
Sciences physiques



Le champ électromagnétique et ses sources

Opérations sur les champs vectoriels

On définit l'opérateur de dérivation spatiale nabla ∇ :

Opérateurs vectoriels :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{\text{grad}}(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$\Delta f = \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}(f)) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}(\vec{f})) = \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{f})) + \Delta \vec{f}$$

$$\text{div}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{f})) = 0 \quad \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{grad}}(\vec{f})) = \vec{0}$$

Il vérifie $df = \overrightarrow{\text{grad}}(f) \cdot d\vec{l}$.

Divergence : pour un vecteur $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ dans la base cartésienne, la divergence est le produit scalaire $\text{div}(\vec{a}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{a} = \frac{\partial a_1}{\partial x} + \frac{\partial a_2}{\partial y} + \frac{\partial a_3}{\partial z}$.

Théorème de Green-Ostrogradsky : pour une surface délimitant un volume, $\oint_{P \in (S)} \vec{a}(P) \cdot d\vec{S}^{\text{ext}}(P) = \iiint_{M \in (V)} \text{div}(\vec{a}(M)) d\tau(M)$.

En particulier, un champ à divergence nulle est à flux conservatif.

Rotationnel : pour un vecteur $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ dans la base cartésienne, le rotationnel est le produit vectoriel :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{a}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{a} = \begin{pmatrix} \frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial z} \\ \frac{\partial a_1}{\partial z} - \frac{\partial a_3}{\partial x} \\ \frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Théorème de Stokes-Ampère : pour un contour délimitant une surface, $\oint_{M \in (C)} \vec{a}(M) \cdot d\vec{l} = \iint_{P \in (S)} \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{a}) \cdot d\vec{S}(P)$.

En particulier, un champ de rotationnel nul est un champ de gradient à circulation conservative et il existe f telle que $\vec{a}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}}(f(M))$ d'où $\oint_A^B \vec{a}(M) \cdot d\vec{l} = \oint_A^B df = f(A) - f(B)$.

Postulat lié à la conservation de la charge

La charge infinitésimale au point M dans la boîte mésoscopique de volume $d\tau(M)$ est : $\delta q(M, t) = \rho(M, t) d\tau(M)$.

Elle est reliée à la densité volumique de courant \vec{j} (en A.m^{-2}) :

$$\delta q = \vec{j} \cdot d\vec{S} dt = nq\vec{v} \cdot d\vec{S} dt$$

La charge totale est $\delta Q = \left(\iint_{M \in (S)} \vec{j} \cdot d\vec{S} \right) dt$, l'intensité $I = \frac{\delta Q}{dt}$.

Pour une nappe de courant surfacique, $I = j_s \times l = j \times e \times l$.

En l'absence de source, la conservation de la charge électrique est :

$$\frac{d\rho(M, t)}{dt} + \text{div}(\vec{j}(M, t)) = 0$$

Loi d'Ohm locale : l'équation du mouvement qui traduit la conduction électrique à partir des porteurs de charges est $m \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{E} - \frac{m}{\tau} \vec{v}$, la conductivité γ du milieu est $\vec{j} = \frac{nq^2\tau}{m} \vec{E} = \gamma \vec{E}$, sa résistance est $R = \frac{l}{\gamma S}$.



Le champ électrostatique

Loi de Coulomb : une charge q placée en un point M subit la force électrostatique exercée par la charge q_0 en O vérifiant :

$$\overrightarrow{F_{O \rightarrow M}} = \frac{q q_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overrightarrow{u_{OM}}}{OM^2}$$

Le champ électrostatique est alors :

$$\overrightarrow{E_O}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0}{r^2} \overrightarrow{u_{OM}} = \frac{1}{q} \overrightarrow{F_{O \rightarrow M}}$$

Equation de Maxwell-Gauss :

$$\text{div}(\overrightarrow{E}^{stat}(M)) = \frac{\rho(M)}{\epsilon_0}$$

Equation de Maxwell-Faraday statique :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{E}^{stat}) = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{E}^{stat} = -\overrightarrow{\text{grad}}(V)$$

Une ligne de champ est toujours perpendiculaire aux équipotentielles. Un champ électrostatique ne peut pas entretenir un courant dans un circuit fermé. Les lignes de champ ne peuvent pas être fermées.

Théorème de Gauss :

$$\oiint_{P \in (S)} \overrightarrow{E}^{stat}(P) \cdot \overrightarrow{dS}^{ext}(P) = \frac{Q_{int}(S)}{\epsilon_0}$$

Principe de Curie : les symétries dans les causes doivent se retrouver dans les effets produits.

On note quelques analogies avec le champ gravifique : l'interaction similaire, l'idée de charge, le théorème de Gauss $\text{div}(\overrightarrow{G}(M)) = -4\pi G\rho$.

Le champ électrostatique doit se retrouver dans tout plan de symétrie et est normal à tout plan d'antisymétrie. On regarde ensuite les invariances par translation suivant un axe, par rotation autour d'un axe ou d'un point.

Modèle « plan infini uniformément chargé » : le champ est uniforme et vaut pour toute cote z ,

$$\overrightarrow{E}(M) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \overrightarrow{e}_z$$

ce qui engendre une discontinuité en surface qui vérifie $\overrightarrow{n}_{12} \cdot (\overrightarrow{E}_2(M_2) - \overrightarrow{E}_1(M_1)) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$.

Equation de Poisson :

$$\Delta V_{stat}(M) + \frac{\rho(M)}{\epsilon_0} = 0$$

Si on donne des conditions aux frontières, la solution de l'équation de Laplace ($\rho(M) = 0$) est unique, ce qui invite à rechercher des situations physiques équivalentes.

Il faut ici bien se souvenir pour les résolutions d'équation différentielle, de $\overrightarrow{E}_{stat} \cdot d\vec{r} = -dV_{stat}$.

Modèle « charge ponctuelle » : pour une distribution globalement chargée et fortement localisée, le champ électrostatique à la distance r vérifie l'équation :

$$\overrightarrow{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \overrightarrow{e}_r \quad V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$$

Si le champ est nul, alors il y a une singularité physique.

Une charge ponctuelle q placée en un point M où règne un potentiel $V(M)$ possède une énergie potentielle $\mathcal{E}_{pot} = qV(M)$. Un système de N

charges ponctuelles en interaction possède une énergie potentielle obtenue par principe de superposition $\mathcal{E}_{pot} = \frac{1}{2} \sum q_i V_{autres}(M_i)$.

Modèle « dipôle électrostatique » : si la distribution de charges est globalement neutre et les distances d'observations sont grandes devant les caractéristiques du système, on définit $\vec{p} = q\overline{NP}$ avec q la charge absolue en un point et NP la distance entre les barycentres de charges, alors le potentiel vérifie :

$$V(r, \theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{e}_r}{r^2}$$

Les champs sont alors anisotropes :

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p \cos \theta}{r^3} \quad E_\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \sin \theta}{r^3}$$

L'équation des lignes de champ est $r = r_0 \sin^2 \theta$ en exploitant la nullité du déterminant $\begin{vmatrix} E_r & dr \\ E_\theta & r d\theta \end{vmatrix}$, le champ étant tangent aux lignes de champ.

Si une distribution dipolaire est plongée dans un champ extérieur \vec{E} , l'action principale est un couple de moment $\vec{\Gamma} = \vec{p} \wedge \vec{E}_{ext}$ qui tend à aligner le moment dipolaire sur le champ, la résultante dynamique vaut éventuellement $\vec{R}_{ext} = \text{grad}(\vec{p} \cdot \vec{E}_{ext})$. Au centre d'un dipôle rigide (moment indépendant du champ extérieur), l'énergie potentielle associée est $\mathcal{E}_{pot} = -\vec{p} \cdot \vec{E}_{ext}$. Au centre d'un dipôle polarisable (molécule qui se déforme), on a $\vec{p} = \alpha\epsilon_0 \vec{E}$ et $\mathcal{E}_{pot} = -\frac{1}{2} \vec{p} \cdot \vec{E}_{ext}$.



Conducteurs en équilibre électrostatique : lorsqu'un conducteur est placé dans un champ extérieur \vec{E}^{ext} , les porteurs de charge sont mis en mouvement et se répartissent uniquement sur la surface. Un contre-champ \vec{E}^{CC} est engendré au sein du conducteur et il est en équilibre

électrostatique lorsque $\vec{E}^{int} = \vec{E}^{CC} + \vec{E}^{ext} = \vec{0}$. En régime établi, on a alors $\rho^{int} = 0$, $V^{int} = C^{ste}$ et le théorème de Coulomb donne

$$\vec{E}^{ext} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}$$

Lorsqu'un conducteur seul dans l'espace a un potentiel, il règne en sa surface une pression électrostatique $P_e = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}$ et un élément de surface est alors soumis à une force qui tend à le décoller $d\vec{F} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} dS \vec{n}$. Lorsqu'un conducteur seul dans l'espace est porté au potentiel V , il acquiert une charge $Q = CV$ répartie sur la surface, avec C sa capacité. Deux conducteurs sont en influence totale si les lignes de champ issues de l'un aboutissent toutes sur l'autre, l'influence modifie la manière dont est répartie la charge en surface mais la charge totale portée par un conducteur n'est pas modifiée par influence.



Modèle du condensateur : la charge totale portée par une armature vérifie $Q_1 = C(V_1 - V_2)$. Entre les deux armatures du condensateur existe le champ $\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_z$ alors qu'il est nul à l'extérieur. La capacité d'un condensateur plan dépend de paramètres géométriques selon

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{d}$$

Modèle du fil infini : pour un fil infini de densité linéique de courant λ , à proximité du fil, le potentiel et le champ vérifient



$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{e}_r \quad V(r) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln(r)$$

Et pour deux fils infinis très proches avec des charges linéiques opposées,

$$V(r) = -\frac{\lambda a}{2\pi\epsilon_0 r} \cos(\theta)$$

Le champ magnétostatique

Equation de Maxwell-Ampère statique :

$$\text{rot}(\vec{B}^{stat}(M)) = \mu_0 \vec{j}(M)$$

Equation de Maxwell à flux :

$$\text{div}(\vec{B}^{stat}(M)) = 0$$

Théorème d'Ampère : la circulation du champ magnétostatique sur un contour fermé est proportionnelle à l'intensité totale algébrique enlacée par ce contour,

$$\oint_{M \in (C)} \vec{B}(M) \cdot d\vec{l}(M) = \mu_0 I_{int}$$

Le champ magnétique appartient à tout plan d'antisymétrie et est normal à tout plan de symétrie de la distribution de courant.

Modèle « fil infini » : si la courbure est très faible, alors le champ créé à son voisinage ne dépend que de la distance au fil et

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta$$

Une nappe de courant surfacique est la source d'une discontinuité de la composante tangentielle : $\vec{n}_{12} \wedge (\vec{B}_2(M_2) - \vec{B}_1(M_1)) = \mu_0 \vec{j}_s(M)$.

Modèle « spire » : le champ magnétostatique sur l'axe d'une spire est axial et s'écrit à l'aide de la loi de Biot et Savart ($d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I d\vec{l} \wedge \vec{u}_{PM}}{4\pi (PM)^2}$) :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2R} (\sin \theta)^3 \vec{e}_z$$

Modèle « solénoïde infini » : un solénoïde infini engendre un champ uniforme à l'intérieur égal à

$$\vec{B}(M) = \mu_0 n I \vec{e}_z$$

et nul à l'extérieur.

Le solénoïde est un équivalent du condensateur pour le champ magnétostatique.

Modèle « dipôle magnétostatique » : on définit le moment magnétique d'une distribution de courant comme le vecteur $\vec{M} = \frac{1}{2} \oint \vec{r} \wedge I d\vec{r}$ (il vaut alors $\vec{M} = I \vec{S}$ pour une spire).

Si une distribution dipolaire est plongée dans un champ extérieur \vec{B} , l'action principale est un couple de moment $\vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B}_{ext}$ qui tend à aligner le moment dipolaire sur le champ. Si le champ n'est pas uniforme, le dipôle est soumis à une résultante dynamique qui tend à le translater. Au centre d'un dipôle rigide, l'énergie potentielle d'interaction dipôle/champ associée est $\mathcal{E}_{pot} = -\vec{M} \cdot \vec{B}_{ext}$.

Le champ électromagnétique est alors donné par la formule :

$$B_r = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\mathcal{M} \cos \theta}{r^3} \quad B_\theta = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathcal{M} \sin \theta}{r^3}$$

Atome de Bohr et précession de Larmor : l'électron en orbite autour du proton O est équivalent à une boucle de courant qui transporte une intensité $i = \frac{-ev}{2\pi r}$, son moment magnétique est $\vec{M} = -\frac{e}{2} r v \vec{n} = -\frac{e}{2m} \vec{\sigma}$ et son énergie reçue à partir du champ magnétique s'écrit $E_{pot} = \frac{e}{2m} \sigma B_{ext}$: l'électron reçoit une énergie proportionnelle à la valeur du champ. De plus, le vecteur $\vec{\sigma}$ et le vecteur \vec{M} tournent à une vitesse constante autour de \vec{B}_{ext} et la projection $\vec{\sigma}$ dans la direction de \vec{B}_{ext} est constante.

Equations de Maxwell

Le champ électromagnétique $(\vec{E}(M, t), \vec{B}(M, t))$ vérifie les équations de Maxwell, en forme locale et en forme intégrale, postulat de base. Linéaires, elles obéissent au principe de superposition.

Maxwell-Gauss et Maxwell-Ampère relient le champ à ses sources, Maxwell à flux et Maxwell-Faraday sont des équations de couplage.

$$(MG) \quad \text{div}(\vec{E}(M, t)) = \frac{\rho(M, t)}{\epsilon_0}$$

$$(M\phi) \quad \text{div}(\vec{B}(M, t)) = 0$$

$$(MF) \quad \text{rot}(\vec{E}(M, t)) = -\frac{\partial \vec{B}(M, t)}{\partial t}$$

$$(MA) \quad \text{rot}(\vec{B}(M, t)) = \mu_0 \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}(M, t)}{\partial t} \right)$$

Loi de Faraday-Lenz : d'essence expérimentale, elle lie le flux magnétique à la force électromotrice selon

$$e = \int_{M \in (C)} \vec{E}(M, t) \cdot \overrightarrow{dl}(M) = -\frac{d}{dt} \left(\iint_{P \in (S)} \vec{B}(M, t) \cdot \overrightarrow{dS}(P) \right) = -\frac{d\Phi}{dt}$$



Dans le cas d'une modélisation surfacique, les équations de Maxwell se réécrivent (les densités volumiques de charge sont infinies) :

$$\vec{E}_2(M_2) - \vec{E}_1(M_1) = \frac{\sigma(M, t)}{\epsilon_0} \vec{n}_{12}$$

$$\vec{B}_2(M_2) - \vec{B}_1(M_1) = \mu_0 \vec{j}_s(M, t) \wedge \vec{n}_{12}$$

La composante tangentielle du champ électrique est continue en M alors que sa composante normale est discontinue. La composante normale du champ magnétique est continue en M alors que sa composante tangentielle est discontinue. Les potentiels sont eux, toujours continus.

Le potentiel vecteur \vec{A} est associé au champ magnétique grâce à Maxwell-flux comme $\vec{B} = \text{rot}(\vec{A})$. Il est relié au potentiel électrique :

$$\vec{E}(M) + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \overrightarrow{\text{grad}}(V(M)) = 0$$



Aspects énergétiques

La puissance cédée par le champ électromagnétique à des porteurs de charge est $\delta P^{éch} = \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau$.

