))$ libre car $Sp(f) = \emptyset$

on complète $(e, f(e))$ bon une base de $\mathbb{R}^{n+1}$ $\quad Mat_{\mathcal{B}}(f) = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & * \\ \hline 0 & A' \end{array}\right)$

$A_1 = Mat_{(e,f(e))}(f_{|F})$ $\quad \chi_{A_1} = X^2 + aX + b$

on applique HR à A'

6- Théorème de réduction d'une isométrie vectorielle :

$f \in O(E)$ $\exists \mathcal{B}$ base orthonormale de E $\quad Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} I_p & & & & 0 \\ & -I_q & & & \\ & & R(\theta_1) & & \\ 0 & & & \ddots & \\ & & & & R(\theta_r) \end{pmatrix}$

avec $p + q + 2r = n$

$(\theta_1, \dots \theta_r) \in (\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z})^r$

f laisse stable l'orthogonal de tout sev stable par f donc $\exists \mathcal{B}$ ON :

$Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_p \end{pmatrix}$ $\quad$ A_i de taille 1 ou 2 et χ_{A_i} irréductible

or ${}^tAA = I_n$

donc $\forall i \in [\![1,p]\!]$ $\quad {}^tA_iA_i = I$.

Si $A_i = (\alpha)$ alors $\alpha^2 = 1 \iff \alpha = 1$ ou $\alpha = -1$

Si A_i de taille 2 alors $\begin{cases} A_i \in O(2) \\ \chi_{A_i} \text{ irréductible} \end{cases}$ $\quad \exists \theta_i \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$: $A_i = R(\theta_i)$

7- $O(n)$ possède 2 composantes connexes par arcs

$O^+(n) = SO(n)$ et $O^-(n)$: $\quad \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ munie d'une norme

$\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ est une applic. continue

$\det(O(n)) = \{1, -1\}$ or $\{-1, 1\}$ ens. fini à 2 elmts donc

$O(n)$ n'est pas cpa $\quad$ 2q car $\det(A) = 1 = (-1)^{2q}$

* Soit $A \in SO(n)$ $\quad \exists P \in O(n)$: $\quad A = P \begin{pmatrix} I_p & & & \\ & -I_{2q} & & \\ & & R(\theta_1) & \\ & & & \ddots \\ & & & & R(\theta_r) \end{pmatrix} P^{-1}$

or $-I_{2q} = \begin{pmatrix} R(\pi) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & R(\pi) \end{pmatrix}$

on pose $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow SO(n)$ $\quad \gamma(0) = I_n$ et $\gamma(1) = A$

$t \longmapsto P \begin{pmatrix} I_p & & \\ & R(t\pi) & \\ & & \ddots \\ & & & R(t\theta_r) \end{pmatrix} {}^tP$ $\quad$ donc $SO(n)$ est cpa

* $O^-(n) \longrightarrow O^+(n)$ $\quad$ est une bijection bicontinue donc $O^-(n)$ est cpa

$A \longmapsto \begin{pmatrix} -1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & 1 \end{pmatrix} A$

* $O(n) = O^-(n) \uplus O^+(n)$ $\quad$ donc $O^-(n)$ et $O^+(n)$ sont les comp. cpa de $O(n)$

Colle n°18

1 _ Les seuls projecteurs symétriques sont les projecteurs orthogonaux
Les seuls involutions symétriques sont les symétries orthogonales

→ Soit p un projecteur symétrique
* soit $(x,y) \in \ker p \times \operatorname{im} p$
$\langle x,y\rangle = \langle x, p(y)\rangle = \langle p(x),y\rangle = \langle 0,y\rangle = 0 \Rightarrow p$ est projecteur $\perp$
* Soit p un projecteur orthogonal $p = p_F$
soit $(x,y) \in E^2$ $\langle p_F(x), y\rangle = \langle \underbrace{p_F(x)}_{\in F}, \underbrace{y - p_F(y)}_{\in F^\perp} + p_F(y)\rangle = \langle p_F(x), p_F(y)\rangle$
de m $\langle x, p_F(y)\rangle = \langle p_F(x), p_F(y)\rangle$
donc $\langle p_F(x), y\rangle = \langle x, p_F(y)\rangle$ donc p_F est symétrique
→ Soit g une involution symétrique avec $E = F \oplus G$
$g = p_{F|G} - p_{G|F}$ d'où $p_{F|G} = \frac{1}{2}(g + id_E) \in \mathcal{S}(E)$
$= p_{F|G} - (id_E - p_{F|G}) = 2p_{F|G} - id_E$
donc $G = F^\perp$ donc $g = p_F - p_{F^\perp} = s_F$
* Soit s_F une symétrie orthogonale
$s_F = p_F - p_{F^\perp} \in \mathcal{S}(E)$ car $\mathcal{S}(E)$ est un sev de $\mathcal{L}(E)$

2_ ~~Théorème spectral pour un endomorphisme symétrique~~ $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ val propres de f
$f \in \mathcal{S}(E)$ Euclidien de dim n

$$\lambda_1 = \min_{x \in E\setminus\{0\}} \frac{\langle x, f(x)\rangle}{\|x\|^2} \qquad \lambda_n = \max_{x \in E\setminus\{0\}} \frac{\langle x, f(x)\rangle}{\|x\|^2}$$

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ base orthonormale de vecteurs propres de f associée respectivement à $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$
Pour $x \in E$ on pose $x = \sum_{i=1}^n x_i \cdot e_i$
d'où $f(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \cdot e_i$ $\quad \langle x, f(x)\rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2$

$$\text{d'où} \quad \underbrace{\sum_{i=1}^n \lambda_1 x_i^2}_{= \lambda_1 \|x\|^2} \leq \langle x, f(x)\rangle \leq \sum_{i=1}^n \lambda_n x_i^2 = \lambda_n \|x\|^2$$

$$\text{D'où pour } x \neq 0_E \quad \underbrace{\lambda_1}_{= \frac{\langle e_1, f(e_1)\rangle}{\|e_1\|}} \leq \frac{\langle x, f(x)\rangle}{\|x\|^2} \leq \lambda_n = \frac{\langle e_n, f(e_n)\rangle}{\|e_n\|^2}$$

3_ Théorème de Courant_Fischer (min max) :
$f \in \mathcal{S}(E)$ $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ les val. propres de f

$$\lambda_k = \min_{\substack{L \text{ sev de } E \\ \dim L = k}} \left(\max_{x \in L\setminus\{0\}} \frac{\langle x, f(x)\rangle}{\|x\|^2} \right)$$

Soit L un sev de E de dim k

$$\sup_{x \in L\setminus\{0\}} \frac{\langle x, f(x)\rangle}{\|x\|^2} = \sup_{x \in L\setminus\{0\}} \left\langle \frac{x}{\|x\|}, f\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\rangle = \sup_{\substack{\|u\|=1 \\ u \in L}} \langle u, f(u)\rangle$$

$u \mapsto \langle u, f(u)\rangle$ continue sur le compact $S(0_E, 1) \cap L$

$$L = V_k = \operatorname{vect}\{e_1, \dots, e_k\} \qquad \max_{x \in L\setminus\{0\}} \frac{\langle x, f(x)\rangle}{\|x\|^2} = \lambda_k$$

$$\text{donc} \quad \inf_{\substack{L \text{ sev de } E \\ \dim L = k}} \max_{x \in L\setminus\{0\}} \frac{\langle x, f(x)\rangle}{\|x\|^2} \leq \lambda_k$$

Soit L sev de E de dim k $\quad L \cap V_{k-1}^\perp = L \cap \operatorname{vect}(\{e_k, \dots, e_n\}) \neq \{0\}$
car $\dim L + \dim V_{k-1}^\perp = k + n - (k-1) = n+1 > n$
$(V_0 = \{0\})$

$$\text{Soit } u \in L \cap V_{k-1}^\perp \quad \frac{\langle u, f(u)\rangle}{\|u\|^2} = \frac{\sum_{i=k}^n \lambda_i u_i^2}{\|u\|^2} \geq \lambda_k$$

soit $u \in \operatorname{vect}(\{e_k, \dots, e_n\})$

$$\text{donc} \max_{x \in L\setminus\{0\}} \frac{\langle x, f(x)\rangle}{\|x\|^2} \geq \lambda_k \text{ alors } \inf_{\substack{L \text{ sev de } E \\ \dim L = k}} \max_{x \in L\setminus\{0\}} \frac{\langle x, f(x)\rangle}{\|x\|^2} \geq \lambda_k$$

$$\text{d'où} \quad \lambda_k = \inf_{\substack{L \text{ sev de } E \\ \dim L = k}} \max_{x \in L\setminus\{0\}} \frac{\langle x, f(x)\rangle}{\|x\|^2} = \max_{x \in V_k\setminus\{0\}} \frac{\langle x, f(x)\rangle}{\|x\|^2}$$

$$= \min_{\substack{L \text{ sev de } E \\ \dim L = k}} \left(\max_{x \in L\setminus\{0\}} \frac{\langle x, f(x)\rangle}{\|x\|^2} \right)$$

4| CV des sommes de Riemann pour une f^{ct} continue par morceaux sur $[a,b]$: $f\in\mathcal{C}_{pm}([a,b],E)$ $\int_a^b f = \lim_{N\to+\infty} \frac{b-a}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f\left(a+k\cdot\frac{b-a}{N}\right)$

Soit $\varepsilon>0$ Soit $\varphi\in\mathcal{E}([a,b],E)$ tel que $\|f-\varphi\|_{\infty,[a,b]} < C\varepsilon$

$\varphi=\sum_{i=1}^{n}\varphi_i\cdot e_i$ et $\|f_i-\varphi_i\|_{\infty,[a,b]}<\varepsilon$

$$\left\|\int_a^b f - R_N(f)\right\| \leq \left\|\int_a^b f-\int_a^b\varphi\right\| + \overbrace{\left\|\int_a^b \varphi - R_N(\varphi)\right\|}^{\delta} + \|R_N(\varphi)-A_N(f)\| \qquad \sum^n \|e_i\| = C$$

- $\left\|\int_a^b f-\int_a^b\varphi\right\| = \left\|\int_a^b (f-\varphi)\right\| \leq \sum_{i=1}^{n}\int_a^b \underbrace{|f_i-\varphi_i|}_{<\varepsilon}\|e_i\| = \varepsilon(b-a)\sum_{i=1}^{n}\|e_i\|$

- $\|R_N(f)-R_N(\varphi)\| \leq \frac{b-a}{N}\sum_{i=1}^{N-1}\underbrace{\left\|(f-\varphi)\left(a+k\frac{b-a}{N}\right)\right\|}_{\leq\varepsilon} \leq \frac{b-a}{N}C\varepsilon N = (b-a)C\varepsilon$

- $a_k = a+k\cdot\frac{b-a}{N}$

en escalier

$$\delta = \left\|\sum_{k=0}^{N-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}}\varphi-\varphi(a_k)\right\| \leq \sum_{k=0}^{N-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}}\|\varphi-\varphi(a_k)\|$$

Soit $(x_0,\dots,x_M)$ une subdivision adaptée à $\varphi\in\mathcal{E}([a,b],E)$

$K=\{k\in[\![0,N-1]\!] \,/\, \exists i\in[\![1,M-1]\!] : x_i\in\,]a_k,a_{k+1}[\}$

$$\delta \leq \sum_{k\in K}\int_{a_k}^{a_{k+1}}\|\varphi-\varphi(a_k)\| \leq \sum_{k\in K}\int_{a_k}^{a_{k+1}} 2\|\varphi\|_{\infty,[a,b]} = 2\|\varphi\|_{\infty,[a,b]}\frac{b-a}{N}\overbrace{|K|}^{\leq(M-1)}$$

Soit $N_0\in\mathbb{N}^*$ tq $2\|\varphi\|_{\infty,[a,b]}\frac{b-a}{N}(M-1)\leq C\varepsilon(b-a)$

donc $\forall N\geq N_0$ $\left\|\int_a^b f - R_N(f)\right\| \leq 3C\varepsilon(b-a)$ □

5_ Si $BA=AB$ alors $\exp(A+B) = e^A\times e^B$

Soit $F:\mathbb{R}\to\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ telle que $(C)\begin{cases}\forall t\in\mathbb{R}\ F'(t)=AF(t)\\ F(0)=I_n\end{cases}$ $\mathbb{K}[A]$

Soit F une solution posons $G: t\mapsto e^{-tA}F(t)\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$