Vecteur de Poynting : densité surfacique de puissance électromagnétique

$$\vec{\Pi}(M, t) = \vec{E} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu_0} \quad \langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \Re(\underline{\vec{E}} \wedge \underline{\vec{B}}^*)$$

Equation de Poynting : les bilans locaux énergétique sont

$$\frac{\partial u_{em}}{\partial t} + \text{div}(\vec{\Pi}(M, t)) = -\vec{j} \cdot \vec{E}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \frac{1}{\mu_0} B^2 + \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \right) + \text{div} \left(\vec{E} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu_0} \right) = -\vec{j} \cdot \vec{E}$$

qui, sous forme intégrale avec $U_{em}(t) = \iiint_{M \in (V)} u_{em}(M, t) d\tau(M)$,

$$\frac{\partial U_{em}}{\partial t} + \iint_{M \in (S)} \vec{\Pi}(M, t) \cdot \overrightarrow{dS}(M) = -P^{cédé \text{ porteurs}}$$

Ordres de grandeur

La norme du champ électrique créé par le noyau d'un atome d'hydrogène au niveau d'un électron est 10^{11} N.C^{-1} . L'énergie d'ionisation de l'hydrogène est 13,6 eV. La taille d'un atome est 10^{-10} m . Le moment dipolaire d'une molécule d'eau est 1,85 D. La distance Terre-Lune est 3.10^5 km , Terre-Soleil est 150.10^6 km . La conductivité de l'argent est $6,21.10^7 \text{ S.m}^{-1}$. La capacité d'un condensateur est d'environ 20.10^{-6} F .

$$e = 1,602.10^{-19} \text{ C}.$$

$$\epsilon_0 = 8,8.10^{-12} \text{ F.m}^{-1} \text{ et } \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9.10^9 \text{ N.m}^2.\text{C}^{-2}.$$

$$G = 6,67.10^{-11} \text{ N.m}^2.\text{kg}^{-2}.$$

$$\mu_0 = 1,25.10^{-6} \text{ H.m}^{-1}.$$

Intensités : 10 mA (pour une DEL), 100 mA (électrocution), 1 A (ampoule à incandescence), 1 kA (moteur de locomotive), 100 kA (foudre). *Tensions* : 10 V (piles du commerce), 220 V (distribution EDF), 25 kV (tension d'alimentation du TGV), 200 kV (ligne à haute tension), 100 000 V (foudre). *Champ électrostatique* : 100 C (atmosphère), 15 kC (orage). *Champ électromagnétique* : 10^{-15} T (cerveau humain), 10^{-5} T (Terre), 1 T (aimant permanent), 10^{11} (étoile à neutrons). *Puissance électrique* : 10 W (lampe), 200 W (téléviseur), 1 MW (éolienne), 1 GW (centrale nucléaire).

Astuces et méthodes

Avant de se lancer dans le calcul, **analyser qualitativement** la situation et se demander comment bougent les charges, comment se transforme le champ *a priori*. Se demander s'il n'y a pas un invariant dans le champ.

Toujours commencer par étudier les **symétries et les invariances** pour se ramener à un cas simple, puis utiliser le théorème de Gauss en choisissant des surfaces colinéaires au champ.

Utiliser le **principe de superposition** pour simplifier les situations.

Si on parle de potentiel, trouver les **conditions aux frontières** et passer de l'équation de Poisson à l'équation de Laplace et chercher un équivalent simple parmi les modèles de la charge ponctuelle, du dipôle, du plan infini chargé ou du condensateur en utilisant l'unicité de la solution au problème de Laplace. Penser à la linéarité de l'équation de Laplace et à injecter des solutions éventuellement connues.

Généralement, pour étudier un potentiel à proximité d'un point, trois méthodes existent : utiliser un **développement limité** pour deviner la forme générale et le réduire à l'aide des symétries et de l'équation de Poisson, utiliser le principe de superposition en utilisant $V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r}$, utiliser le théorème de Gauss sur un cylindre pour **lier les champs** selon différentes composantes si l'un est facile à calculer.

La résolution d'équation différentielle peut être simplifiée par **séparation des variables** en remarquant que $\Delta V = -\frac{dE}{dx} = -\frac{dE}{dV} \frac{dV}{dx} = -E \frac{dE}{dV} \times \frac{1}{dV}$.

Attention, beaucoup de concepts en magnétostatique sont les opposés des mêmes concepts en électrostatique. Distinguer distribution de charge et de courant lors de l'étude des symétries.

Lorsque le temps se mêle à l'espace on utilise **l'exponentielle complexe**.

En cas harmonique, on a toujours $\frac{\partial \underline{G}(x,y,z,t)}{\partial t} = j\omega \underline{G}(x,y,z)e^{j\omega t}$.

Une charge uniformément répartie implique une relation du type $Q = \rho V$ qui peut ensuite être utilisée facilement.

En cas d'oubli, $\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$ pour retrouver l'une des trois valeurs.

Exercices de référence

Coalescence des gouttes : Soit un conducteur sphérique placé dans un champ uniforme \vec{E}^{ext} . On cherche en tout point de l'espace le potentiel et le champ.

La densité volumique de charge est nulle à l'intérieur de la sphère et le champ est radial (conducteur). On interprète ce conducteur placé dans un champ comme deux sphères quasiment totalement imbriquées : l'une chargée positivement, l'autre chargée négativement. Le calcul de la densité surfacique de charge devient possible en considérant un élément de volume : $\sigma(\theta) = 2ap \cos(\theta)$. Dès lors, on peut considérer que c'est en fait un dipôle électrostatique dont on connaît le champ électrostatique d'après le cours. On

calcule alors le champ en tout point : d'où il vient
$$\begin{cases} E_r = E^{ext} \cos \theta + \frac{2p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \\ E_\theta = E^{ext} \sin \theta + \frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \end{cases}$$

D'après l'équation de Laplace (potentiel spatial nul), ces deux systèmes vérifiant les mêmes conditions aux frontières. On en déduit le moment dipolaire de cette sphère : $p = 4\pi\epsilon_0 R^3 E^{ext}$. Si on considérait deux gouttes, on considérerait l'énergie potentielle électrostatique engendrée.

Energie de l'électron : On souhaite déterminer l'énergie d'un électron.

On imagine que l'électron est comme un oignon qui a été construit depuis l'infini en apportant de fines lamelles concentriques. On apporte la charge $dq = 4\pi r^2 \rho dr$: la sphère électron passe du potentiel nul au potentiel à la distance r d'où $V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\frac{4}{3}\pi r^3 \rho}{r} = \frac{\rho r^2}{3\epsilon_0}$. Le travail élémentaire à fournir pour cela est donc $-\delta W_{él} = dq(V(r) - V(\infty)) = \frac{4\pi\rho^2}{3\epsilon_0} r^4 dr$. On en déduit finalement $E_{él} = \int_0^R -\delta W_{él} = \frac{4\pi\rho^2}{15\epsilon_0} r^5 = \frac{3e^2}{20\pi\epsilon_0 R}$. On peut comparer à $E_{él} = mc^2$.

Condensateur sphérique : On cherche la capacité d'un condensateur dont les armatures sont deux sphères de rayon R_1 et R_2 .

D'après la symétrie sphérique du problème, le champ ne dépend que de la distance r au centre des deux sphères. Le théorème de Gauss fournit alors $E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$. La différence de potentiel inter-armature quant à elle vérifie $U = V_1 - V_2 = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E}(M) \cdot \vec{dl} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$ donc la capacité est $\frac{4\pi\epsilon_0}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}}$ qui tend vers $\frac{\epsilon_0 S_1}{R_2 - R_1}$ comme pour un condensateur plan.

Disque conducteur : Un disque conducteur de rayon a , seul dans l'espace, porte sur chacune de ses faces la densité surfacique de charge $\sigma(r) = \frac{\gamma}{\sqrt{a^2 - r^2}}$. On cherche la charge totale, le potentiel et la capacité.

La charge totale portée par le disque est $Q = 2 \int_0^a \sigma(r) 2\pi r dr = 4\pi\gamma a$ en prenant l'élément de surface élémentaire $dS = 2\pi r dr$. Le potentiel U du disque est alors uniforme, il est donc égal à la somme des potentiels élémentaires formés par tous les autres points, on le calcule en O par exemple : $U = 2 \int_0^a \frac{\delta q}{4\pi\epsilon_0 r} = 2 \int_0^a \frac{\sigma(r) 2\pi r dr}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{\pi\gamma}{2\epsilon_0}$ après un changement de variable faisant intervenir arcsinus. Il vient enfin $C = \frac{Q}{U} = 8a\epsilon_0$.

Loi de Child-Langmuir : Une diode, traversée par I , est constituée de deux plaques planes de même aire S séparées de a , la cathode émet des électrons avec une vitesse négligeable. A l'abscisse x , leur potentiel est $V(x)$ et leur vitesse $c(x)$. On cherche la caractéristique.

D'après le théorème de l'énergie mécanique, $\frac{1}{2}mc(x)^2 - 0 = W_{él} = \int -e\vec{E} \cdot \vec{dx}$ d'où $c(x) = \sqrt{\frac{2e}{m} V(x)}$. On utilise Poisson en sachant que $\rho c(x) = -IS$ d'où $\frac{d^2V}{dx^2} - \frac{I}{\epsilon_0 S \sqrt{\frac{2e}{m} V(x)}} = 0$. Puis il vient $\frac{dE}{dV} E = \frac{I\alpha}{\sqrt{V}}$ d'où $\frac{1}{2}E^2 = 2I\alpha\sqrt{V}$ puis $E = \sqrt{I}\beta V^{\frac{1}{4}}$. Ensuite $-\frac{dV}{dx} = \sqrt{I}\beta V^{\frac{1}{4}}$ d'où $I = \kappa U^{\frac{3}{2}}$.

Analyse spectrale – Electronique

Analyse de Fourier d'un signal périodique

Le domaine temporel, ou espace direct, permet d'avoir des informations de temps et de phase sur un signal tandis que le domaine des fréquences, ou espace réciproque, renseigne sur ses composantes harmoniques qui n'apparaissent pas à l'oscilloscope.

Théorème de Fourier : tout signal périodique de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$ continu et dérivable est une somme d'une infinité de signaux harmoniques,

$$s(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega t) + B_n \sin(n\omega t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$$

Avec $A_n = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \cos(n\omega t) dt$ et $B_n = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \sin(n\omega t) dt$, ou $C_n^2 = A_n^2 + B_n^2$ et $\tan(\varphi_n) = -\frac{B_n}{A_n}$. La valeur moyenne est $\frac{A_0}{2}$.

Le spectre de Fourier en amplitude représente pour chaque harmonique (multiple du fondamental) l'amplitude associée. Plus le rang de l'harmonique est important, plus son amplitude C_n associée décroît. Plus les variations d'un signal sont rapides, plus le spectre est riche en harmoniques de rang élevé. L'énergie transportée par un signal est répartie entre toutes ses harmoniques.



Pour des fonctions non périodiques, on peut avoir recours à la transformée de Fourier : $s^*(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-\omega t} dt$.

La série de Fourier d'une fonction impaire est $s(t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(n\omega t)$. Celle d'une fonction paire est $s(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega t)$.

Egalité de Parseval : la valeur efficace d'un signal vérifie

$$S_{RMS}^2 = \langle s^2 \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T s^2(t) dt = C_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{C_n}{\sqrt{2}} \right)^2$$

Valeur moyenne harmonique : pour un signal sinusoïdal, $S_{RMS} = \frac{S_{max}}{\sqrt{2}}$.

Signal créneau : impair, $s(t) = \frac{4S_{max}}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin((2n+1)\omega t)$.

Signal à impulsions rectangulaires : de rapport cyclique $\alpha = \frac{\tau}{T}$, pair, $s(t) = \frac{2S_{max}}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\alpha)}{n} \cos(n\omega t)$.

Signal triangulaire : pair, $s(t) = \frac{8S_{max}}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos((2n+1)\omega t)$.

Signal dent de scie : impair, $s(t) = \frac{2S_{max}}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin(n\omega t)$.

Signal redressé mono-alternance : le signal redressé mono alternance, réalisé avec une diode par exemple, possède une composante continue alors que le signal harmonique de départ n'en possédait pas.



Synthèse d'un signal périodique

Lorsqu'un signal périodique ne présente que des discontinuités de pente, l'amplitude des harmoniques du spectre décroît très rapidement (en $\frac{1}{n^2}$). La somme des premiers harmoniques est alors suffisante pour le recréer.

Lorsqu'il présente des discontinuités de valeurs, l'amplitude des harmoniques du spectre décroît assez lentement (en $\frac{1}{n}$). Il faut tenir compte d'un grand nombre d'harmoniques pour le synthétiser : pour transmettre un tel signal à travers un système, celui-ci doit donc avoir une bande passante suffisamment large.

Acquisition et échantillonnage

Echantillonner un signal $s(t)$ analogue quelconque, pas toujours périodique consiste à prélever à intervalles réguliers (fréquence d'échantillonnage f_E) certaines valeurs en multipliant le signal considéré par un « peigne » $P(t) = P_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \cos(2\pi n f_e t)$.

Toute périodicité dans le domaine temporel se traduit par une discrétisation dans le domaine spectral et réciproquement. On peut extraire l'information utile à l'aide d'un filtrage passe-bas (pour obtenir la composante harmonique ou anticiper un repliement de spectre).

Théorème de Shannon-Nyquist : pour effectuer un échantillonnage correct d'un signal dont le spectre s'étend de 0 à f_{max} , il faut respecter pour éviter les phénomènes de repliement de spectre :

$$f_E \geq 2f_{max}$$



Théorème de Millman : loi des nœuds en potentiel, avec les impédances

$$V \times \sum \frac{1}{Z_k} = \sum \frac{V_k}{Z_k}$$

Les convertisseurs analogique-numériques et numérique-analogiques courant-tension sont supposés idéaux : l'impédance de sortie est infinie ce qui annule l'intensité en sortie. Ses principaux paramètres sont la fréquence d'échantillonnage et sa résolution (nombre de bits utilisés).

Filtrage linéaire

Le filtrage est linéaire si en entrées et en sorties, on retrouve strictement les mêmes composantes du spectre (éventuellement d'amplitude et de phases modifiée). Il peut également faire apparaître un déphasage. Si $\underline{H} = \frac{S}{E}$ est sa fonction de transfert, alors le gain en décibel est donné par $G_{dB}(\omega) = 20 \log|\underline{H}|$ et la phase par $\varphi(\omega) = \arg \underline{H}$.

Filtre passe-bas du premier ordre : $\underline{H}(\omega) = \frac{H_0}{1+i\frac{\omega}{\omega_c}}$

Réalisable avec un montage RC, se comporte comme un intégrateur pour les hautes fréquences ($\underline{H}(\omega) \sim \frac{H_0 \omega_c}{i\omega}$). Il peut agir comme un moyenneur.

Filtre passe-haut du premier ordre : $\underline{H}(\omega) = \frac{H_0}{1-i\frac{\omega_c}{\omega}}$

Réalisable avec un montage CR, se comporte comme un dérivateur pour les hautes fréquences ($\underline{H}(\omega) \sim \frac{iH_0\omega}{\omega_c}$).

Filtre passe-bas du second ordre : $\underline{H}(\omega) = \frac{H_0}{1+i\frac{\omega}{Q\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$

Réalisable avec un montage RLC, présente une résonance si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Filtre passe-bande : $\underline{H}(\omega) = \frac{H_0}{1+iQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}$

Réalisable avec un montage LRC, la bande passante à -3 dB vérifie $\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$ (depuis $G(\omega) = \frac{H_0}{\sqrt{2}}$).

Travaux pratiques : les résistances sont de l'ordre de 1 kΩ, les condensateurs ont une capacité de 0,1 μF et les bobines une inductance de 10 mH. Un oscilloscope a une résistance d'entrée de 1 MΩ.

Ondes électromagnétiques et propagation

Onde à une dimension

Modèle de l'oscillateur harmonique libre : $X(t)$ décrit un phénomène d'oscillations harmoniques à la pulsation ω s'il vérifie

$$\ddot{X} + \omega^2 X = 0 \text{ (dynamique) ou } \dot{X}^2 + \omega^2 X^2 = C^{ste} \text{ (énergétique)}$$

On a alors $X(t) = X_0 \cos(\omega t + \varphi)$ et le portrait de phase permet de voir une ellipse d'après $\left(\frac{X(t)}{X_0}\right)^2 + \left(\frac{\dot{X}(t)}{\omega X_0}\right)^2 = 1$.

Modèle de l'oscillateur harmonique forcé : en imposant un frottement visqueux et une contrainte sinusoïdale, la fréquence de résonance (amplitude maximale de la réponse) en régime harmonique forcé coïncide avec la fréquence propre en régime libre.

Un mode propre de vibration d'un système est un mouvement collectif pour lequel tous les points du système oscillent de façon harmonique à la même pulsation propre.



Loi phénoménologique de Hooke : un échantillon solide cylindrique soumis à une contrainte normale se déforme selon

$$\frac{F}{S} = E \frac{\Delta l}{l}$$

Où E est le module d'Young (plus grand lorsque le solide est rigide).



Modèle du cristal primaire : un cristal est caractérisé par la distance a entre deux atomes et la raideur k qui traduit la liaison interatomique. Son module d'Young est alors $E = \frac{k}{a}$.

Dans l'approximation des milieux continus, on considère un couplage de ressorts, ξ_p la position instantanée d'éléments de masse dont une distance caractéristique de variation est λ . Le mouvement du point p vérifie $\frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial t^2} - \frac{ka^2}{m} \frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial x^2} = 0$. En posant $c^2 = \frac{ka^2}{m}$, la masse volumique vérifie alors $c = \sqrt{\frac{E}{\mu}}$.

Equation de D'Alembert : La fonction $\psi(x, t)$ qui à un instant t décrit l'état en un point d'abscisse x d'une perturbation qui se propage à la célérité c est solution de l'équation :

$$\frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial t^2} = 0$$

Une corde soumise à une perturbation est caractérisée par une tension horizontale T_0 uniforme et une masse linéique μ_0 . On étudie son mouvement transverse y . Pour un câble coaxial, association en série de cellules comportant un condensateur de capacité linéique Γ et une bobine d'inductance linéique Λ , l'intensité et la tension vérifient l'équation.



Réticence	μ_0	Λ	Puissance	Tv	ui
Vitesse	$\frac{\partial y}{\partial t}$	i	Célérité	$\sqrt{\frac{T_0}{\mu_0}}$	$\frac{1}{\sqrt{\Lambda\Gamma}}$
Tension	$-T_0 \frac{\partial y}{\partial x}$	u	Impédance	$\frac{T}{v} = \sqrt{T_0 \mu_0}$	$\frac{u}{i}$

Entre deux milieux, dans une corde peut se produire une adaptation d'impédance. On définit les coefficients de réflexion et de transmission en vitesse par $r = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}$ et $t = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2}$. En puissances, $r^2 + \frac{Z_2}{Z_1} t^2 = 1$.

Ondes électromagnétiques dans le vide illimité

En un espace vide de charge, loin des sources ($\rho = 0$ et $\vec{j} = \vec{0}$), le champ suit l'équation de D'Alembert 3D (double rotationnel) :

$$\vec{\Delta}\vec{E} - \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} = \vec{\Delta}\vec{B} - \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

Onde plane progressive : La solution générale pour une OPP de l'équation de D'Alembert 1D est :

$$\psi(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct)$$

Toute fonction de la variable $u = x - ct$ (resp. $v = x + ct$) décrit une onde plane progressive qui se propage dans la direction des x croissants (resp. décroissants) à la célérité c .

Onde plane progressive harmonique : dans le cas harmonique décrit par $\psi(x, t) = A \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c}x\right)$, la pulsation spatiale de l'onde caractérise l'onde et le milieu. On définit le vecteur d'onde, colinéaire à la direction de propagation \vec{u} de l'onde :

$$\vec{k} = k\vec{u} = \frac{\omega}{c}\vec{u}$$

En un point quelconque $M(\vec{r})$ atteint par l'OPPH, l'amplitude vérifie :

$$\psi(x, t) = \psi_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$$

Les champs \vec{E} et \vec{B} sont transverses, ils n'ont pas de composante dans la direction de propagation définie par \vec{k} : $\vec{E} \cdot \vec{k} = \vec{B} \cdot \vec{k} = 0$. Dans le vide, les deux champs sont en phase et $E = cB$. Le couplage des champs :

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$$

Onde sphérique : c'est un modèle plus réaliste pour décrire la perturbation émise par une source ponctuelle : $\psi(x, t) = \frac{\psi_0}{r} f\left(t - \frac{r}{c}\right)$.

Equation de dispersion : la vitesse de phase d'une OPPH qui se propage dans le vide illimité est une constante indépendante $v_\varphi = c$ de la pulsation. L'équation de dispersion s'écrit $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$. Lorsque la relation entre k^2 et $\frac{\omega^2}{c^2}$ n'est pas linéaire, la propagation est dite dispersive.

L'expérience de la fontaine de Colladon met en évidence la propagation guidée. Dans un milieu diélectrique (les porteurs de charge sont liés), linéaire, homogène, isotrope et transparent (il y a au moins transmission partielle d'une onde incidente), les ε_0 sont remplacés par un $\varepsilon_0\varepsilon_r$ où $\sqrt{\varepsilon_r}$ est l'indice optique du milieu :

$$\vec{\Delta}(\vec{E}, \vec{B}) - \varepsilon_r\varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2(\vec{E}, \vec{B})}{\partial t^2} = \vec{0}$$

Aspects énergétiques

Le vecteur de Poynting devient (double-produit vectoriel) : $\vec{\Pi} = \varepsilon_0 c E^2 \vec{u}$. Un rayon lumineux est ainsi une ligne de champ du vecteur de Poynting. La grandeur accessible à la mesure est une moyenne $I = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c E^2$.

L'énergie électromagnétique est équirépartie et $\langle \vec{\Pi} \rangle = \langle u_{em} \rangle c \vec{u}$.

Polarisation d'une onde OPPH

La polarisation de l'onde, en un point donné, correspond à l'évolution au cours du temps de la direction du vecteur \vec{E} .



L'onde est polarisée rectiligne, en un plan d'onde donné, si \vec{E} garde une direction fixe au cours du temps. L'onde est polarisée circulaire si l'extrémité du vecteur \vec{E} en un plan d'onde décrit un cercle au cours du temps. Dans le cas général, la polarisation est elliptique.

Théorème de Malus : l'intensité détectée après un passage dans un analyseur décroît en fonction de l'angle, $I = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E^2 (\cos \alpha)^2$.

Ondes stationnaires : Une onde possédant un point fixe est stationnaire, elle ne se propage pas et vérifie

$$\psi(x, t) = \psi_0 \cos(\omega t - \varphi_1) \cos(kx - \varphi_2)$$

Les plans nodaux (non perturbés) et les plans ventraux (perturbation maximale) sont équidistants et séparés de $\frac{\lambda}{4}$.

Pour une corde idéale de longueur L tendue et maintenue fixe à ses extrémités, on obtient une quantification des pulsations spatiales et temporelles :

$$k_n = n \frac{\pi}{L} \quad \omega_n = n \frac{\pi c}{L} \quad L = n \frac{\lambda_n}{2}$$



A chaque valeur de n correspond un mode propre, $f_0 = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ caractérise le fondamental. Pour chaque mode propre, tous les points de la corde vibrent à la même fréquence. Sinon, la solution générale est la superposition de tous les modes propres.

Les fréquences de résonance en régime forcé correspondent aux fréquences des modes propres en régime libre.

Propagation dispersive

Propagation dans un plasma : dans le modèle du plasma froid dilué (milieu ionisé constitué d'électrons et de cations dans lequel on néglige les mouvements d'agitation thermique et les interactions particulières), il y a une conductivité complexe et une pulsation caractéristique :

$$\gamma = \frac{ne^2}{im\omega} \quad \omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{m\epsilon_0}}$$

L'équation qui régit le champ électromagnétique dans le plasma est, dès que $\omega \neq \omega_p$ (localement neutre) :

$$\vec{\Delta} \vec{E} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{0}$$

L'onde électromagnétique ne cède en moyenne aucune énergie aux porteurs de charge (\vec{j} et \vec{E} sont en quadrature). De plus, la dérivée temporelle traduit une irréversibilité. L'équation de Klein-Gordon est :

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$$

Si \underline{k} est imaginaire pur, l'onde est dite évanescente, ne pénètre quasiment pas le plasma (réflexion). Si c'est un réel, c'est une onde progressive. Le plasma se comporte donc comme un filtre passe-haut de fréquence ω_p .

Vitesse de groupe ($v_g = \frac{d\omega}{dk}$) et de phase ($v_\phi = \frac{\omega}{k}$) sont liées : $v_\phi v_g = c^2$.

Effet de peau : plus la fréquence d'un champ électromagnétique dans lequel est placé un conducteur métallique augmente, plus les courants se localisent au voisinage de la surface du conducteur sur une épaisseur caractéristique appelée épaisseur de peau δ .

Pour des fréquences de courant suffisamment faibles ($f \ll 10^{18}$ Hz), la densité volumique de charge est nulle à tout instant et on peut négliger $\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ devant \vec{j} . On se ramène alors au cas statique de l'équation de Maxwell-Ampère. L'équation, traduisant une irréversibilité est alors :

$$\vec{\Delta} \vec{E} - \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{0}$$

La pulsation spatiale est $\underline{k} = (1 - i) \sqrt{\frac{\mu_0 \gamma \omega}{2}}$, l'épaisseur de peau vaut :

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}$$



Conducteur parfait : Ce modèle repose sur $\vec{E}^{int} = \vec{0}$, $\vec{B}^{int} = \vec{0}$, $\vec{j}^{int} = \vec{0}$, $\vec{\Pi}^{int} = \vec{0}$, $\rho^{int} = 0$ et $\gamma^{int} = \infty$. Une OPPH électromagnétique qui arrive en incidence normale sur un conducteur parfait crée nécessairement une onde réfléchie en induisant une onde stationnaire et crée un courant surfacique (équations de discontinuité). Là où se trouve un nœud de \vec{E} existe un ventre de \vec{B} . La réflexion est totale.



Pression de radiation : Un flux de photons tombant en incidence normale sur un conducteur subit une force surfacique : $\overline{dF} = -\frac{2\langle \Pi \rangle}{c} \overline{dS}$



Guide d'onde : Deux plans conducteurs parfaits peuvent guider une onde en lui imposant des réflexions successives et donner lieu à des ondes stationnaires ou progressives. La pulsation spatiale des ondes crée un filtrage dont la fréquence de coupure est modulée :

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2 - \left(\frac{n\pi c}{a}\right)^2}{c^2}$$

Rayonnement dipolaire

Le modèle du dipôle oscillant, dans le cadre de mouvements non relativistes dans la zone de rayonnement : $a \ll \lambda \ll r$ décrit la production d'ondes électromagnétiques. L'onde rayonnée à grande distance a localement une structure d'onde plane. L'énergie rayonnée est nulle dans la direction du dipôle et maximale dans le plan équatorial. Toute particule chargée accélérée rayonne de l'énergie électromagnétique.

Formule de Larmor : la puissance moyenne rayonnée à grande distance est :



$$P = \frac{\mu_0 p^2}{12\pi c} \omega^4$$

Diffusion de Rayleigh : le champ électromagnétique solaire interagit avec les particules de l'atmosphère terrestre qui se comportent alors comme des dipôles électriquement polarisables qui vont à leur tour rayonner. En supposant chaque électron supposé non relativiste soumis au champ électromagnétique solaire, rappelé vers le noyau (interaction coulombienne) et interagissant avec les autres électrons (frottement fluide), on montre que le ciel est bleu.

Ordres de grandeur

Le module d'Young du fer est de 190 GPa, il faut exercer environ une contrainte de 1,9 t sur 1 cm² pour qu'une tige de fer se raccourcisse d'un millième. La pulsation moyenne pour de la lumière visible est de 10¹⁵ rad.s⁻¹ et les temps caractéristiques d'un détecteur sont de 10⁻⁹ s. La valeur moyenne du vecteur de Poynting à Marseille est de l'ordre du kW.m⁻². Dans le plasma ionosphérique, $n = 10^{12}$ m⁻³ et la fréquence de

coupure est dans les 10 MHz (or les fréquences de communication pour les navires sont de 100 kHz donc il n'y a que de la réflexion à cette altitude). Un conducteur électrique est parfait s'il est parcouru par un champ de fréquence supérieure à 10 kHz.

Les résistances en électronique sont de l'ordre de 1 kΩ à 1 MΩ, les capacités sont de l'ordre de 1 nF à 100 μF. La résistance de sortie d'un GBF est de 50 Ω, l'impédance d'entrée d'un oscilloscope est de 1 MΩ.

Ondes : acoustiques 20 Hz – 20 kHz (pression et température), hertziennes 10⁴ Hz – 10¹¹ Hz (télécommunications), infrarouge 10¹² Hz (chauffage, laser), visible 10¹⁴ Hz, ultraviolet 10¹⁶ Hz (analyse chimique), rayons X 10¹⁷ Hz – 10²¹ Hz (radiothérapie, imagerie), rayons γ 10²¹ Hz – ∞ (physique nucléaire).

Astuces et méthodes

En cas de couplage d'oscillateurs harmoniques, il est souvent très utile de créer des **variables intermédiaires** de somme et différence des inconnues primaires, qui vérifient une équation plus simple.

On ne s'intéresse qu'à des termes en cosinus ou en sinus d'après le **théorème de Fourier**.

Le **passage en complexes** dans le cas d'ondes harmoniques évite souvent les calculs fastidieux. Les **analogies** électro-mécaniques simplifient les interprétations et offrent une mise en perspective intéressante.

L'équation de D'Alembert est **linéaire** : elle vérifie le principe de superposition.

Pour les pulsations spatiales, toujours poser $\underline{k} = k' - ik''$ pour mettre en évidence les évanescences. Se souvenir que $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2 = i$ et $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2 = -i$.

La vitesse de phase n'a jamais une vraie signification physique : la trouver supérieure à c n'est pas embêtant. Elle n'indique que le caractère éventuellement **dispersif**. Cette dispersion entraîne potentiellement une perte d'information lorsqu'on utilise une onde quasi-monochromatique.

Distinguer le discret du continu : voir une onde qui rencontre une interface comme une colonne d'eau non stoppée.

Pour les dérivées, penser éventuellement à des **dérivations par partie**, à une **dérivation logarithmique** (pour des incertitudes) ou à une **différenciation d'équation** (pour Klein-Gordon).

Dans les calculs de forces de pression, si celle-ci est uniforme, penser à **l'aire projetée**.

Exercices de référence

Adaptation d'impédance électromécanique : on considère une onde qui se propage dans une corde dont la terminaison est une masse soumise aux tensions des ressorts et à un frottement fluide.

L'impédance de la corde est $Z_0 = \sqrt{T_0 \mu_0}$. On considère le circuit électrique équivalent : le poids vient d'une inertie (inductance), la tension des ressorts est un rappel (association parallèle de condensateurs), le frottement est résistif (résistance). L'impédance du circuit équivalent est donc $\frac{1}{2cj\omega} + R + Lj\omega$. Dans le monde mécanique, la retransposition fournit l'impédance du système $Z = \frac{2k}{j\omega} + \alpha + mj\omega$. Au niveau de la jonction, le coefficient de réflexion en vitesse vaut $r = \frac{Z_0 - Z}{Z_0 + Z}$.

Association de ressorts : on prouve que l'association en série ou en dérivation de deux ressorts de raideurs k et k' est équivalente à un unique ressort.

En série, la force étant toujours égale en tout point sur un ressort idéal, on a donc $F = k\Delta l = k'\Delta l' = K(\Delta l + \Delta l')$ d'où $\frac{1}{K} = \frac{1}{k} + \frac{1}{k'}$. En dérivation, les forces s'ajoutent d'où $K\Delta l = k\Delta l + k'\Delta l$, $K = k + k'$. Une association de n ressorts de raideur k est équivalente à $\frac{k}{n}$ en série et nk en dérivation.

Réflexion dans un plasma : on considère une onde électromagnétique (ω, k_0) polarisée rectiligne arrivant en incidence normale sur un plasma dilué d'indice $\underline{n} = \frac{k}{k_0}$ ($z \geq 0$), $\vec{E}^i = E_0 e^{i(\omega t - k_0 z)} \vec{e}_x$ est le champ électrique incident. On cherche le coefficient de réflexion en énergie.

Pour le champ électrique, $\vec{E}^r = \underline{r} E_0 e^{i(\omega t + k_0 z)} \vec{e}_x$ et $\vec{E}^t = \underline{t} E_0 e^{i(\omega t - kz)} \vec{e}_x$. Pour le champ magnétique, par analogie au vide, on a cette fois $\vec{B} = \frac{\vec{u} \wedge \vec{E}}{c/n}$ d'où $\vec{B}^i = \frac{E_0}{c} e^{i(\omega t - k_0 z)} \vec{e}_y$, $\vec{B}^r = -\underline{r} \frac{E_0}{c} e^{i(\omega t + k_0 z)} \vec{e}_y$ et $\vec{B}^t = \underline{t} \frac{E_0}{c/n} e^{i(\omega t - kz)} \vec{e}_y$. On utilise alors les équations de continuité à l'interface vide/plasma ($z = 0$) en supposant qu'il n'y a pas de courant surfacique : $\vec{e}_x \wedge (\vec{E}^t - (\vec{E}^r + \vec{E}^i)) = \vec{0}$ et $\vec{e}_x \wedge (\vec{B}^t - (\vec{B}^r + \vec{B}^i)) = \vec{0}$ d'où $1 + \underline{r} = \underline{t}$ et $1 - \underline{r} = \underline{n} \underline{t}$ soit $\underline{t} = \frac{2}{\underline{n} + 1}$ et $\underline{r} = \frac{1 - \underline{n}}{1 + \underline{n}}$.