$\forall t\in\mathbb{R}$ $G'(t) = -Ae^{-tA}F(t)+e^{-tA}F'(t) = -Ae^{-tA}F(t)+e^{-tA}AF(t)=0$

donc $\forall t\in\mathbb{R}$ $G(t)=G(0)=I_n$ donc $\forall t\in\mathbb{R}$ $F(t)=e^{tA}$

donc (C) possède au plus 1 solution

or $\begin{cases}\varphi: t\mapsto e^{tA}\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathcal{M}_n(\mathbb{K})) \text{ et } \varphi'(t)=Ae^{tA}=A\varphi(t)\\ \varphi(0)=I_n\end{cases}$ donc $\begin{cases}F'=AF\\ F(0)=I_n\end{cases} \Leftrightarrow \forall t\in\mathbb{R}\ F(t)=e^{tA}$

<u>étape 2</u> : (C') : $\begin{cases}F'=(A+B)F\\ F(0)=I_n\end{cases}$ a pour unique solution $t\mapsto e^{t(A+B)}$

soit $\psi: t\mapsto e^{tA}e^{tB}$ $\forall t\in\mathbb{R}$ $\psi'(t) = Ae^{tA}e^{tB}+e^{tA}Be^{tB} \overset{A,B \text{ commutent}}{=} (A+B)e^{tA}e^{tB}$

~~donc~~ et $\psi(0)=I_n$ donc $\forall t\in\mathbb{R}$ $e^{t(A+B)} = e^{tA}\times e^{tB}$ pour $t=1$

□

2_ Théorème spectral :

Si $f\in S(E)$ alors f est diagonalisable et il existe une base orthonormale de vecteurs propres :

$\exists\mathcal{B}$ base de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix}A_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & A_p\end{pmatrix}$ où chaque A_i est de taille 1 ou 2 à χ_i irréductible

$\begin{cases}f \text{ symétrique}\\ \mathcal{B} \text{ orthonormale}\end{cases} \Rightarrow \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)\in\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \Rightarrow \forall i\in[\![1,p]\!]$ ${}^tA_i = A_i$

Si $A_i=\begin{pmatrix}a & b\\ b & c\end{pmatrix}$ $\chi_{A_i} = X^2-(a+c)X+ac-b^2$

$\Delta = (a+c)^2-4(ac-b^2) = (a-c)^2+4b^2\geq 0$

donc un bloc de taille 2 ne peut pas exister donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ diagonale et $\mathcal{B}$ orthonormale

Colle n°19

1_ Expression intégrale des solutions de $Y' = AY + B(t)$ avec A matrice constante et résolution de $Y' = AY$ lors A est diagonalisable :

$A\in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ $B\in \mathcal{C}^0(I,\mathbb{K}^n)$ On cherche $Y\in \mathcal{C}^1(I,\mathbb{K}^n)$

$Y(t)=e^{tA}X(t) \iff X(t)=e^{-tA}Y(t)$

$Y\in \mathcal{C}^1(I,\mathbb{K}^n) \iff X\in \mathcal{C}^1(I,\mathbb{K}^n)$

$$(E) \iff \begin{cases} Y(t)=e^{tA}X(t) \\ Ae^{tA}X(t)+e^{tA}X'(t)=Ae^{tA}X(t)+B(t)\end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} Y(t)=e^{tA}X(t) \\ X'(t)=e^{-tA}B(t)\in \mathcal{C}^0(I,\mathbb{K}^n)\end{cases}$$

Soit $t_0\in I$ $(E) \iff \begin{cases} Y(t)=e^{tA}X(t) \\ X(t)=\int_{t_0}^t e^{-sA}B(s)ds + \overset{\in\mathbb{K}^n}{V}\end{cases}$

$$S_{E,I} = \left\{ t\mapsto e^{tA}V + e^{tA}\int_{t_0}^t e^{-sA}B(s)ds \;/\; V\in\mathbb{K}^n \right\}$$

* A diagonalisable :

Soit $(V_1,\dots V_n)$ base de vecteurs propre de A associés à $\lambda_1 \dots \lambda_n$

on veut résoudre $\frac{dY}{dt}=AY$ $(*)$ $P = P_{(E_1,\dots E_n)}^{(V_1,\dots V_n)}$ $A = P\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_n\end{pmatrix}P^{-1}$

$$\exp(tA)=P\begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n}\end{pmatrix}P^{-1}$$

$(*) \iff \exists X\in\mathbb{K}^n \;\; \forall t\in\mathbb{R}\;\; Y(t)=e^{tA}X$ $\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$

$X = x_1E_1+\dots+x_nE_n = y_1V_1+\dots+y_nV_n$

$$(*) \iff Y(t) = P\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix} = P\underbrace{\begin{pmatrix}y_1e^{\lambda_1 t}\\ \vdots\\ y_ne^{\lambda_n t}\end{pmatrix}}_{\text{vecteur dont les coordonnées ds } (V_1,\dots V_n) \text{ sont } (y_1e^{\lambda_1 t},\dots, y_ne^{\lambda_n t})}$$

$$(*) \iff \exists Y\in\mathbb{K}^n : \forall t\in\mathbb{R}\;\; V(t)=y_1e^{\lambda_1 t}V_1+\dots+y_ne^{\lambda_n t}V_n$$

2_ Th de Cauchy linéaire : existence d'1 sol sur I

Existence : $\varphi_0=[y_0]$ $\forall n\in\mathbb{N}\;\forall t\in I\;\; \varphi_{n+1}(t)=y_0+\int_{t_0}^t (a(s)\circ\varphi_n(s))+b(s)\,ds$ $(*)$

$\forall n\in\mathbb{N}\;\; \varphi_n\in\mathcal{C}(I,F)$ $\sum_{n\geq0}\varphi_{n+1}-\varphi_n$

Soit S un segment $\subset I$ tq $t_0\in S$

$K=\sup_{s\in S}|||a(s)|||$ $M=\|\varphi_1-\varphi_0\|_{\infty,S}$

$\varphi_2(t)-\varphi_1(t)=\int_{t_0}^t (a(s)\circ(\varphi_1(s)-\varphi_0(s)))\,ds$ donc

$\|\varphi_2(t)-\varphi_1(t)\| \leq \left|\int_{t_0}^t \|a(s)\circ(\varphi_1(s)-\varphi_0(s))\|\,ds\right|$

$\leq \int_{t_0}^t |||a(s)|||\times\|\varphi_1(s)-\varphi_0(s)\|\,ds \leq KM|t_0-t_0|$