Le rapport des vecteurs de Poynting définit $R = \frac{\langle \Pi^r(z=0) \rangle}{\langle \Pi^i(z=0) \rangle} = \frac{\frac{1}{2} \Re \left(\underline{r} \underline{r}^* \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \right)}{\frac{1}{2} \Re \left(\frac{E_0^2}{\mu_0 c} \right)} =$

$$\Re(\underline{r} \underline{r}^*) = \left| \frac{1 - \underline{n}}{1 + \underline{n}} \right|^2.$$

Plasmons dans un métal : On montre que sous l'action d'un déplacement δx du gaz d'électron, il se crée un champ électrique induit.

Les charges positives sont immobiles (rapport des masses) : seuls les électrons bougent. On note $\xi(x)$ le déplacement au point d'abscisse x . La conservation de la charge sur la tranche de longueur δx implique $Ne\delta x S = ne(\delta x + \xi(x + \delta x) - \xi(x))S$ soit $N = n \left(1 + \frac{\delta \xi}{\delta x} \right)$ où n est la densité volumique électronique dans l'état perturbé, N celle des charges positives non perturbées.

On a alors $\text{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0} = N(+e) + n(-e) \approx Ne \frac{\delta \xi}{\delta x}$ si $\frac{\delta \xi}{\delta x} \ll 1$. Si \vec{E} ne dépend que de x , il vient $\vec{E} = Ne\xi(x, t)$. L'équation traditionnelle du PFD se réécrit

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \sqrt{\frac{Ne^2}{m\epsilon_0}} \xi = 0.$$

Induction électromagnétique

Electromagnétisme dans l'ARQS

L'Approximation des Régimes Quasi-Stationnaires consiste à négliger les durées des phénomènes de propagation par rapport à la durée de variation du signal. Cela est légitime lorsque la fréquence f , la période T et la célérité du signal et la taille du circuit l vérifient :

$$f \ll \frac{c}{l} \quad l \ll cT$$

Dans le cadre de l'ARQS, les équations de Maxwell se réécrivent :

$$(MG) \quad \text{div}(\vec{E}(M, t)) = \frac{\rho(M, t)}{\epsilon_0}$$

$$(M\phi) \quad \text{div}(\vec{B}(M, t)) = 0$$

$$(MF) \quad \text{rot}(\vec{E}(M, t)) = -\frac{\partial \vec{B}(M, t)}{\partial t}$$

$$(MA) \quad \text{rot}(\vec{B}(M, t)) = \mu_0 \vec{j}$$

L'équation locale de conservation de la charge devient :

$$\text{div}(\vec{j}(M, t)) = 0$$

A chaque instant, \vec{j} est à flux conservatif : l'intensité du courant a même valeur en tout point à tout instant. \vec{E} n'est pas à circulation conservative.

Pour des circuits longs d'environ $l \approx 1$ m, l'ARQS est donc valable tant que la fréquence est inférieure à $3 \cdot 10^8$ Hz, ce qui n'est pas contraignant.

Forces de Laplace

Un élément de conducteur $d\vec{l}$ parcouru par un courant d'intensité I et placé dans un champ magnétique extérieur \vec{B} est soumis à une force de Laplace élémentaire :

$$d\vec{F}_L = I d\vec{l} \wedge \vec{B}$$

Barre en translation : pour une barre métallique de longueur l selon \vec{e}_y en translation rectiligne selon \vec{e}_x dans un milieu où règne un champ magnétique selon \vec{e}_z , la résultante des forces de Laplace est $\vec{F}_L = IlB_z \vec{e}_x$ et sa puissance est $P = IlB_z v_x$.

Spire rectangulaire : si la spire est de moment magnétique \vec{M} , les actions mécaniques liées aux forces de Laplace forment un couple donc la résultante est nulle et le moment s'exprime selon $\vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B}$.

On peut entraîner un dipôle magnétique rigide en rotation si on le soumet à un champ magnétique extérieur tournant (moteur électrique synchrone). Pour éviter d'avoir recours à des pièces mobiles, on alimente deux bobines d'axes orthogonaux avec des intensités sinusoïdales en quadrature de phase.

Lois de l'induction

Le flux magnétique à travers un circuit fermé est $\Phi = \iint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{S}$.

Le flux à travers une surface fermée est toujours nul.

Loi de Faraday : si le flux magnétique à travers une surface évolue au cours du temps, il apparaît une force contre-électromotrice selon

$$e = - \frac{d\Phi}{dt}$$

Cette loi expérimentale permet de ramener un problème d'induction électromagnétique à un problème plus simple d'électrocinétique. On pourra ainsi déterminer le courant induit par suite les forces de Laplace correspondantes.

Loi de modération de Lenz : les phénomènes d'induction s'opposent par leurs effets à la cause qui leur donne naissance.

Cette loi permet d'expliquer le freinage par les courants de Foucault.

Induction de Neumann

Ce cas correspond à un circuit fixe dans le référentiel d'étude, soumis à un champ magnétique variable. Le flux magnétique dans un circuit est la somme de deux contributions : le flux extérieur développé par des sources de champ magnétique extérieures et le flux propre associé au courant qui circule dans le circuit.

Le coefficient d'inductance propre d'un circuit est le coefficient de proportionnalité entre le flux propre et l'intensité dans le circuit :

$$\Phi = Li$$

Théorème de Neumann : on considère deux bobines \mathcal{B}_1 et \mathcal{B}_2 , le coefficient d'inductance mutuelle M_{21} est le coefficient de proportionnalité entre le flux créé par \mathcal{B}_2 à travers \mathcal{B}_1 et l'intensité i_2 circulant dans \mathcal{B}_2 . Pour deux circuits couplés, $M_{21} = M_{12}$:

$$\Phi_1 = L_1 i_1 + M i_2 \quad \Phi_2 = M i_1 + L_2 i_2$$

Pour deux bobines de N_1 et N_2 spires, $L_1 = \frac{\mu_0 N_1^2 S}{l}$ et $M = \frac{\mu_0 N_1 N_2 S}{l}$.

L'énergie magnétique est proportionnelle au carré du nombre de spires, d'où l'intérêt de bobiner. Un bilan énergétique donne :

$$u_1 i_1 + u_2 i_2 = R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2 \right)$$

Transformateur : un transformateur parfait est l'association de deux bobines, et d'un circuit magnétique permettant un couplage important tel que $M = \sqrt{L_1 L_2}$. Le rapport des amplitudes complexes des tensions au secondaire et au primaire est égal au rapport des nombres de spires :

$$\frac{u_2}{u_1} = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} = \frac{N_2}{N_1} \quad \frac{i_2}{i_1} = -\frac{N_1}{N_2}$$

Induction de Lorentz

Ce cas correspond à un circuit mobile dans le référentiel d'étude, soumis à un champ magnétique stationnaire. Le phénomène d'induction électromagnétique permet de convertir une puissance mécanique en puissance électrique, c'est une façon d'obtenir des générateurs : une barre rectiligne translattée permet de réaliser une source de tension continue et une spire entraînée en rotation permet de réaliser une source de tension alternative. Réciproquement, les forces de Laplace permettent de convertir une puissance électrique en une puissance mécanique, c'est le principe des moteurs électriques : freinage par induction, haut-parleur électrodynamique, système collecteurs-balais sont des exemples.

La conversion électromécanique parfaite se traduit par la relation :

$$P_{Laplace} + ei = 0$$

Cristallographie

Solides cristallins

L'état cristallin, contrairement à l'état amorphe, correspond à la répétition tridimensionnelle d'un bloc de base. Un réseau est un ensemble infini triplement périodique de points, appelé nœuds. La plus petite entité chimique présente dans le cristal est un motif. Une structure cristalline est donc la donnée d'un réseau et d'un motif. La maille est l'unité de base à partir de laquelle on peut engendrer tout le cristal en faisant subir à celle-ci différentes translations suivant les directions des trois axes cristallins.

La multiplicité d'une maille représente le nombre motifs contenus dans la maille. La coordinence correspond au nombre de plus proches voisins d'un élément donné. La compacité est le pourcentage d'occupation de la maille occupée par un motif.

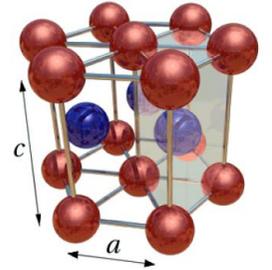
Avec N la multiplicité de la maille d'un cristal, M la masse molaire du motif et V le volume de celle-ci, la masse volumique du cristal est

$$\rho = \frac{NM}{N_A V}$$

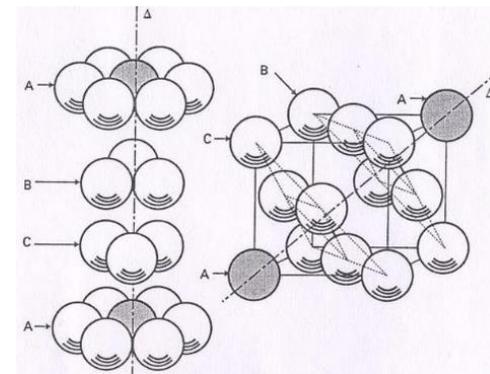
L'analyse des propriétés de diffraction d'un cristal a deux objets : identifier la position des atomes et déterminer leur nature.

Le modèle usuel consiste à représenter les atomes par des sphères dures rigides identiques. La compacité maximale implique la tangence entre les différentes sphères et permet donc de relier les paramètres géométriques. Elle est atteinte pour les deux empilements suivants.

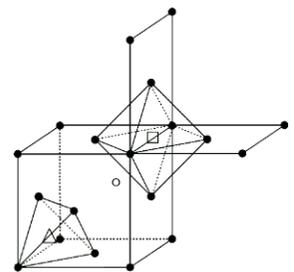
Empilement hexagonal compact : c'est un prisme à base hexagonale de côté a et de hauteur c , la coordinence de cette structure est 12, elle compte 6 motifs par maille $\left(2 \times \frac{1}{2} + 12 \times \frac{1}{6} + 3 \times 1\right)$, et dans le cas compact, le rapport $\frac{c}{a} = 2\sqrt{\frac{2}{3}} \approx 1,63$ et la compacité est $C = \frac{\pi}{3\sqrt{2}} \approx 0,74$.



Empilement cubique faces centrées : les trois plans d'empilement dans cette structure ne correspondent pas aux faces de la maille cubique mais sont disposés selon les diagonales du cube, la coordinence de cette structure est 12, elle compte 4 motifs par maille $\left(8 \times \frac{1}{8} + 6 \times \frac{1}{2}\right)$, la structure est compacte si $4R = a\sqrt{2}$ et la compacité est alors à nouveau $C = \frac{\pi}{3\sqrt{2}} \approx 0,74$.



Dans cet empilement, on peut déceler des sites interstitiels dans lesquels peuvent se loger des atomes plus petits. Ces sites sont tétraédriques T s'ils se trouvent dans les cubes qui occupent les coins (il y en a 8, le rayon maximal de l'atome est alors $r = R\left(\sqrt{\frac{3}{2}} - 1\right)$), ou octaédriques central/latéral O s'ils se trouvent au centre du cube ou sur l'une des arêtes (il y en a 4, le rayon maximal de l'atome est alors $r = R(\sqrt{2} - 1)$). Ces sites servent pour créer des alliages.

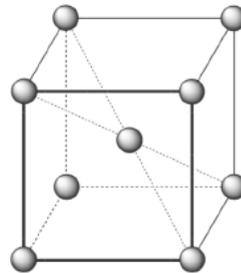


Cristaux métalliques

Mécaniquement, les métaux peuvent se présenter sous forme de fils (ductiles) ou de feuilles par laminage ou forgeage (malléables). Ils possèdent de plus des masses volumiques très souvent élevées. Optiquement, les électrons libres peuvent absorber l'énergie lumineuse et ainsi passer à l'état excité, ce qui rend les métaux opaques. Lors de la désexcitation des électrons, l'énergie lumineuse est renvoyée ce qui confère aux métaux un pouvoir réflecteur. Électriquement, les métaux possèdent une très grande conductivité qui diminue avec la température et peuvent émettre des électrons par effet photoélectrique ou thermique. Thermiquement, les métaux possèdent une très grande conductivité thermique, c'est-à-dire qu'ils conduisent très bien la chaleur.

Le béryllium, le magnésium, le zinc cristallisent dans un système hc, tandis que le nickel, le platine, l'argent, l'or ou l'aluminium cristallisent dans un système cfc. Le lithium, le sodium, le potassium ou encore le césium cristalliseront dans le système cubique centré. Certains métaux peuvent même cristalliser dans différentes structures, selon différents éléments comme la température ou la pression principalement : variétés allotropiques.

Empilement cubique centré : cet empilement est non compact et correspond à la superposition de grilles, la coordination est de 8 et le nombre de motifs par maille est 2, la condition de tangence est $4R = a\sqrt{3}$ et la compacité maximale vaut $C = \frac{\pi\sqrt{3}}{8} \approx 0,68$.

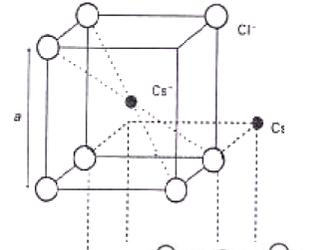


Dans le cas des métaux, les sites interstitiels présents sur tous les empilements peuvent permettre de créer des alliages : le laiton (cuivre, zinc), le bronze (cuivre, étain), l'acier (carbone, fer)...

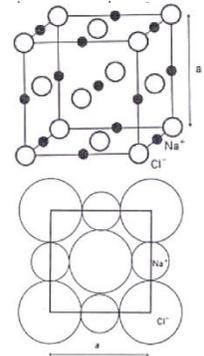
Cristaux ioniques

La neutralité du cristal est impérative, on a généralement $\frac{R_c}{R_a} < 1$, il y a souvent contact entre les ions de signe opposé et aucun contact entre les ions de même signe (interaction électrostatique), le réseau hôte n'est généralement pas compact. Ce sont des isolants électriques et de mauvais conducteurs thermiques puisque les espèces chargées sont fixes aux nœuds du réseau, ils sont également durs mais cassants : une contrainte exercée conduit rapidement à une brisure non réversible.

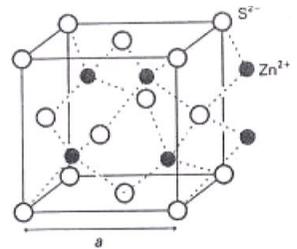
Type Chlorure de Césium NaCs : c'est un réseau cubique simple avec 1 motif par maille, une coordination (anionique et cationique) de 8, dans le cas le plus compact $a\sqrt{3} = 2R_a + 2R_c$ donc la relation nécessaire à la stabilité de l'édifice conduit à $\sqrt{3} - 1 < \frac{R_c}{R_a} < 1$.



Type Chlorure de Sodium NaCl : les ions chlorure forment un réseau cubique à faces centrées et les atomes de sodium occupent tous les sites octaédriques, il y a 4 motifs par maille et les coordinences sont de 6, dans le cas le plus compact $a = 2R_a + 2R_c$ donc la relation nécessaire à la stabilité de l'édifice conduit à $\sqrt{2} - 1 < \frac{R_c}{R_a} < 1$.

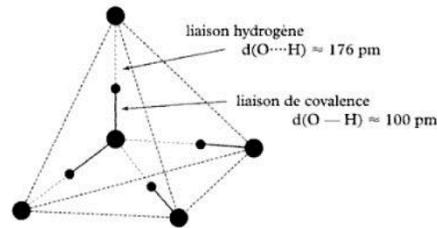


Type Blende ZnS : les anions S^{2-} forment un réseau cubique à faces centrées et les atomes Zn^{2+} occupent la moitié des sites tétraédriques, il y a 4 motifs par maille et les coordinences sont de 4, dans le cas le plus compact $\frac{a\sqrt{3}}{2} = 2R_a + 2R_c$ donc la relation nécessaire à la stabilité de l'édifice conduit à $\sqrt{\frac{3}{2}} - 1 < \frac{R_c}{R_a} < 1$.



Cristaux moléculaires

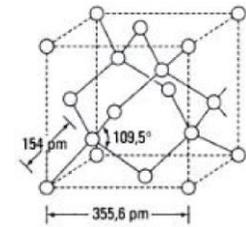
Dans le cas de la variété allotropique cristallographique de la glace dite « diamant », le motif est une molécule. La cohésion est assurée par des liaisons entre un oxygène et un hydrogène de type liaison hydrogène (entre deux molécules d'eau) et liaison de covalence (à l'intérieur d'une molécule). On parle de glace « diamant » car la structure est la même que celle du diamant dans laquelle les oxygènes auraient pris la place des carbones. L'existence d'interactions intermoléculaires (ici la liaison hydrogène) justifie des énergies de rupture des cristaux plus élevées que celles que l'on aurait eues pour les seules liaisons covalentes. Par là-même, cela permet d'interpréter qualitativement de brusques changements des grandeurs thermodynamiques associées aux changements de phase. Il est ainsi plus difficile qu'attendu théoriquement de faire fondre ou bouillir de l'eau puisqu'il y a plus de liaisons à rompre.



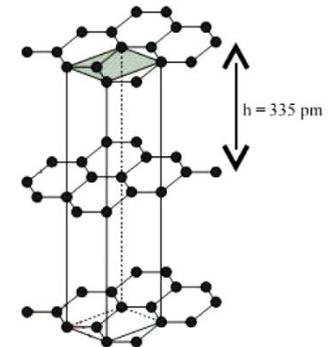
Cristaux covalents

Dans les cristaux covalents, les atomes sont liés par liaison covalente pour constituer une macromolécule de taille infinie. Le motif est constitué d'atomes. Les propriétés de conductivité dépendent de l'atome voire de sa structure cristalline : on peut avoir des isolants (diamant), des conducteurs (graphite) ou des semi-conducteurs (silicium). La structure est très rigide et le matériau est très dur.

Diamant : La structure du diamant est un réseau cfc dont la moitié des sites T sont occupés par des atomes de carbone. Par conséquent, on a 4 motifs dus au réseau hôte et 4 autres dus aux sites T. Le diamant possède huit motifs par maille. La tangence assure que $a\sqrt{3} = 8R$ et la compacité est $C = \frac{\pi\sqrt{3}}{16} \approx 0,34$.



Graphite : le graphite est fortement anisotrope et les propriétés seront différentes selon la direction d'observation, on dénombre quatre motifs par maille hexagonale, La coordinence d'un atome d'un cristal de graphite est de 3. Le graphite est très stable dans un feuillet pour les mêmes raisons que celles vues pour le diamant, en revanche il est friable perpendiculairement à ceux-ci car les feuillets peuvent glisser les uns sur les autres, on parle de clivage. Cela permet d'ailleurs d'envisager la conception de lubrifiants solides indispensables dans des conditions où les huiles s'évapoureraient, comme dans l'espace par exemple.



Ordres de grandeur

La masse volumique du diamant est de $3,5 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

Cohésion des solides : 100 – 600 kJ.mol⁻¹ (ionique, métallique), 200 – 800 kJ.mol⁻¹ (covalente), 5 – 10 kJ.mol⁻¹ (interaction de Van der Waals), 10 – 30 kJ.mol⁻¹ (liaison hydrogène).

Mécanique

Mouvements et référentiels

Un référentiel est l'ensemble constitué d'un repère d'espace et d'une horloge. En mécanique classique, les horloges sont synchronisées donc la mesure du temps est un invariant. La vitesse finie de la lumière est indépendante du référentiel.

Repère cylindro-polaire : un point M évolue selon $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$ et

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{e}_z \quad \vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta + \ddot{z}\vec{e}_z$$

Mouvement circulaire : à rayon constant, on a sur un même plan,

$$\vec{a} = -\frac{v^2}{R}\vec{e}_r + \frac{dv}{dt}\vec{e}_\theta = -R\omega^2\vec{e}_r + R\frac{d\omega}{dt}\vec{e}_\theta$$

Mouvement balistique : dans le cas d'un mouvement uniformément accéléré, la trajectoire est plane, a une portée maximale pour $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

$$\overrightarrow{M_0M} = \frac{(t - t_0)^2}{2}\vec{a} + (t - t_0)\vec{v}$$

Mouvement à accélération centrale : la direction du vecteur accélération passe constamment par un point fixe, la trajectoire est plane,

$$\frac{\vec{\sigma}}{m} = r^2\dot{\theta}\vec{e}_z$$

est un invariant vectoriel porté par le vecteur normal à la trajectoire, (constante des aires). C'est le mouvement de référence pour les planètes.

Pour un champ newtonien ($\vec{F} = -\frac{K}{r^2}\vec{e}_r$), on a $E_m = -\frac{K}{r_{min} + r_{max}}$.

Loi de composition des vitesses : pour deux référentiels R et R',

$$\vec{v}_R(M) = \vec{v}_{R'}(M) + \vec{V}_R(P \equiv M, P \text{ fixe dans } R')$$

On utilise le point coïncidant, fictif et défini à chaque instant. Le terme de vitesse d'entraînement est $\vec{V}_e(M) = \vec{v}_R(O') + \overrightarrow{MO'} \wedge \vec{\Omega}_{R'/R}$.

Loi de composition des accélérations : relatif, entraînement, Coriolis,

$$\vec{a}_R(M) = \vec{a}_{R'}(M) + \vec{a}_e(M) + \vec{a}_c(M)$$

$$\vec{a}_R(M) = \vec{a}_{R'}(M) + \vec{a}_R(P \equiv M, P \text{ fixe dans } R') + 2\vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{v}_{R'}(M)$$

Transformation de Galilée : si le référentiel R' a un mouvement de translation rectiligne uniforme par rapport à R avec une vitesse $\vec{u} = u\vec{e}_x$, alors on change de repère selon $(x', y', z') = (x - ut, y, z)$.

Référentiel de Copernic : l'observateur se trouve au barycentre du système solaire, les axes de son repère d'espace pointent vers trois étoiles suffisamment éloignées pour être considérées fixes, il est considéré galiléen avec une très bonne approximation.

Référentiel géocentrique : l'observateur se trouve au centre de la Terre, il peut être considéré galiléen pour des durées faibles devant la période de révolution de la Terre (il est en mouvement de translation quasi-circulaire autour du référentiel de Copernic).

Référentiel terrestre : l'observateur se trouve à la surface de la Terre, il peut être considéré galiléen si la durée caractéristique du mouvement est faible devant la période de rotation de la Terre.

Dynamique en référentiel non galiléen

Principe d'inertie : Tout corps soumis à des forces dont la résultante est nulle persévère dans son état de mouvement rectiligne uniforme ou de repos. Il existe une classe de référentiels dans lesquels le mouvement de tout point isolé est rectiligne uniforme.

Loi de la quantité de mouvement : en référentiel non galiléen,

$$\left(\sum_i \vec{F}_i \right) + \vec{f}_i \text{ entrainement} + \vec{f}_i \text{ Coriolis} = m \vec{a}_{R'}$$

avec $\vec{f}_i \text{ entrainement} = -m \vec{a}_e$ et $\vec{f}_i \text{ Coriolis} = -m \vec{a}_c$.

On aura souvent en rotation $\vec{f}_i \text{ entrainement} = m \omega^2 \vec{HM}$ avec H le projeté orthogonal de M sur l'axe de R portant le vecteur $\vec{\Omega}_{R'/R}$. Dans le cas où le système considéré est à l'équilibre dans R' , sa vitesse est nulle et donc on ne considère pas la force d'inertie de Coriolis.

Principe des actions réciproques : soient deux corps assimilés à des points matériels, la force exercée par le premier corps sur le second est de même intensité, de même direction et de sens opposée à celle exercée par le second sur le premier.

Lois de Kepler : chaque planète décrit selon un mouvement périodique dans le sens direct, une trajectoire elliptique dont le Soleil occupe l'un des foyers ; l'aire balayée par le rayon-vecteur planète-Soleil est proportionnelle au temps de parcours ; le quotient de la période de révolution de la planète sur le cube du demi grand-axe de sa trajectoire est constante et ne dépend que de l'attracteur,

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$$

Loi du moment cinétique : pour un solide en rotation autour d'un axe fixe,

$$J_\Delta \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\sigma}{dt} = \left(\sum_i \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_i) \right) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{f}_i \text{ entrainement}) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{f}_i \text{ Coriolis})$$

Energétique

Une ligne de champ de force conservative est toujours perpendiculaire à une ligne équipotentielle associée, le champ de force est dirigée dans le sens des énergies potentielles décroissantes. On peut déterminer un champ de force si l'on se donne la fonction d'état d'énergie potentielle associée : $\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}(E_p)$.

Un système est en équilibre si sa fonction énergie potentielle est stationnaire (minimum à l'équilibre stable, maximum instable).

Energie cinétique : en translation $E_c = \frac{1}{2} m v^2$, en rotation $E_c = \frac{1}{2} J_\Delta \omega^2$.

Force de pesanteur : $E_p = mgz + E_0$.

Force de rappel élastique : $E_p = \frac{1}{2} k x^2 + E_0$.

Force d'inertie d'entraînement (rotation) : $E_p = -\frac{1}{2} m \omega^2 H M^2 + E_0$.

Théorème de l'énergie cinétique / mécanique : forme non intégrée,

$$\frac{dE_c}{dt} = \left(\sum_i P(\vec{F}_i) \right) + \vec{f}_i \text{ entrainement} \cdot \vec{v}$$

$$\frac{dE_m}{dt} = \left(\sum_i P_{\text{non conservative}}(\vec{F}_i) \right)$$

Lois du frottement solide

Si I est le point géométrique de contact entre deux solides, I_1 un point coïncidant avec I sur le solide S_1 et I_2 un point coïncidant avec I sur le solide S_2 , \vec{n} normal au plan de contact et \vec{t} tangent aux deux solides alors la vitesse de glissement de S_1 par rapport à S_2 est :

$$\vec{V}_{1/2} = \vec{v}_R(I_1) - \vec{v}_R(I_2)$$

Le roulement sans glissement correspond à $\vec{V}_{1/2} = \vec{0}$.

Les forces de contact exercées par S_2 sur S_1 admet deux composantes :

$$\vec{R}_{21} = T_{21}\vec{t} + N_{21}\vec{n}$$

Lors du contact, $N_{21} > 0$. Lors de la rupture du contact, $N_{21} = 0$.

Lois d'Amontons et Coulomb : Tant que $\frac{T}{N} \leq \mu_s$ coefficient de frottement statique, il n'y a pas de glissement. S'il y a glissement, alors $T = \mu N$ avec μ coefficient de frottement dynamique et $\vec{T}_{21} \cdot \vec{V}_{1/2} < 0$.

Si le solide roule sans glisser, la résultante des forces de contact au point de contact est contenue dans un cône de demi angle au sommet

$$\alpha = \arctan \mu_s$$

La puissance mécanique d'un solide dans un référentiel R est :

$$P_{S/R} = \vec{F}^{ext} \cdot \vec{v}_R(G) + \vec{M}_G^{ext} \cdot \vec{\Omega}_{S/R}$$

Le barycentre d'un système est défini comme étant l'unique point G tel que pour tout point O :

$$\vec{OG} = \frac{1}{m} \iiint_{M \in (V)} \vec{OM} dm$$

Ordres de grandeur

La seconde est définie comme la durée de 9 192 631 770 périodes de la radiation correspondant à la transition entre deux niveaux hyperfins de l'état fondamental de césium 133. Le terme différentiel du aux marées est de l'ordre de 10^{-7} m.s^{-2} . La vitesse de rotation de la Terre sur elle-même est $7,2 \cdot 10^{-5} \text{ rad.s}^{-1}$.

Distances : 10^{-15} m (noyau atomique), 10^{-10} m (atome), 10^{-8} m (transistor miniature), 10^{-7} m (virus), 10^{-6} m (alvéole DVD, globule rouge), 10^{-4} m (épaisseur d'un cheveu), 10^2 m (stade de football), 10^7 m (diamètre de la Terre), 10^9 m (distance Terre-Lune), 10^{11} m (distance Terre-Soleil), 10^{13} m (diamètre système solaire), 10^{16} m (distance à l'étoile la plus proche du Soleil, Proxima du Centaure).

« Me voici tout mignon, je suis une nébuleuse ! »

Masses : 10^{24} kg (Terre), 10^{30} kg (Soleil), 10^{22} kg (Lune).

$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N.m}^2.\text{s}^{-1}$.

Astuces et méthodes

Raisonnement d'abord en termes **énergétiques**, si le mouvement est à un degré de liberté. L'énergie cinétique est toujours positive et est nulle à la position potentielle d'équilibre. Pour les positions d'équilibre, la stabilité est atteinte lorsque la dérivée seconde, simple à un degré de liberté de l'énergie potentielle totale est strictement positive en un point où la dérivée première était nulle.

Pour le frottement, séparer l'étude des deux phases : en phase d'adhérence, calculer **séparément** le frottement tangentiel et la réaction normale pour voir jusqu'à quand la situation demeure (à l'aide d'une relation supplémentaire de non-glissement par exemple).

Exercices de référence

Formule de Binet : On considère le mouvement à accélération centrale d'un point et on pose $u = \frac{1}{r}$, on considère le champ de force centrale $-\frac{k}{r^3}$.

$$\dot{r} = -\frac{\dot{u}}{u^2} = -\frac{\dot{u}}{\theta} C = -\frac{du}{d\theta} C, \quad \ddot{r} = -C \frac{d}{d\theta} \frac{du}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = -C\dot{\theta} \frac{d^2u}{d\theta^2} = -C^2 u^2 \frac{d^2u}{d\theta^2} \text{ d'où}$$

$$C^2 u^2 \frac{d^2u}{d\theta^2} + C^2 u^3 = \frac{k}{m} u^3 \text{ ainsi } \frac{d^2u}{d\theta^2} + \left(1 - \frac{k}{mC^2}\right) u = 0, \text{ le problème est}$$

déterministe et on obtient une équation polaire du type $r = \frac{p}{1+e \cos \theta}$.

Effet des marées : On prend en compte le mouvement orbital de la Terre autour du Soleil pour expliquer les marées.

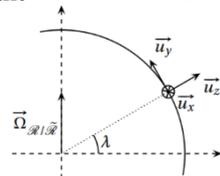
On suppose le référentiel géocentrique en translation circulaire uniforme par rapport au référentiel de Copernic. Pour M dans le référentiel géocentrique, $m\vec{a}(M) = -m\vec{a}_e(M) + m(\vec{g}_T(M) + \vec{g}_{SL}(M))$. L'accélération $\vec{a}_e(M)$ vient en réalisant un PFD en référentiel de Copernic en supposant que vu du Soleil, l'accélération en M est similaire à l'accélération du centre de la Terre d'où et en supposant le champ à peu près uniforme $\vec{a}_e(M) \approx \vec{a}_e(G) \approx \vec{g}_{SL}(G)$. Finalement, $m\vec{a}(M) \approx +m\vec{g}_T(M) + m(\vec{g}_{SL}(G) - \vec{g}_{SL}(M))$. L'effet vient en fait de l'inhomogénéité du champ gravifique. Les effets des marées d'un astre sont proportionnels à $\frac{M}{d^3}$, la Lune a un effet prépondérant par rapport au Soleil.

Effet Coriolis balistique et résolutions successives : On considère une balle lâchée, déviée vers l'est à cause de la force de Coriolis.

La balle est soumise au poids (qui inclut l'inertie d'entraînement), la force de Coriolis et on néglige le frottement fluide. La vitesse angulaire est $\vec{\Omega} = \Omega(\cos \lambda \vec{u}_x + \sin \lambda \vec{u}_z)$, la force de Coriolis permet en utilisant le PFD d'obtenir le système :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -2m \cos \lambda \Omega \dot{y} + 2m \sin \lambda \Omega \dot{y} \\ m\ddot{y} = -2m \sin \lambda \Omega \dot{x} \\ m\ddot{z} = -mg + 2m \cos \lambda \Omega \dot{x} \end{cases} \text{ . Si}$$

on négligeait la force de Coriolis, on obtiendrait



classiquement $z = h - \frac{g}{2} t^2$. On injecte alors dans le système précédent qui fournit $x = \frac{1}{3} g \cos \lambda \Omega t^3$, on pourrait même continuer.

Chaîne glissante : Une chaîne est placée en boule au bord de la table. Elle tombe sans glisser, on recherche son équation différentielle.

On considère la chaîne de masse linéique λ , x la distance entre le bord de la table et le bout pendante. La résultante du poids est $\lambda g x$. La variation de la quantité de mouvement entre deux instants très proches est, à un infiniment petit d'ordre 1 $dp = (m + dm)(v + dv) - mv = mdv + vdm = mdv + v^2 \lambda dt$ en sachant que $dm = \lambda dx = \lambda v dt$ d'où après la loi de la quantité de mouvement $\frac{dp}{dt} = \lambda g x$ soit $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{x} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = g$.

Mouches en folie : Quatre mouches, initialement aux coins d'un carré de côté c se pourchassent à la vitesse v .