$P(n)$: " $\forall t\in S$ $\|\varphi_{n+1}(t)-\varphi_n(t)\|\leq M\frac{(K|t-t_0|)^n}{n!}$ "

∘ $P(0)$ ✓ ∘ Supp $P(n)$ vraie Soit $t\in S$

$\|\varphi_{n+2}(t)-\varphi_{n+1}(t)\| = \left\|\int_{t_0}^t a(s)(\varphi_{n+1}(s)-\varphi_n(s))\,ds\right\|$

$\leq K\left|\int_{t_0}^t M\frac{(K|s-t_0|)^n}{n!}ds\right|$

$\leq \frac{K^{n+1}M}{n!}\left[\frac{|s-t_0|^{n+1}}{n+1}\right]_{t_0}^t = \frac{K^{n+1}|t-t_0|^{n+1}}{(n+1)!}M$

$P(n+1)$ vraie par PRC :

$\forall n\in\mathbb{N}\;\; \|\varphi_{n+1}-\varphi_n\|_{\infty,S}\leq M.\frac{K^n\lambda(S)^n}{n!}$ or $\sum_{n\geq0}M\frac{(K\lambda(S))^n}{n!}$ CV

donc $\sum_{n\geq0}\varphi_{n+1}-\varphi_n$ CVN sur tout segment S de I

dim finie $\hookrightarrow$ $\sum_{n\geq0}\varphi_{n+1}-\varphi_n$ CVU sur tout segment S de I

$\varphi_{n+1}-\varphi_0=\sum_{k=0}^n\varphi_{k+1}-\varphi_k \implies \varphi_n$ CVU sur tout segment S vers $\varphi\in\mathcal{C}(I)$

Soit $s\in S$

$\|a(s)\circ\varphi_n(s)+b(s)-a(s)\circ\varphi(s)-b(s)\| = \|a(s)\circ(\varphi_n(s)-\varphi(s))\|\leq K\|\varphi_n-\varphi\|_{\infty,S}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$

donc $(s\mapsto a(s)\circ\varphi_n(s)+b(s))_{n\in\mathbb{N}}\xrightarrow{CVU}(s\mapsto a(s).\varphi(s)+b(s))$

Par passage à la lim ds $(*)$

$\begin{cases}\forall t\in I\;\; \varphi(t)=y_0+\int_{t_0}^t a(s)\circ\varphi(s)+b(s)\,ds \\ \varphi\in\mathcal{C}(I,F)\end{cases}$ φ est une sol du Pb de cauchy

Unicité Soit φ et ψ deux sol continues de I ds F / $\varphi(t_0)=\psi(t_0)=y_0$

$\forall t\in I\begin{cases}\varphi(t)=y_0+\int_{t_0}^t(a(s)\circ\varphi(s)+b(s))ds \\ \psi(t)=y_0+\int_{t_0}^t(a(s)\circ\psi(s)+b(s))ds\end{cases} \implies \begin{cases}(\varphi-\psi)(t_0)=0 \\ \forall t\in I\;\; (\varphi-\psi)(t)=\int_{t_0}^t a(s).(\varphi-\psi)(s)\,ds\end{cases}$

Posons $\begin{cases} f_0=\varphi-\psi \\ \forall n\in\mathbb{N}\;\; f_{n+1}: t\mapsto\int_{t_0}^t a(s)\circ f_n(s)ds\end{cases}$ $\sum_{n\geq0}f_n$ CVU sur tout segment S de I donc CVS sur I

or

donc $\forall t\in I\;\; \varphi(t)=\psi(t)$? X

3- Formule d'Abel. $y' = a(t)\cdot y \quad a : I \to \mathcal{L}(F) \in \mathcal{C}^0$

$\mathcal{B}$ une base de F $\quad \varphi_1, \dots \varphi_n$ n solutions de (H) on a

1) $\forall t \in I \quad W_{\varphi_1 \dots \varphi_n \mathcal{B}}{}'(t) = tr(a(t))\, W_{\varphi_1 \dots \varphi_n \mathcal{B}}(t)$

2) $t_0 \in I \quad \forall t \in I \quad W_{\varphi_1 \dots \varphi_n \mathcal{B}}(t) = W_{\varphi_1 \dots \varphi_n \mathcal{B}}(t_0)\, e^{\int_{t_0}^t tr(a(s))ds}$

- Si $\varphi_1 \dots \varphi_n$ liée alors $\forall t \in I$ $(\varphi_1(t), \dots \varphi_n(t))$ liée donc $\forall t \in I \; W_{\varphi_1 \dots \varphi_n \mathcal{B}}(t) = 0$ donc ✓
- Supp $(\varphi_1 \dots \varphi_n)$ base de $\mathcal{S}_{H,I}$ donc $\forall t \in I$ $B(t) = (\varphi_1(t), \dots \varphi_n(t))$ base de F

$W_{\varphi_1 \dots \varphi_n \mathcal{B}}(t) = \det_{\mathcal{B}}[\varphi_1(t) \dots \varphi_n(t)]$

$\forall t \in I \quad W_{\varphi_1 \dots \varphi_n}{}'(t) = \sum_{i=1}^n \det_{\mathcal{B}}(\varphi_1(t) \dots \varphi_i'(t) \dots \varphi_n(t)) = \det_{\mathcal{B}}(B(t)) \sum_{i=1}^n \det_{B(t)}(\varphi_1(t) \dots \varphi_i'(t) \dots \varphi_n(t))$

$\quad = \det_{\mathcal{B}}(B(t)) \sum_{i=1}^n (\varphi_1(t) \dots, a(t)\varphi_i(t), \dots \varphi_n(t))$

donc $W'(t) = W(t) \times \sum_{i=1}^n \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & & a_{1i}(t) & & 0 \\ 0 & \ddots & a_{2i}(t) & & 0 \\ & 1 & \vdots & & \\ & & a_{ii}(t) & & \\ & & \vdots & 1 & \\ 0 & & a_{ni}(t) & & 1 \end{vmatrix}}_{= a_{ii}(t)}$ $\quad$ avec $A(t) = Mat_{B(t)}(a(t)) = (a_{ij}(t))_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}$

donc $W'(t) \overset{tr(a(t))}{=} W(t)$

donc pour $t_0 \in I \quad \forall t \in I \quad W_{\varphi_1 \dots \varphi_n \mathcal{B}}(t) = W_{\varphi_1 \dots \varphi_n \mathcal{B}}(t_0)\, e^{\int_{t_0}^t tr(a(s))ds}$