On considère une mouche dans le référentiel de la mouche qu'elle suit, elle adopte un mouvement rectiligne uniforme donc dans ce référentiel, le temps mis est $\int_{-c}^0 -dx = \int_0^\tau v dt$ d'où $\tau = \frac{a}{v}$. Pour l'équation du mouvement, on a $\vec{v} = \frac{v}{\sqrt{2}}(-\vec{e}_r + \vec{e}_\theta) = \frac{dr}{dt} \vec{e}_r + r \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_\theta$ d'où $r \frac{d\theta}{dr} = -1$ puis $r = r_0 e^{\frac{\pi}{4} - \theta}$.

Limite de Roche : Il existe une limite de distance entre Jupiter et une comète en deçà de laquelle la comète éclate en deux morceaux.

On assimile la comète à deux sphères mitoyennes de masse m et séparées de $2r$. Le mouvement du centre d'inertie de la comète est uniforme, le mouvement étant circulaire et $\omega^2 = \frac{GM}{2d} \left(\frac{1}{(d-r)^2} - \frac{1}{(d+r)^2} \right)$. Une des deux sphères est soumise à des forces qui vérifient donc $-m(d-r)\omega^2 = -\frac{Gmm}{(d-r)^2} + \frac{Gmm}{(2r)^2} + R$. Il y a rupture de contact dès que $R \leq 0$ et $R \approx -\frac{3GmMr}{d^3} + G \frac{m^2}{4r^2}$ soit $d \leq d_{lim} = \left(\frac{12M}{m}\right)^{\frac{1}{3}} r$. C'est ce qui est arrivé à la comète Shoemaker-Levy en 1994, ou qui justifie les anneaux de Saturne : des satellites trop proches de la planète.

Optique ondulatoire

Optique géométrique et diffraction

Un milieu est transparent si l'intensité lumineuse est constante, homogène si les propriétés optiques ne dépendent pas de la position et isotrope si elles ne dépendent pas de la direction. Le modèle de l'optique géométrique se fonde sur la propagation rectiligne, le principe du retour inverse et l'indépendance des rayons.

Lois de Snell-Descartes : à l'interface entre deux milieux aux propriétés optiques différentes, les rayons incident, réfléchi et réfracté sont coplanaires ; l'angle de réflexion vérifie $i = r$; l'angle de réfraction vérifie

$$n_i \sin i = n_t \sin t$$

Lors de la réfraction d'un milieu vers un autre plus réfringent, le rayon réfracté se rapproche de la normale. Vers un milieu moins réfringent, il existe un angle limite, l'angle d'incidence doit vérifier $i < \arcsin \frac{n_t}{n_i}$.

Loi de Gladstone : pour un fluide de masse volumique ρ , le quotient $\frac{n-1}{\rho}$ est constant. Ainsi, n croît avec l'altitude.

Un objet A est réel si les rayons incidents atteignent \mathcal{S} en passant par A , virtuel si les rayons incidents atteignent \mathcal{S} en se dirigeant vers A . Une image A' est réelle si les rayons incidents atteignent \mathcal{S} en se dirigeant vers A' , virtuelle si les rayons incidents atteignent \mathcal{S} en provenant de A' .

Un faisceau de rayons parallèles est dit collimaté. Les conditions de Gauss correspondent à des rayons paraxiaux : proches de l'axe et peu inclinés.

Pour construire les images par un système aplanétique centré stigmatique, on utilise trois rayons : le rayon parallèle à Δ émerge en passant par F' , le rayon passant par F émerge parallèlement à Δ , le rayon passant par O n'est pas dévié.

Relations de conjugaison de Newton-Descartes :

$$\overline{FA} \cdot \overline{F'A'} = -f'^2 \quad \frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}$$

Une image réelle existe pour une lentille si et seulement si $AA' \geq 4f'$. Un système afocal a ses foyers rejetés à l'infini et le grossissement est

$$G = -\frac{f_1}{f_2}$$

Principe de Huygens-Fresnel : Chaque point atteint par une onde se comporte comme une source secondaire qui émet des ondelettes sphériques, le front d'onde est l'enveloppe de toutes ces ondelettes et l'amplitude complexe en un point est la somme des amplitudes

Formule du prisme : pour un prisme d'angle au sommet A , les angles vérifient $t + t' = A$, $D = i + i' - A$ et on accède alors à :

$$n = \frac{\sin\left(\frac{D_m + A}{2}\right)}{\sin\left(\frac{A}{2}\right)}$$

Critère de Rayleigh : deux sources ponctuelles sont résolues si en incidence normale, l'écart angulaire entre les deux taches vérifie :

$$\Delta\theta \geq 1,22 \frac{\lambda_0}{a}$$

Ondes scalaires lumineuses

Les ondes se propagent dans un milieu diélectrique, linéaire, homogène, isotrope et transparent. L'indice optique est uniforme.

$$c = \frac{c_{vide}}{n} \quad k = nk_{vide}$$

Le chemin optique est $[AB] = n \times AB$.

Théorème de Malus-Dupin : les surfaces d'onde relatives à un point source sont normales aux rayons issus de ce point source. Les chemins optiques entre deux surfaces d'onde sont égaux. Si deux points sont conjugués par un système optique centré, alors le chemin optique ne dépend pas du rayon qui les relie.

Lors du mécanisme d'émission de la lumière, un électron passe d'un état énergétique supérieur à un état inférieur, l'onde lumineuse est modélisée par un train d'ondes d'une durée τ_c (durée de cohérence). Les différents chocs font que les transitions n'ont aucun lien les unes par rapport aux autres.

L'éclairement est la puissance surfacique moyenne reçue en un point d'un récepteur, s'exprimant en $W.m^{-2}$. L'intensité lumineuse (Cd) est :

$$I(M) = \frac{\langle \Pi(M, t) \rangle}{\varepsilon_0 c_{vide}} = n \langle E^2(M, t) \rangle$$

Théorème d'indétermination de Heisenberg : le spectre est d'autant plus étendu et riche en harmoniques que le signal temporel est bref : $\Delta\omega \sim \frac{1}{\tau_c}$.

On dit que deux ondes sont mutuellement cohérentes en un point si le terme d'interférences n'y est pas nul. Nécessairement, les pulsations sont égales et la différence de phase au point regardé doit rester stationnaire.

Interférences I : les trous d'Young

Des sources secondaires subordonnées à une même source primaire (à l'aide d'un diviseur d'onde) sont nécessairement cohérentes. Elles émettent alors des ondes qui interfèrent.

Formule de Fresnel : la répartition de l'intensité résultante en un point est

$$I_{1+2(M)} = I_{1(M)} + I_{2(M)} + 2\sqrt{I_{1(M)}I_{2(M)}} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \delta(M)\right)$$

$$I = 2I_0 \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \delta(M)\right)\right)$$

L'interférence est constructive si $\delta(M) = p \times \lambda_0$ avec p entier relatif (en phase), destructive si $\delta(M) = (2p + 1) \times \frac{\lambda_0}{2}$ (en opposition de phase).

Le contraste en un point où interfèrent les ondes caractérise sa visibilité :

$$C = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}$$

L'ordre d'interférence renseigne sur la nature des franges : $p = \frac{\Phi}{2\pi} = \frac{\delta}{\lambda_0}$.

Lorsqu'on suppose les dimensions transverses très petites devant les dimensions longitudinales, la différence de marche est :

$$\delta(M) \approx n \frac{ax}{D}$$

L'interfrange est alors la période spatiale de l'intensité :

$$i = \frac{\lambda_0 D}{na}$$

Pour observer des franges à grande distance, on utilise une lentille qui va permettre de condenser l'énergie lumineuse qui la traverse et ramener à distance finie un phénomène d'interférences qui a lieu à l'infini.

Dans le cas où la source primaire est étendue avec une certaine taille x_s , $\delta(M) \approx na \left(\frac{x_s}{d} + \frac{x}{D} \right)$.

Critère semi-quantitatif de bon contraste : Pour une source primaire spatialement étendue, le système de franges est relativement bien contrasté tant que $\varepsilon \leq \frac{\lambda_0 d}{na}$. Le contraste est alors $C = \text{sinc} \left(\frac{\pi na}{\lambda_0 d} \varepsilon \right)$.

Pour une source primaire ponctuelle mais non monochromatique, le système de franges est relativement bien contrasté tant que $\delta(M) \ll \frac{\lambda_{0m}^2}{\Delta\lambda_0}$. Cette valeur correspond aussi à la variation de δ entre deux coïncidences. Le contraste résultant est alors $C = \left| \cos \left(\frac{\pi \Delta\lambda_0}{\lambda_{0m}^2} \delta \right) \right|$. Une modulation sinusoïdale de l'éclairement lorsqu'on fait varier la différence de marche est une signature d'une source primaire bi-chromatique.

L'étude d'interférences permet de déterminer l'épaisseur ou l'indice optique d'une lame à face parallèle transparente en utilisant le déplacement de la bande brillante d'ordre zéro et l'invariance de l'interfrange (le déplacement de la BDO est $x_{BDO'} = \frac{(n-1)eD}{a}$).

Interférences II : l'interféromètre de Michelson

On utilise une lame compensatrice pour pallier la différence de chemin optique introduite par la lame séparatrice sur les deux chemins.

Avec une source primaire large, un dispositif à division d'amplitude tel que l'interféromètre de Michelson, fournit une figure d'interférence

lumineuse et bien contrastée mais localisée : il n'y a qu'une seule position du plan de localisation des franges contrastées.

Configuration « lame d'air » : si les miroirs sont symétriques par rapport à la lame séparatrice, alors la différence de marche à l'infini est

$$\delta(M) = 2e \cos \theta$$

La figure d'interférence consiste en anneaux d'égale inclinaison.

Configuration « coin d'air » : éclairé par une source primaire large sous incidence quasi-normale, l'interféromètre fournit des franges rectilignes équidistantes localisées au voisinage du coin d'air,

$$\delta(M) \approx 2ax \quad i = \frac{\lambda_0}{2a}$$

La BDO est sur la droite $y = -\frac{1}{\tan(\alpha+\theta)x}$ et les franges les plus contrastées se trouvent sur la droite d'équation $y = \tan(\alpha + \theta)x$.

Critère de bon contraste des franges : avec une source primaire de longueur de cohérence l_c , le contraste en un point M de l'écran garde une bonne valeur tant que $\delta(M) < l_c$.

Superposition de N ondes mutuellement cohérentes

Conduction d'interférence constructive : on observe un pic d'intensité résultant de l'interférence à l'infini des N ondes si

$$\delta(M) = a(\sin \theta_M - \sin \theta) = p\lambda_0, \quad p \in \mathbb{Z}$$

En posant $u_M = \frac{\sin \theta_M - \sin \theta}{\lambda_0}$ comme fréquence spatiale, alors $\varphi(M) = 2\pi a u_M$ et $\delta(M) = \lambda_0 u_M a$. La condition d'interférence devient $u_M = \frac{p}{a}$.

Les ondes issues des N trous sont mutuellement cohérentes car subordonnées à une même source, si leur phase φ est en progression arithmétique,

$$I(M) = I_{max} \left(\frac{\sin(N\pi a u_M)}{N \sin(\pi a u_M)} \right)^2$$

Le carré est le terme réseau : plus N est grand, plus les oscillations d'intensité entre deux pics ont tendance à disparaître. Ainsi, la figure d'interférences fait apparaître des traits beaucoup plus fins mais beaucoup plus contrastés.

Un réseau est un dispositif périodique qui impose à une onde plane incidente une variation périodique de son amplitude et/ou de sa phase.

Instruments d'optiques

Goniomètre : régler l'oculaire de sorte à voir le réticule sans accommoder, régler l'objectif de sorte à ce que le réticule et son image par le miroir soient nets simultanément, régler le collimateur en faisant en sorte de voir sur le plan du réticule l'image de la fente.

Interféromètre de Michelson : rendre l'espace le plus compact possible, vérifier que la lumière va bien dans les miroirs, régler la symétrie des miroirs et le parallélisme d'abord. Ensuite, ne plus toucher à ces vis et charioter pour avoir enfin le contact optique.

Polariseur dichroïque : placer un premier polaroïd qui va permettre de polariser la lumière dans une direction donnée, puis en prendre un second (rôle analyseur) et le faire tourner parallèlement au plan du premier, observer les diminutions d'intensité en fonction de l'angle.

Ordres de grandeur

Longueurs d'ondes en travaux pratiques : la longueur d'onde du LASER (Light Amplification by Stimulated Emission Radiation) rouge Hélium – Néon utilisé en TP vaut $\lambda = 632,8$ nm. Le doublet jaune orange de la lampe à vapeur de sodium correspond à $\lambda = 589,0$ nm et $\lambda = 589,6$ nm. Le doublet jaune de la lampe à vapeur de mercure correspond à $\lambda = 577$ nm et $\lambda = 579$ nm.

La précision du goniomètre est de l'ordre de la minute d'arc soit $2,9 \cdot 10^{-4}$ rad, la précision du palmer du Michelson est de $10 \mu\text{m}$.

Durée de cohérence : lumière naturelle (10^{-15} s), lampe spectrale raie D sodium (10^{-11} s), laser Helium-Neon multimode (10^{-9} s), laser monomode en laboratoire de recherche (10^{-5} s).

Le temps de réponse de l'œil est de $0,1$ s ; celui d'une photodiode est de l'ordre de $1 \mu\text{s}$. La longueur de cohérence spatiale d'une source primaire est de l'ordre de quelques dixièmes de mm. Pour avoir des franges contrastées en lumière totalement incohérente (lumière blanche), la différence de chemin optique maximale autorisée est de l'ordre du μm : on ne voit alors que quelques franges bien contrastées.

Astuces et méthodes

Calculer la position de la **bande brillante d'ordre 0** permet de comprendre comment passer d'un système connu à un autre (translation).

Attention, une source est **cohérente** si elle est ponctuelle et monochromatique. Les interférences ne s'observent que pour ces sources. Si deux sources sont séparées spatialement, alors on étudie d'abord séparément les phénomènes d'interférence et on somme ensuite simplement les intensités.

Distinguer **division** du front d'onde (les ondes qui interfèrent sont séparées au niveau de la source : Young et Lloyd) et division du front d'amplitude (les ondes qui interfèrent sont séparées après la source par un dispositif transparent : Michelson).

Exercices de référence

Rayon des anneaux pour un écran normal : On cherche à étudier la figure d'interférence à deux ondes dans un plan perpendiculaire à l'axe des sources secondaires dans l'expérience des Trous d'Young.

La différence de marche se calcule comme $\delta(M) = na \cos \theta$, la position des franges ne va donc dépendre que de l'inclinaison, on s'attend à des anneaux. Supposons l'ordre d'interférence au centre constructif : $\delta(\theta = 0) = p\lambda_0$, p entier tel que $p = \frac{na}{\lambda_0}$. Le k -ème cercle brillant se trouve alors à un ordre tel que

$p_k = \frac{\delta(\theta_k)}{\lambda_0} = \frac{na}{\lambda_0} \cos \theta_k = p - k$ d'où $\cos \theta_k = 1 - \frac{\lambda_0}{na} k$ soit $\theta_k \approx \sqrt{\frac{2\lambda_0}{na}} \sqrt{k}$, le rayon de la k -ème frange brillante s'obtient en utilisant la tangente : $r_k \approx D \tan \theta_k \approx D \sqrt{\frac{2\lambda_0}{na}} \sqrt{k}$. On remarque que la distance entre les rayons décroît, les cercles se resserrent de plus en plus.

Discerner deux étoiles : on cherche l'écart angulaire α d'un système d'étoiles doubles, on place devant un télescope deux trous d'Young séparés de a et un filtre ne laissant passer que $\lambda = 0,5 \mu\text{m}$. Le contraste est nul la première fois pour $a = 50 \text{ cm}$.

On imagine connaître les positions x_1 et x_2 des deux étoiles, éloignées de D' des trous d'Young. Il y a incohérence spatiale, chacune crée son propre système de franges. Sur un écran placé sur le plan focal image d'une lentille convergente (on retrouve la différence de marche avec le principe du retour inverse de la lumière à l'aide du théorème de Malus sur les plans d'ondes sphériques/plans) :

$I_{1,2} = 2I_0 \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{ax_{1,2}}{D'} + \frac{ax}{f} \right) \right) \right)$, puis avec le principe de superposition $I_{tot} = I_1 + I_2 = 4I_0 \left(1 + \cos \left(\frac{a\pi}{\lambda} \left(\frac{x_1+x_2}{D'} + \frac{x}{f} \right) \right) \cos \left(\frac{a\pi}{\lambda D'} (x_1 - x_2) \right) \right)$, le contraste est $\cos \left(\frac{a\pi}{\lambda D'} (x_1 - x_2) \right)$, il s'annule la première fois pour $\alpha = \frac{x_1 - x_2}{D'} = \frac{\lambda}{2a} = 0,1''$.