4- Justification de la méthode de variations de n constantes pour

$Y' = a(t)Y + b(t)$. $(\varphi_1, \dots \varphi_n)$ base de solutions de H

$\forall t \in I$ $(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$ est une base de F

Soit $\varphi \in \mathcal{C}^1(I,F)$ $\forall t \in I \; \exists! (\lambda_1(t), \dots \lambda_n(t)) \in \mathbb{K}^n : \varphi(t) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(t)\varphi_i(t)$

$\lambda_i \in \mathcal{C}^1(I)$

$\varphi \in \mathcal{S}_{E,I} \iff \begin{cases} \varphi(t) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(t)\varphi_i(t) \\ \sum_{i=1}^n \lambda_i'(t)\varphi_i(t) + \sum_{i=1}^n \lambda_i(t)\varphi_i'(t) = a(t)\sum_{i=1}^n \varphi_i(t) + b(t) \quad (*) \end{cases}$

$(*) \iff \sum_{i=1}^n \lambda_i'(t)\varphi_i(t) = b(t) \qquad$ posons $b(t) = \sum_{i=1}^n b_i(t)\varphi_i(t)$

$(*) \iff \forall i \in [\![1,n]\!] \quad \lambda_i'(t) = b_i(t) \iff \forall i \in [\![1,n]\!] \quad \lambda_i(t) = \mu_i + \int_{t_0}^t b_i(s)ds$

donc les sol de (E) sont :

$y : t \mapsto \sum_{i=1}^n \lambda_i(t)\varphi_i(t) = \underbrace{\sum_{i=1}^n \mu_i \varphi_i(t)}_{\text{sol de } \mathcal{S}_{H,I}} + \underbrace{\sum_{i=1}^n \left(\int_{t_0}^t b_i(s)ds\right)\varphi_i(t)}_{\text{sol particulière de E}}$

continuité des φ_i :

$\varphi \in \mathcal{C}^1(I,F) \quad \varphi(t) = \sum_{i=1}^n \overset{\lambda_i(t)}{\downarrow} \varphi_i(t)$ $\qquad B(t) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$ base de F

$\mathcal{B} = (e_1 \dots e_n)$ base de F

$\varphi(t) = \sum_{i=1}^n x_i(t)\, e_i$

$t \overset{e_1}{\longmapsto} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} = P_{\mathcal{B}}^{B(t)} \begin{pmatrix} \lambda_1(t) \\ \vdots \\ \lambda_n(t) \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \lambda_1(t) \\ \vdots \\ \lambda_n(t) \end{pmatrix} = \left(P_{\mathcal{B}}^{B(t)}\right)^{-1} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$

$= \dfrac{1}{W_{\varphi_1 \dots \varphi_n B(t)}}\, {}^t com\left(P_{\mathcal{B}}^{B(t)}\right) \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$

$t \mapsto \dfrac{1}{W_{\varphi_1 \dots \varphi_n B(t)}}\, {}^t com\left(P_{\mathcal{B}}^{B(t)}\right) \in \mathcal{C}^1$

Colle n° 20

2| Dérivation d'1 intégrale à paramètre $g : x \mapsto \int_J f(x,t)\,dt$

$f : I\times J \to \mathbb{C}$, $(x,t) \mapsto f(x,t)$

1| $\forall x \in I$ $t \mapsto f(x,t)$ est continue pm ~~est~~ intégrable sur J

2| $\partial_1 f$ existe sur $I\times J$ $t \mapsto \partial_1 f(x,t) \in \mathcal{C}_{pm}(J)$

$x \mapsto \partial_1 f(x,t) \in \mathcal{C}(I)$

3| $\exists \varphi : J \to \mathbb{R}^+ \in \mathcal{C}_{pm} \cap \mathcal{L}(J)$:

$\forall (x,t) \in I\times J$ $|\partial_1 f(x,t)| \leq \varphi(t)$

donc $g : I \to \mathbb{C}$, $x \mapsto \int_J f(x,t)\,dt$ est bien définie et est de classe $\mathcal{C}^1$

$1 \Rightarrow g$ est définie sur I

Soit $x_0 \in I$ Soit $\varepsilon > 0$ $T_\varepsilon : t \mapsto \frac{f(x_0+\varepsilon,t) - f(x_0,t)}{\varepsilon}$

$(T_\varepsilon)_{\varepsilon\in\mathbb{R}^*} \in \mathcal{C}_{pm}(J,\mathbb{C})^{\mathbb{R}^*}$ $T_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{CVS} [t \mapsto \partial_1 f(x_0,t)] \in \mathcal{C}_{pm}(J)$ (2)

Soit $t \in J$

$|T_\varepsilon(t)| \leq \frac{|x_0+\varepsilon-x_0|}{|\varepsilon|} \sup_{x\in[x_0,x_0+\varepsilon]} |\partial_1 f(x,t)|$ ($x \mapsto \partial_1 f(x,t)$ est continue sur I)

d'où $|T_\varepsilon(t)| \leq \varphi_{|[x_0,x_0+t]}(t)$

or $t \mapsto \varphi_{|[x_0,x_0+\varepsilon]}(t) \in \mathcal{C}_{pm} \cap L^1$

donc d'après le th. CVD $\begin{cases} \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^* \ T_\varepsilon \in L^1(J) \\ \lim_{\varepsilon\to 0} \int_J T_\varepsilon = \int_J \partial_1 f(x,t)\,dt \end{cases}$

or $\int_J T_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}[g(x_0+\varepsilon) - g(x_0)]$ donc g est dérivable en x_0 et $g'(x_0) = \int_J \partial_1 f(x_0,t)\,dt$

$\begin{cases} \text{Pour } x \ f. \ t \mapsto \partial_1 f(x,t) \in \mathcal{C}_{pm}(J) \\ \text{Pour } t \ f \ x \mapsto \partial_1 f(x,t) \in \mathcal{C}(I) \\ \forall S \subset I \ \exists \varphi_S : I \to \mathbb{C} \in \mathcal{C}_{pm}\cap\mathcal{L} : \forall (x,t) \in S\times J \ |\partial_1 f(x,t)| \leq \varphi_S(t) \end{cases}$

D'après le th. de continuité d'1 intégrale à paramètres

g' est continue sur I

3_ Étude de Γ sur $]0,+\infty[$ $\Gamma :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$