Cannelures en lumière blanche : On réalise en lumière blanche une expérience de fentes d'Young classique. On perce à 5 cm du plan médiateur de S_1S_2 une petite fente derrière laquelle se place un prisme disperser. On cherche le nombre de raies sombres dans le spectre formé derrière le prisme sachant $a = 1,5 \text{ mm}$ et $D = 1,5 \text{ m}$.

Chaque longueur d'onde va créer son propre système d'interférences, il faudra ensuite sommer toutes les contributions séparément. Ainsi, pour une fréquence, en supposant que la source de lumière blanche est modélisée par une source de densité spectrale à profil rectangulaire (uniformité), il vient $dI(x) = \frac{2I_0}{v_2 - v_1} dv \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi\delta(x)}{c} v \right) \right)$ d'où $I(x) = \int_{v_1}^{v_2} dI(x)$ puis en réarrangeant, $I(x) = 2I_0 \left(1 + \text{sinc} \left(\frac{\pi(v_2 - v_1)}{c} \delta(x) \right) \cos \left(\frac{\pi(v_1 + v_2)}{c} \delta(x) \right) \right)$. En tout point de l'écran tel que $\delta(x) > l_c$, l'éclairement est uniforme et blanc (blanc d'ordre supérieur). Au centre, le spectre est cannelé : les interférences sont destructives pour une certaine longueur d'onde. Au point considéré, $\delta = \left(p + \frac{1}{2} \right) \lambda = 5 \mu\text{m}$. Ainsi, $\frac{\delta}{\lambda_r} < p + \frac{1}{2} < \frac{\delta}{\lambda_b}$ d'où $p \in \llbracket 6, 11 \rrbracket$.

Anticoïncidences : l'interféromètre est éclairé en lame d'air avec une lampe au sodium à $\lambda_m = 589,3 \text{ nm}$. Pour obtenir deux anticoïncidences successives, il faut déplacer le miroir mobile de $l = \Delta e = 0,3 \text{ mm}$. On cherche le nombre d'anneaux qui ont défilé au centre et la différence $\Delta\lambda$.

Au centre, on a $\delta = 2e$ donc $\Delta\delta = 2\Delta e$ d'où entre deux anticoïncidences successives, $2\Delta e = \frac{\lambda_m^2}{\Delta\lambda}$ soit $\Delta\lambda = 0,6 \text{ nm}$. Puis $N = \frac{\Delta\delta}{\lambda_m} = 1018$ anneaux.

Interrogation d'un réseau : Un réseau de pas inconnu a est éclairé par une lampe au mercure, on se place à l'ordre p et pour la raie violette, $\lambda_0 = 435,8$ nm, la déviation minimale est $D_m = 51^\circ 40'$.

Travailler au minimum de déviation permet une collimation approchée et de trouver les angles avec plus de précision. La condition d'interférence constructives est donnée par la formule des réseaux $a(\sin \theta_M - \sin \theta) = p\lambda_0$ soit en différenciant $\cos \theta_M d\theta_M = \cos \theta d\theta$. La déviation minimale correspond au minimum de $D_m = \theta_M - \theta$ donc à $\frac{d\theta_M}{d\theta} - 1 = 0$ soit $\cos \theta_M = \cos \theta$ d'où $\theta_M = -\theta$ (l'autre solution étant non déviée). La déviation est donc $D_m = 2\theta_M = -2\theta$ d'où enfin $a = \frac{p\lambda_0}{2 \sin \frac{D_m}{2}}$.

Thermodynamique

Description macroscopique de la matière

Un système est ouvert s'il y a échange de matière et d'énergie avec l'extérieur, fermé s'il n'y a pas d'échange de matière avec l'extérieur, isolé s'il n'y a ni échange de matière ni échange d'énergie avec l'extérieur. En particulier, l'énergie totale d'un système isolé est constante. Une grandeur d'état est extensive si elle est proportionnelle à la quantité de matière contenue dans le système étudié.

Une transformation est une évolution entre deux états d'équilibre thermique qui peut être : isochore (V constant), isobare ($P_{\text{système}}$ constante), isotherme ($T_{\text{système}}$ constante), monobare ($P_{\text{extérieur}}$ constante), monotherme ($T_{\text{extérieur}}$ constante), adiabatique (absence de transfert thermique entre le système et l'extérieur $Q = 0$).



Pour un fluide de température T , de pression P et de volume V , les variations du volume sont traduites par le coefficient de dilatation isobare $\alpha = \frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial T} \Big|_P$ et le coefficient de compressibilité isotherme $\chi = -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial P} \Big|_T$, tous deux nuls pour un système en phase condensée idéale.

Loi du gaz idéal : la plupart des gaz peuvent être décrits à faible pression par le modèle du gaz idéal

$$PV = nRT \quad P = n^* k_B T$$

Pour un gaz idéal à l'équilibre thermodynamique, la température est liée à l'agitation désordonnée et la pression à la force sur les parois :

$$\frac{1}{2} m v_{qm}^2 = \frac{3}{2} k_B T \quad P = \frac{1}{3} n^* m v_{qm}^2$$

Le gaz parfait est un gaz idéal, son énergie interne molaire à l'équilibre thermodynamique est proportionnelle à la température :

$$U = \frac{3}{2} nRT$$

Modèle de Van der Waals : il prend en compte le fait que les particules ne sont pas ponctuelles et sont en interaction entre elles,

$$\left(P + \frac{n^2 a}{V^2} \right) (V - nb) = nRT$$

Modèle des sphères dures : pour traiter le phénomène de diffusion, le libre parcours moyen correspondant à la distance moyenne séparant deux collisions est donné par :

$$l \sim \frac{1}{\sigma n^*} \sim \frac{k_B T}{\sigma P}$$

Un gaz dont le libre parcours moyen est très grand devant les dimensions caractéristiques du récipient qui le contient peut être considéré idéal.

Principes fondamentaux de la thermodynamique

Principe zéro : deux corps mis en contacts tendent à acquérir un état d'équilibre thermique et à avoir la même température.

Un système peut recevoir de l'énergie sous deux formes, le travail associé aux variations des paramètres macroscopiques et la chaleur due aux chocs microscopiques.

Le travail élémentaire des forces de pression qui s'exercent est :

$$\delta W_P = -P_{ext}dV$$

On a donc dans le cas d'une seule paroi mobile $W = -\int_{V_i}^{V_f} P_{ext}dV$. Dans le cas d'une transformation brutale, $W = -P_f\Delta V$. Dans le cas d'une évolution isobare à P_0 , $W = -nR\Delta T = P_0\Delta V$. Dans le cas d'une évolution isotherme à T_0 , $W = -nRT_0 \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right)$. On peut le lire comme l'aire sous la courbe dans un diagramme de Clapeyron.

L'énergie totale d'un système thermodynamique est la somme de son énergie cinétique macroscopique du fait de son mouvement d'ensemble, de son énergie potentielle due aux interactions conservatives avec l'extérieur, de son énergie cinétique microscopique des particules dans le référentiel barycentrique du système et de son énergie potentielle d'interaction avec les divers constituants.

Premier principe : il existe une fonction d'état extensive U associée à tout système thermodynamique fermé appelée énergie interne pour laquelle,

$$d(E_c + E_{pot} + U) = \delta W_{éch} + \delta Q_{éch}$$

Une évolution est quasi-statique si le système évolue suffisamment lentement en passant par une succession d'états d'équilibre infiniment voisins. Monobare et monotherme deviennent alors isobare et isotherme. Une évolution est réversible si elle est quasi-statique et si le système peut repasser par les mêmes états d'équilibre par renversement du temps.

La capacité thermique à volume constant est $C_V = \left.\frac{\partial U}{\partial T}\right|_V$ et $c_{Vm} = \frac{C_V}{n}$. L'énergie interne d'un système en phase condensée incompressible et indilatable ne dépend que de la température : $dU = C_V(T)dT$.

Loi de Dulong et Petit : pour les solides cristallins, $c_{Vm} \approx 3R$.

La capacité thermique à volume constant d'un gaz parfait monoatomique est $C_V = \frac{3}{2}nR$ et $U = C_V T$, pour diatomique $C_V = \frac{5}{2}nR$.

L'enthalpie $H = U + PV$ est une fonction d'état additive et pour une transformation monobare d'un système au repos

$$\Delta H = Q_{éch} + W_{autre,éch}$$

La capacité thermique à pression constante est $C_P = \left.\frac{\partial H}{\partial T}\right|_P$ et $c_{Pm} = \frac{C_P}{n}$. L'enthalpie d'un système en phase condensée incompressible et indilatable ne dépend que de la température : $dH = C_P(T)dT$.

Relation de Mayer : pour un gaz parfait, on pose $\frac{C_P}{C_V} = \gamma$ et on a

$$C_P - C_V = nR \quad C_{Pm} = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} \quad C_{Vm} = \frac{R}{\gamma - 1}$$

Pour un gaz parfait monoatomique, $\gamma = \frac{5}{3} \approx 1,7$ diatomique $\gamma = \frac{7}{5} \approx 1,4$.

Second principe : il existe une fonction d'état extensive S associée à tout système, appelée entropie, telle qu'au cours d'une évolution spontanée, l'entropie de l'univers ne peut qu'augmenter.

Inégalité de Clausius : (égalité si et seulement si la transformation est réversible) pour un système se trouvant en contact avec des thermostats,

$$\Delta S \geq \int_{t_i}^{t_f} \frac{\delta Q_{éch}}{T}$$

L'entropie d'échange est $S_e = \int_{t_i}^{t_f} \frac{\delta Q_{éch}}{T}$ qui n'est pas une fonction d'état, l'entropie créée est $S_c = \Delta S - S_e$, toujours positive.

Une évolution adiabatique réversible est isentropique.

Identités thermodynamiques : pour un système fermé homogène,

$$dU = TdS - PdV \quad dH = TdS + VdP$$

Pour un gaz parfait,

$$dS = nR \left(\frac{1}{\gamma - 1} \frac{dT}{T} + \frac{dV}{V} \right) = nR \left(\frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{dT}{T} - \frac{dP}{P} \right) = \frac{nR}{\gamma - 1} \left(\frac{dP}{P} + \gamma \frac{dV}{V} \right)$$

Lois de Laplace : pour une transformation isentropique,

$$PV^\gamma = C^{ste} \quad TV^{\gamma-1} = C^{ste} \quad T^\gamma P^{\gamma-1} = C^{ste}$$

Pour une phase condensée idéale, $dS = C \frac{dT}{T}$.

Machines thermiques

Dans une machine cyclique ditherme, un système fermé (un fluide en général) décrit une succession d'évolutions qui le ramène à son état initial en échangeant un travail W_σ avec l'extérieur et en réalisant des transferts thermiques Q_c et Q_f avec une source chaude et une source froide :

$$W_\sigma + Q_c + Q_f = 0 \quad \frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f} \leq 0$$

Théorème de Kelvin : une machine monotherme en fonctionnement cyclique est nécessairement un récepteur.

Principe de Carnot : pour un cycle moteur, l'agent thermique doit recevoir par transfert thermique de l'énergie d'une source chaude et en fournir à la source froide.

Théorème de Carnot : le rendement (utile sur consommé) est majoré : $r \leq 1 - \frac{T_f}{T_c}$ pour un moteur et $\eta \leq \frac{T_f}{T_c - T_f}$ pour un réfrigérateur.

Premier principe industriel : en écoulement permanent (lorsque les paramètres d'états du fluide et des différents organes sont stationnaires), le débit massique est uniforme et entre deux points de l'écoulement,

$$\Delta [h + e_c + e_p]_{\text{entrée}}^{\text{sortie}} = w_{\text{utile}} + q$$

Potentiels thermodynamiques

Un potentiel thermodynamique, lié à un système soumis à des contraintes extérieures, est une fonction qui dépend des paramètres d'état du système et, éventuellement, des contraintes, et qui doit nécessairement diminuer lors de l'évolution du système jusqu'à atteindre une valeur minimale correspondant à l'équilibre.

Pour l'évolution monotherme d'un système fermé, avec $F^* = U - T_0S$ le critère d'évolution spontanée est $\Delta F^* \leq W_{\text{éch}}$. La fonction d'état énergie libre (Hemholtz) est $F = U - TS$. En posant $G^* = U + P_0V - T_0S$ pour l'évolution monobare et monotherme d'un système fermé, le critère d'évolution spontanée est $\Delta G^* \leq W_a$. La fonction d'état enthalpie libre (Gibbs) est $G = H - TS$. On a $dF = -SdT - PdV$, $dG = -SdT + VdP$.

La condition d'échange de matière entre deux phases d'un corps pur est $dn_1 + dn_2 = 0$ et alors $dG = -SdT + VdP + \sum g_i dn_i$. A pression, température fixées, l'évolution d'un système diphasique a lieu dans le sens d'un enrichissement de la phase dont le potentiel chimique est le plus faible.

Formule de Clapeyron : la chaleur latente est une variation d'enthalpie, proportionnelle à une variation d'entropie :

$$l_{1 \rightarrow 2}(T_0) = T_0(s_2 - s_1) = T_0(v_2 - v_1) \frac{dP}{dT}$$



Transferts thermiques

Il existe trois modes de transfert d'énergie thermique : convection (déplacement de matière), conduction (diffusion sans déplacement macroscopique de matière), rayonnement (onde électromagnétique).

L'énergie thermique, le flux thermique, le vecteur densité de courant thermique et la puissance thermique sont reliés par :

$$\delta^2 Q = \vec{j} \cdot \vec{dS} dt = d\Phi dt \quad \delta Q_{(S)} = P_{th} dt \quad P_{th(S)} = \int_{M \in (S)} \vec{j} \cdot \vec{dS}$$

Equation de conservation de l'énergie : pour un corps en phase condensée incompressible et indilatable,

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} + \text{div}(\vec{j}) = p_{source}$$

Loi de Fourier : valable lorsque le gradient thermique n'est pas trop intense et ne varie pas trop brutalement, quand le milieu est isotrope, elle relie l'inhomogénéité d'un champ de température au transfert thermique :

$$\vec{j}(M) = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}}(T(M))$$

Loi de Wiedemann-Franz : elle relie les conductivités électrique et thermiques, $\frac{\lambda}{\gamma} = \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{k_B}{e}\right)^2 \times T = 7.10^{-6}$ (SI) à température ambiante.

Equation de diffusion : elle présente une irréversibilité et traduit l'inefficacité du transfert thermique s'il n'est pas entretenu sur des temps longs

$$\Delta T - \frac{\rho c}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{\lambda} p_{source} = 0$$

Il est possible de définir une résistance thermique en posant

$$P_{1 \rightarrow 2} R_{th} = T_2 - T_1 \quad R_{th} = \frac{l}{\lambda S}$$

Les associations en série/dérivation se font comme en électrocinétique, le diviseur de température donne $T_1 - T_{1/2} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} (T_1 - T_2)$.

Bilan entropique : en régime permanent, on accède à l'entropie créée par unité de temps et de volume par un bilan infinitésimal qui prouve que la création d'entropie est due à une inhomogénéité de température

$$\dot{s}_c = \lambda \left(\frac{d \ln T}{dx} \right)^2$$

Homogénéisation de température : Deux thermostats T_1 et T_2 reliés par un tube calorifugé de longueur L ont en régime permanent un profil affine de température $T(x) = \frac{T_2 - T_1}{L} x + T_1$. Si on retire les thermostats, le tube s'homogénéise à $T_0 = \frac{T_2 + T_1}{2}$ après un régime transitoire stationnaire :

$$T(x, t) = T_0 + \frac{T_1 - T_2}{L} \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos\left(\frac{2n+1}{L} \pi x\right) e^{-\left(\frac{2n+1}{L} \pi\right)^2 Dt}$$

Le transfert conducto-conductif consiste à considérer qu'au voisinage d'une paroi en contact avec un fluide, il existe une couche limite qui sert à adapter la composante tangentielle du champ de vitesse du fluide, qui passe d'une valeur nulle sur la paroi à une vitesse stationnaire suffisamment loin. La dimension vérifie $\delta = \sqrt{\frac{\eta}{\rho V L}} = \sqrt{\frac{1}{Re}}$.