$f :]0,+\infty[^2 \to \mathbb{R}$, $(x,t) \mapsto t^{x-1}e^{-t}$

$f, \partial_1 f, \dots \partial_1^{n-1} f$ existent sur $]0,+\infty[^2$

pour $j \in [\![0,n-1]\!]$ $\partial_1^j f :]0,+\infty[^2 \to \mathbb{R}$, $(x,t) \mapsto \ln(t)^j t^{x-1}e^{-t}$

$\forall x_0 \in]0,+\infty[$ $t \mapsto \partial_1^j f(x_0,t) \in \mathcal{C}(]0,+\infty[)$

$|\partial_1^j f(x_0,t)| = |\ln(t)|^j t^{x-1}e^{-t} \underset{0^+}{\sim} |\ln(t)|^j t^{x-1} = o_{0^+}\left(\frac{1}{t^{1-\frac{x}{2}}}\right)$

et $\int_0^1 \frac{dt}{t^{1-\frac{x}{2}}}$ est CV car $1-\frac{x}{2} < 1$ $|\partial_1^j f(x_0,t)| = o_{+\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right)$

et $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ CV donc $\partial_1^j f(x_0,\cdot) \in L^1(]0,+\infty[)$

* $\partial_1^n f$ existe sur $]0,+\infty[^2$ $\partial_1^n f : (x,t) \mapsto \ln(t)^n t^{x-1}e^{-t}$

pour $(x_0,t_0) \in]0,+\infty[^2$ $t \mapsto \partial_1^n f(x_0,t) \in \mathcal{C}(]0,+\infty[)$ $x \mapsto \partial_1^n f(x,t_0) \in \mathcal{C}(]0,+\infty[)$

* Soit $[a,b] \subset]0,+\infty[$

$\forall (t,x) \in [a,b]\times]0,1[$ $|\ln(t)|^n t^{x-1}e^{-t} \leq |\ln(t)|^n t^{a-1}e^{-t}$

$\forall (t,x) \in [a,b]\times [1,+\infty[$ $|\ln(t)|^n t^{x-1}e^{-t} \leq |\ln(t)|^n t^{b-1}e^{-t}$

$\forall (x,t) \in [a,b]\times]0,+\infty[$ $|\partial_1^n f(x,t)| \leq \underbrace{|\ln(t)|^n e^{-t}(t^{a-1}+t^{b-1})}_{\varphi}$

φ continue sur $]0,+\infty[$ positive

$\varphi(t) \underset{0^+}{\sim} |\ln(t)|^n t^{a-1} = \frac{|\ln(t)|^n}{t^{a+1}} = o_{0^+}\left(\frac{1}{t^{1-\frac{a}{2}}}\right)$ $\varphi(t) \underset{+\infty}{\sim} |\ln(t)|^n t^{b-1}e^{-t} = o_{+\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right)$

φ est intégrable donc $\Gamma \in \mathcal{C}^n(]0,+\infty[)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ donc $\Gamma \in \mathcal{C}^\infty(]0,+\infty[)$

$\to \forall n \in \mathbb{N}$ $\Gamma^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} \ln(t)^n t^{x-1}e^{-t}\,dt$ Γ est strictem' convexe

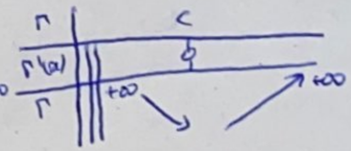
Γ' " croissante

$\begin{cases} \Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \quad x>0 \\ \Gamma(1) = 1 \end{cases}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\Gamma(n+1) = n!$

$\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1 \Rightarrow$ th. de Rolle $\exists c \in]1,2[: \Gamma'(c) = 0$

$\cdot\, x\Gamma(x) = \Gamma(x+1) \underset{0^+}{\sim} \Gamma(1) = 1 \Rightarrow \Gamma(x) \underset{0^+}{\sim} \frac{1}{x}$

$\cdot\, \Gamma \nearrow$ sur $[c,+\infty[$ $\ell = \lim_{x\to+\infty} \Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \Gamma(n+1) = +\infty$



$\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1)$ $x > 1$

$\frac{\Gamma(x)}{x} = \frac{x-1}{x}\Gamma(x-1) \underset{+\infty}{\sim} \Gamma(x-1) \xrightarrow[+\infty]{} +\infty$

↓

branche parabolique de direction asymptotique (Oy) au V de $+\infty$

4/ Dérivée selon une matrice M de $A \mapsto A^{-1}$ sur $GL_n(\mathbb{R})$:

$f : GL_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ $\quad$ $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$A \longmapsto A^{-1}$ $\quad$ muni de la norme d'algèbre $\|\cdot\|$

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ $\quad M \neq 0$

$t \mapsto f(A+t.M) = (A+tM)^{-1} \quad \forall t \in]-\varepsilon,\varepsilon[$

$f(A+tM)A = (A+tM)^{-1}A = (A^{-1}(A+tM))^{-1} = (I+tA^{-1}M)^{-1}$

$\forall t \in]-\varepsilon,\varepsilon[\quad f(A+tM) = (I+tA^{-1}M)^{-1}A^{-1}$

Pour $t \in]-\frac{1}{\|A^{-1}M\|} ; \frac{1}{\|A^{-1}M\|}[= I \quad f(A+tM) = \sum_{k=0}^{+\infty} \underbrace{(-tA^{-1}M)^k A^{-1}}_{f_k(t)}$

$\sum f_k$ CVS sur I $\quad$ chaque f_k de classe $\mathcal{C}^1$ sur I

$f_k' : t \mapsto (-1)^k k\, t^{k-1}(A^{-1}M)^k A^{-1}$

$S = [-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\|A^{-1}M\|} ; \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\|A^{-1}M\|}] \quad \forall t \in S \quad \|f_k'(t)\| \leq k \times \frac{1}{2^{k-1}} \|A^{-1}M\| \, \|A^{-1}\|$

donc $\|f_k'\|_{\infty,S} \leq \|A^{-1}M\| \times \|A^{-1}\| \; k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$ $\quad$ or $\sum_{k\geq 1} k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$ CV

donc $\sum_{k\geq 2} f_k'$ CVN donc CVU sur S (car $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dim finie)

donc $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathring{S}$

donc $t \mapsto f(A+tM)$ est dérivable en 0

$\forall t \in \mathring{S} \quad \frac{d}{dt}(f(A+tM)) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k k\, t^{k-1}(A^{-1}M)^k A^{-1}$

d'où $D_M f(A) = (-1)^1 \times 1\,(A^{-1}M)A^{-1}$ donc $D_M f(A) = -A^{-1}MA^{-1}$

5/ Différentielle en A de $A \mapsto A^{-1}$ $\quad$ Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$

$f(A+H) - f(A) = (A+H)^{-1} - A^{-1} = [A(I+A^{-1}H)^{-1}]^{-1} - A^{-1}$

$= (I+A^{-1}H)^{-1}A^{-1} - A^{-1}$

si $\|\cdot\|$ une norme d'algèbre avec $\|I\| = 1$ pour $\|A^{-1}H\| < 1$

$f(A+H) - f(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-A^{-1}H)^k A^{-1} - A^{-1} = \sum_{k=1}^{+\infty} (-A^{-1}H)^k A^{-1}$

$= -A^{-1}HA^{-1} + \sum_{k=2}^{+\infty} (-A^{-1}H)^k A^{-1}$

$H \mapsto -A^{-1}HA^{-1}$ linéaire $\quad \|\sum_{k=2}^{+\infty} (-A^{-1}H)^k A^{-1}\| \leq \sum_{k=2}^{+\infty} \|A^{-1}H\|^k \|A^{-1}\|$

$\leq \|A^{-1}\|^2 \|H\| \times \underbrace{\frac{\|A^{-1}\|\,\|H\|}{1 - \|A^{-1}\| \times \|H\|}}_{\xrightarrow[H\to 0]{} 0}$

donc $\sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k (A^{-1}H)^k A^{-1} = o(H)$

donc f est différentiable en tout pt $A \in GL_n(\mathbb{R})$

$df(A) : H \mapsto -A^{-1}HA^{-1}$

$\forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad df(A) \cdot H = -A^{-1}HA^{-1} = D_H f(A)$

1/ Th de Sturm pour $y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$

$a, b \in \mathcal{C}(I)$

1 - Si φ sol non nulle de (H) alors les zéros de φ sont isolés

2 - φ et ψ 2 sol de H non proportionnelles $\Rightarrow$ entre 2 zéros consécutifs de φ $\exists$ zéro de ψ

1 - Soit φ sol $\in \mathcal{S}_{H,I}$ avec $\varphi \neq [0]$ $\quad$ Soit $a \in Z(\varphi)$

Si $\varphi \in \mathcal{S}_{H,I}$ et $\varphi(a) = \varphi'(a) = 0$ alors $\varphi = [0]$ (unicité du Pb de Cauchy)

donc $\varphi'(a) \neq 0$ $\quad$ donc $\frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x-a} \sim \varphi'(a) \neq 0 \Rightarrow \varphi(x) \sim \varphi'(a)(x-a)$

donc $\exists$ un voisinage de a $V =]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\setminus \{a\}$ avec $\varepsilon > 0$ tq $\varphi(x) \neq 0$ pour $x \in V$

donc les zéros de φ sont isolés

Soit S un segment $\subset I$ $\quad$ Supp $S \cap Z(\varphi)$ infini

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite injective de $S \cap Z(\varphi)$ S est un compact, soit ℓ une val. d'adh. de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\begin{cases} \ell = \lim_{n\to+\infty} a_{\varphi(n)} \\ \ell \in S \end{cases}$ $\quad$ Par continuité de φ $\quad \varphi(\ell) = \lim_{n\to+\infty} \varphi(a_{\varphi(n)}) = 0$

donc $\ell \in Z(\varphi)$ et ℓ n'est pas isolé ds $Z(\varphi)$

2 - Soient φ et ψ 2 sol à val. réelles $(\varphi,\psi) \in \mathcal{S}_{H,I}^2$ tq (φ,ψ) libre

Soient $a < b$ deux zéros consécutifs de φ

Si $\psi(a) = 0$ alors $\psi'(a) \neq 0$ posons $\lambda = \frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)}$ $\quad \begin{matrix} (\varphi - \lambda\psi)(a) = 0 \\ (\varphi - \lambda\psi')(a) = 0 \end{matrix} \Rightarrow \varphi = \lambda\psi$ exclu

donc $\psi(a)\psi(b) \neq 0$

Supp $\forall x \in]a,b[\; \psi(x) \neq 0$ $\quad$ alors $\frac{\varphi}{\psi}$ est de classe $\mathcal{C}^2([a,b])$

$\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)' = \frac{\varphi'\psi - \varphi\psi'}{\psi^2} = -\frac{W_{\varphi\psi}}{\psi^2}$ $\quad$ $W_{\varphi\psi}$ est de signe ct donc $\frac{\varphi}{\psi}$ est strictement monotone

or $\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)(a) = \left(\frac{\varphi}{\psi}\right)(b) = 0$ absurde

Colle n°21 The end :)

1) $f : E \to F$ linéaire, f est différentiable en tout pt $a \in U$

$\forall a \in U \quad df(a) = f$

$f(a+h) = f(a) + f(h) = f(a) + f \circ h + \|h\| \underbrace{\varepsilon(h)}_{\to 0_F}$

donc $\forall a \in U \quad df(a) = f$

$M : E_1 \times \dots \times E_p \to F$ multilinéaire

M différentiable en tout pt $(a_1, \dots a_p) \in E_1 \times \dots \times E_p$

$\underbrace{dM(a_1 \dots a_p)}_{\in \mathcal{L}(E_1 \times \dots \times E_p, F)} \circ (h_1 + \dots h_p) = \sum_{i=1}^{p} M(a_1, \dots, h_i, \dots a_p)$

$M(a_1+h_1, \dots a_p+h_p) = M(a_1, \dots, a_p) + \sum_{i=1}^{p} M(a_1, \dots h_i, \dots a_p) + A$

où A somme des termes du type $M(x_1', \dots x_{i-1}', \dots h_i, \dots x_{j-1}', h_j, \dots x_p)$

avec $i < j \quad x_k' \in \{a_k, h_k\}$

Posons $\|(x_1, \dots x_p)\|_\infty = \max_{i \in [\![1,p]\!]} \|x_i\|_{E_i}$

$\|d\|_F \leqslant K \|h\|_\infty^2 \left(\|h\|_\infty^n \cdot \|a\|_\infty^{p-1-2}\right) \Rightarrow \|d\|_F = o(\|h\|_\infty)$

donc $A = o(\|h\|_\infty)$

$h \mapsto \sum_{i=1}^{p} M(a_1, \dots, h_i, \dots a_p)$ linéaire $\Rightarrow$ M différentiable

2) $U \xrightarrow{f} F \quad V \xrightarrow{g} G \qquad E, F, G$ 3 K-evn de dim finies
$U \subset E$, $V \subset F$ ouverts

• $f(U) \subset V$ • f différentiable en $a \in U$ • g diff. en $b = f(a) \in V$

↳ $g \circ f : U \to G$ diff en a

$\underbrace{d(g \circ f)(a)}_{\in \mathcal{L}(E,G)} = \underbrace{dg(f(a))}_{\mathcal{L}(F,G)} \circ \underbrace{df(a)}_{\in \mathcal{L}(E,F)}$

$\exists \delta_1 > 0 \quad \delta_2 > 0$ tq $\begin{cases} \varepsilon_1 : B_E(0_E, \delta_1) \subset U \to F \\ \varepsilon_2 : B_F(0_F, \delta_2) \subset V \to G \end{cases}$

$\forall h \in B_E(0_E, \delta_1) \quad f(a+h) = f(a) + df(a) \circ h + \|h\|_E \underbrace{\varepsilon_1(h)}_{\to 0_F}$

$\forall h \in B_F(0_F, \delta_2) \quad g(a+h) = g(a) + dg(a) \circ h + \|h\|_E \underbrace{\varepsilon_2(h)}_{\to 0_G}$

$h' = df(a) \circ h + \|h\|_E \varepsilon_1(h) \xrightarrow[h \to 0_E]{} 0_F$

$\exists \delta > 0 \quad \delta < \delta_1$ tq $h \in B_E(0_E, \delta) \Rightarrow h' \in B_F(0_F, \delta_2)$

Soit $h \in B_E(0_E, \delta)$

$g(f(a+h)) = g(f(a) + h') = g \circ f(a) + dg(f(a)) \circ h' + \|h'\| \varepsilon_2(h')$

$= g(f(a)) + dg(f(a)) \circ (df(a) \circ h) + \|h\| \, dg(f(a)) \varepsilon_1(h) + \|h'\| \varepsilon_2(h')$

or $\|h\| \, dg(f(a)) \varepsilon_1(h) = o(\|h\|)$

$\|h'\| \leqslant |||df(a)||| \, \|h\| + \|h\| \times \|\varepsilon_1(h)\|$ et $\varepsilon_2(h') \xrightarrow[h \to 0_E]{} 0_G$

donc $\|h'\| \varepsilon_2(h') = o(h)$

or $h \mapsto dg(f(a)) \circ (df(a) \circ h)$ est linéaire d'où CQFD

$= (dg(f(a)) \circ df(a)) \circ h$

3- Si $f : U \to F$ différentiable sur un ouvert connexe par arcs et si $df = 0$ alors f est constante.

• Soit $x \in U$ fixé ds U Soit $V = \{y \in U \mid f(y) = f(x)\} = f^{-1}(\{f(x)\})$

V est donc une partie fermée de U car f continue et $\{f(x)\}$ fermé de F

• Soit $y \in V \subset U$ alors $\exists r > 0 : B(y, r) \subset U$

Soit $x' \in B(y, r) \quad \varphi : [0,1] \to F$, $t \mapsto f(y + t(x'-y))$ bien définie car $B(y, r)$ convexe

φ dérivable sur $[0,1]$ et $\forall t \in [0,1] \quad \varphi'(t) = df(y + t(x'-y)) \cdot (x'-y) = 0$

donc $\varphi(0) = \varphi(1)$ ie $f(y) = f(x') = f(x)$ donc $B(y, r) \subset V$

donc V est une partie ouverte de U

• U est connexe par arcs donc $V = U$ donc $f = \text{cte}$.

4- Le gradient est orthogonal aux vecteurs tangents en un pt d'une ligne de niveau : $X_\lambda = \{x \in U \mid f(x) = \lambda\}$

Soit v un vecteur tangent à X_λ en x_0

Soit $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to X_\lambda$ un chemin dérivable en 0 tq $\begin{cases} \gamma(0) = x_0 \\ \gamma'(0) = v \end{cases}$

$\forall t \in]-\varepsilon, \varepsilon[\quad f(\gamma(t)) = \lambda$

$\forall t \in]-\varepsilon, \varepsilon[\quad df(\gamma(t)) \gamma'(t) = 0$ donc $df(\gamma(0)) \gamma'(0) = 0$

ie $\langle \nabla f(x_0), v \rangle = 0$

5- L'ens. des vect. tangents à $S / z = f(x, y)$ (f numérique différ. sur $\mathbb{R}^2$) est un plan vectoriel :

Soit $v(x, y, z)$ tangent à S en M_0 avec $S / f(x,y) - z = 0$

donc $v \perp \nabla g(x_0, y_0, z_0) \quad g : (x, y, z) \mapsto f(x,y) - z$

$\nabla g(M_0) = (\partial_1 f(x_0, y_0), \partial_2 f(x_0, y_0), -1)$ donc v vérifie $\partial_1 f(x_0, y_0) x + \partial_2 f(x_0, y_0) y - z = 0$

Réciproquement : Soit $v(v_1, v_2, v_3) \in$ plan $/ z = \partial_1 f(x_0, y_0) x + \partial_2 f(x_0, y_0) y$

donc $v_3 = \partial_1 f(x_0, y_0) v_1 + \partial_2 f(x_0, y_0) v_2 = \langle \nabla f(x_0, y_0), (v_1, v_2) \rangle = df(x_0, y_0) \cdot (v_1, v_2)$

U ouvert et $(x_0, y_0) \in U \quad \exists \varepsilon > 0$ tq $\forall t \in]-\varepsilon, \varepsilon[\quad (x_0, y_0) + t(v_1 + v_2) \in U$

Posons $\gamma : t \mapsto (x_0 + t v_1, y_0 + t v_2, f((x_0, y_0) + t(v_1, v_2)))$ γ est tracé sur S dérivable en 0

$\gamma(0) = (x_0, y_0, z_0) = M_0 \quad \gamma'(0) = (v_1, v_2, df(x_0, y_0) \cdot (v_1, v_2)) = v$

donc v est un vecteur tangent à S en M_0