Modèle de Newton : la puissance cédée par la paroi au fluide, à travers une surface d'échange S s'écrit avec $h_{cc} = \frac{\lambda}{\delta}$ et $R_{cc} = \frac{1}{h_{cc} S}$:

$$P_{paroi \rightarrow fluide} = h_{cc} S (T_p - T_f)$$



Diffusions de particules

Loi de Fick : une inhomogénéité de la densité particulaire caractérisée est source d'un phénomène de diffusion de particules qui tend à réduire le déséquilibre et rendre la concentration uniforme.

$$\vec{j}(M) = -D \overrightarrow{\text{grad}}(n(M))$$

Loi de Planck : le rayonnement d'équilibre est le rayonnement électromagnétique qui règne dans l'enceinte à l'équilibre thermodynamique. Il est à spectre continu et il ne dépend que de la température et non de la nature ou de la composition du corps émetteur.

Loi de Wien : à une température donnée, la densité spectrale de puissance surfacique émise a un profil qui présente un maximum pour une longueur d'onde vérifiant $\lambda_m T = 3.10^{-3} \text{ m.K}$.

Loi de Stephan : la puissance surfacique totale émise par un corps en équilibre thermique et radiatif est $\Pi_{th} = \sigma T^4$.

Astuces et méthodes

Attention à bien se placer en **Kelvin** pour les calculs directs.

Lorsqu'un système est composite, utiliser les grandeurs extensives pour appliquer un **principe de superposition**. Un système isolé a une variation d'énergie nulle, ce qui sert pour les changements d'états. Les **variables d'état** sont pratiques car il suffit de les connaître au début et à la fin, en particulier leur différence sur un cycle thermodynamique est nulle.

Pour le transfert thermique, réfléchir en fonction des données sachant que $\delta Q = n c_p dT - V dP = n c_v dT + P dV = l dx$.

Toute se joue dans le vocabulaire : calorifugé, brusque, parois athermanes → adiabatique ; changement d'état → monobare à pression et température constantes et connues (donc enthalpie), ...

Un moteur est utile si $W_G < 0$. Le transfert thermique utile d'une pompe à chaleur dépend de son utilisation (climatiseur ou chauffage).

Lorsque l'on peut se ramener à une divergence de densité de courant thermique nulle, utiliser la **conservation du flux thermique** et donc poser une puissance thermique constante. Relier alors $\delta Q = P dt = \frac{T-T_0}{R} dt$.

Penser à faire des **analogies** avec l'électrostatique et l'électrocinétique pour les transferts thermiques est judicieux.

Pour déterminer des grandeurs à partir de lectures de diagramme, bien repérer que les points sur la courbe de saturation ont une **entropie connue** (dans un tableau), et déterminer les grandeurs restantes par un calcul de variation (à l'aide du premier principe ou du second en se plaçant sur une transformation réversible). Le cas échéant, utiliser les propriétés du titre massique en vapeur à l'aide d'un **théorème des moments**.

Ordres de grandeur

Les CNTP (normales) correspondent à 273 K, $1,01.10^5 \text{ Pa}$ et les CSTP (standard) à 298 K, $1,00.10^5 \text{ Pa}$. Pour l'air ambiant, on a $\alpha \approx 10^{-2} \text{ K}^{-1}$ et $\chi \approx 10^{-5} \text{ Pa}^{-1}$. Dans l'air ambiant, la plupart des particules ont une vitesse proche de 500 m.s^{-1} . A 298 K, la conductivité thermique de l'argent et du cuivre est proche de $400 \text{ W.K}^{-1}.\text{m}^{-1}$, celle de la laine de verre est $4.10^{-2} \text{ W.K}^{-1}.\text{m}^{-1}$, celle de l'eau est $0,6 \text{ W.K}^{-1}.\text{m}^{-1}$ et celle de l'air est $2,5.10^{-2} \text{ W.K}^{-1}.\text{m}^{-1}$.

$$N_A = 6,02.10^{23} \text{ mol}^{-1}. R = 8,314 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}. k_B = 1,38.10^{-23} \text{ J.K}^{-1}.$$

Air : 29 g.mol⁻¹ (masse molaire), 1,2 kg.m⁻³ (masse volumique), 0,72 kJ.kg⁻¹.K⁻¹ (capacité thermique à volume constant), 1,0 kJ.kg⁻¹.K⁻¹ (capacité thermique à pression constante).

Eau : 18 g.mol⁻¹ (masse molaire), 10³ kg.m⁻³ (masse volumique), 4,18 kJ.kg⁻¹.K⁻¹ (capacité thermique de l'eau liquide), 334 kJ/kg (enthalpie de fusion).

Pressions : 10⁻⁹ Pa (Lune), 10 Pa (gaz dans une lampe à incandescence), 10⁵ Pa = 1 bar (Terre), 5 bar (CO₂ dans une bouteille de champagne), 8 bar (vélo de route), 200 bar (bouteille de plongée).

Exercices de référence

Prédiction d'un état final : on introduit 4,00 g d'eau liquide dans une bouteille de 1 L, portée à la température de 100 °C (pression de vapeur saturante de l'eau P_s = 1,013 bar). On cherche la pression finale.

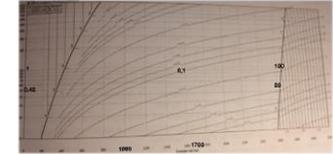
Supposons qu'un équilibre liquide-vapeur se produit. Nous sommes alors à la pression P_s et on peut donc déterminer la masse totale d'eau sous la forme de vapeur si on fait l'hypothèse du gaz parfait. Avec $m_v = \frac{P_s VM}{RT}$, on trouve une masse de vapeur de m_v = 5,88 g, ce qui est supérieur à la masse d'eau introduite, l'hypothèse est donc fautive. Ainsi, l'eau s'est totalement vaporisée et on peut calculer la pression par $P = \frac{mRT}{VM} = 0,69$ bar.

Travail maximal récupérable : On souhaite utiliser une bouteille d'air comprimée pour faire fonctionner un marteau-piqueur avec P₁ = 20 bar, P₂ = 1 bar et T₁ = T₂ = 300 K, V₁ = 100 L.

On utilise la fonction F : le travail maximal récupérable est atteint pour ΔF = ΔU - TΔS puis ΔU = 0, ΔS = ∫₁² $\frac{\delta Q}{T} = \int_1^2 \frac{nc_P dT - V dP}{T} = nRT_0 \ln \frac{P_2}{P_1}$ ainsi

$W_{max} = -nRT_0 \ln \frac{P_2}{P_1} = 600$ kJ. Or le travail de soulèvement est à peu près de 1 J (énergie pour soulever une masse de 10 cm), donc on peut l'utiliser 14 h.

Lecture de courbe : une enceinte rigide de volume 1 L contient 1 g d'eau liquide, en équilibre à la température 80°C. On chauffe à volume constant jusqu'à 100°C. On cherche le transfert thermique nécessaire.



Initialement, h_i = 1000 kJ/kg ce qui fait un titre de x_v = $\frac{h - h_l}{h_v - h_l} = 0,3$. On est à volume massique constant, à l'état final, h_f = 1700 kJ/kg et x_v = 0,6. Pour le transfert, Q = ΔU = m(h_f - h_i) - V(P_f - P_i) = 0,7 kJ.

Thermodynamique ouverte : Pour un puits canadien, le transfert thermique massique est donné par δq = αS(T_{sol} - T(x))dxdt et le fluide avance à la vitesse v. On cherche la température dans le tube.

On considère le système ouvert entre x et x + dx auquel on applique le premier principe industriel en puissances D_mc_pdT = αS(T_{sol} - T(x))dx d'où avec D_m = ρSv il vient $\rho v c_p \frac{dT}{dx} = \alpha(T_{sol} - T(x))$ soit T exponentielle.

Pénétration d'un pilotis : On cherche la vitesse, supposée constante, avec laquelle un pilotis métallique pénètre dans un pain de glace.

Le pilotis métallique est soumis aux forces de pression de la glace du dessus et d'en-dessous donc Newton II, P(x + dx) - P(x) = mg d'où $\frac{dP}{dx} = \rho_{barre} g$. Le bloc métallique est aussi le siège d'un transfert thermique qui s'écrit de deux façons différentes (l'énergie libérée par la fusion est transmise intégralement au pilotis) : δQ = δml_f = -λ $\frac{dT}{dx} S dt$ d'où $v = -\frac{\lambda}{\rho_{glace} l_f} \frac{dT}{dx}$. En utilisant la relation de Clapeyron $l_f = T_0(v_l - v_s) \frac{dP}{dT}$, on obtient $v = \frac{\lambda \rho_{barre} g T_0 (v_l - v_s)}{\rho_{glace} l_f^2}$ de l'ordre du cm/s.

Thermodynamique des systèmes réactionnels chimiques

Bilan énergétique lors d'une réaction chimique

L'équation de réaction traduit le bilan macroscopique :

$$\sum_{\text{réactifs}} \nu_{ri} R_i + \sum_{\text{produits}} \nu_{pi} P_i = 0$$

L'avancement instantané de la réaction est tel que $n_i(t) = n_{i0} + \nu_i \xi(t)$.

Le transfert thermique réalisé au cours d'une réaction chimique dans un réacteur monobare est $Q = \Delta H$, dans un réacteur isochore est $Q = \Delta U$.

On définit l'enthalpie de réaction exprimées par les trois variables de De Donder $\Delta_r H(T, P, \xi) = \left(\frac{\partial H}{\partial \xi} \right)_{T, P}$. L'enthalpie standard de réaction vaut pour une pression standard de 1 bar. L'enthalpie standard varie de :

$$dH^\circ = C_p dT + \Delta_r H^\circ(T) d\xi$$

A une température donnée $\Delta H^\circ = \Delta_r H^\circ(T) (\xi_f - \xi_i)$. La chaleur de réaction est la variation d'enthalpie du système chimique quand il évolue de façon monobare est $Q = \Delta H^\circ$.

La capacité thermique standard de réaction est une combinaison linéaire des capacités thermiques $\Delta_r C_p^\circ(T) = \sum_i \nu_i C_{pmi}^\circ(T)$.



1^{ère} loi de Kirchhoff : l'influence de la température est limitée,

$$\frac{d\Delta_r H^\circ(T)}{dT} = \Delta_r C_p^\circ(T)$$

On peut souvent écrire $\Delta_r H^\circ(T_2) = \Delta_r H^\circ(T_1) + \Delta_r C_p^\circ \times (T_2 - T_1)$.

Si $\Delta_r H^\circ(T) < 0$, elle est exothermique. Si $\Delta_r H^\circ(T) > 0$, endothermique.

L'équation d'un cycle enthalpique, lorsque la transformation est suffisamment rapide (donc de transfert thermique négligeable) :

$$\xi_f \Delta_r H^\circ(T_i) + \int_{T_i}^{T_f} \sum_{k, \text{produits}} n_k C_{pmk}^\circ(T) dT + \sum_k n_k L_k = 0$$

L'état standard de référence d'un élément chimique, à la température T , est l'état standard le plus stable du corps pur correspondant à cette température. L'enthalpie molaire standard de formation d'un corps pur à la température T , notée $\Delta_f H^\circ(T)$, est l'enthalpie standard de réaction consistant en la formation d'une mole de ce corps pur à partir de ses éléments chimiques pris dans leur état standard de référence. Par convention, l'enthalpie standard de formation d'un corps pur simple ou de l'ion hydrogène est toujours nulle.

Loi de Hess : l'enthalpie standard de réaction est combinaison linéaire des enthalpies standard de formation :

$$\Delta_r H^\circ(T) = \sum_i \nu_i \Delta_f H_i^\circ(T)$$

On définit l'énergie standard de réaction par $\Delta_r U^\circ(T) = \left(\frac{\partial U}{\partial \xi} \right)_{T, V}$. La chaleur de réaction à volume constant est la variation d'énergie interne en évolution monochore : $Q = \Delta U^\circ = \Delta_r U^\circ(T) (\xi_f - \xi_i)$.

La capacité thermique standard de réaction à volume constant est une combinaison linéaire : $\Delta_r C_V^\circ(T) = \sum_i \nu_i C_{vmi}^\circ(T)$.



2^{ème} loi de Kirchhoff : l'influence de la température est limitée,

$$\frac{d\Delta_r U^\circ(T)}{dT} = \Delta_r C_V^\circ(T)$$

On peut souvent écrire $\Delta_r U^\circ(T_2) = \Delta_r U^\circ(T_1) + \Delta_r C_P^\circ \times (T_2 - T_1)$.

On a toujours, avec $\Delta v_{gaz} = \sum_i \nu_i$:

$$\Delta_r H^\circ(T) = \Delta_r U^\circ(T) + RT\Delta v_{gaz}$$

Evolution d'un système réactionnel chimique

L'entropie de réaction est $\Delta_r S(T, P, \xi) = \sum_i \nu_i S_{mi}$ où les S_{mi} sont les entropie molaires partielles des constituants.

L'entropie standard de réaction ne dépend que de la température et :

$$\frac{d\Delta_r S^\circ(T)}{dT} = \frac{\Delta_r C_P^\circ(T)}{T}$$

La différentielle de la fonction de Gibbs dépend de l'enthalpie libre de réaction et s'écrit : $dG = -SdT + VdP + \Delta_r G(T, P, \xi)d\xi$.

L'enthalpie libre molaire partielle, ou potentiel chimique d'un des constituants du système est défini par : $\mu_i = G_{mi} = \left(\frac{\partial G}{\partial n_i}\right)_{T, P, n_j \neq n_i}$.

L'enthalpie libre de réaction est donc reliée aux potentiels chimiques :

$$\Delta_r G^\circ(T, P, \xi) = \sum_i \nu_i \mu_i(T, P, \xi)$$

A pression et température constantes, le critère d'évolution spontanée :

$$\Delta_r G(T, P, \xi)d\xi \leq 0$$

Ainsi, si $\Delta_r G(T, P, \xi) < 0$ alors l'évolution est spontanée dans le sens direct $d\xi \geq 0$, si $\Delta_r G(T, P, \xi) > 0$ alors l'évolution est spontanée dans le sens inverse $d\xi \leq 0$.

L'équilibre chimique et son évolution

Le potentiel chimique d'un constituant gazeux dans un mélange idéal de gaz, chaque gaz ignorant les autres, est donné par :

$$\mu_i(T, P) = \mu_i^\circ(T) + RT \ln \frac{P_i}{P^\circ}$$

Pour une phase condensée, solide ou liquide pure, on a $\mu(T, P) = \mu^\circ(T)$.

Le potentiel chimique d'un constituant soluté dans une solution diluée idéale de solvant est (pour le solvant $\mu(T, P) = \mu^\circ(T)$) :

$$\mu_i(T, P) = \mu_i^\circ(T) + RT \ln \frac{c_i}{c^\circ}$$

Les potentiels chimiques dépendent donc des activités des constituants. On définit le quotient de réaction par : $Q = \prod_i a_i^{\nu_i}$. A température et pression fixée, l'enthalpie libre de réaction vérifie :

$$\Delta_r G(T, P) = \Delta_r G^\circ(T, P) + RT \ln Q$$

L'enthalpie libre molaire standard de formation d'un corps pur à la température T , notée $\Delta_f G^\circ(T)$, est l'enthalpie libre standard de réaction consistant en la formation d'une mole de ce corps pur à partir de ses éléments chimiques pris dans leur état standard de référence. Par convention, l'enthalpie libre standard de formation d'un corps pur simple ou de l'ion hydrogène est toujours nulle.

On a une loi analogue à celle de Hess : $\Delta_r G^\circ(T) = \sum_i \nu_i \Delta_f G_i^\circ(T)$.

Approximation d'Ellingham : dans un intervalle de température ordinaire et sans changement d'état, les enthalpies et entropies standard varient peu, donc l'enthalpie libre standard de réaction varie de manière affine

$$\Delta_r G^\circ(T) = \Delta_r H^\circ - T \Delta_r S^\circ$$

La constante d'équilibre thermodynamique $K^\circ(T)$ est définie par :

$$\Delta_r G^\circ(T) + RT \ln K^\circ(T) = 0$$

$$\Delta_r G(T, P) = RT \ln \left(\frac{Q}{K^\circ(T)} \right)$$

Loi d'action des masses de Guldberg et Waage : la constante d'équilibre est égale au quotient de la réaction à l'état d'équilibre, $K^\circ(T) = Q_{\text{éq}}$. L'évolution spontanée s'effectue dans le sens direct tant que $Q_{\text{éq}} < K^\circ$, et dans le sens inverse tant que $Q_{\text{éq}} > K^\circ$.

Relations de Gibbs-Helmholtz et de Van't Hoff: la température a une influence sur la constante d'équilibre

$$\frac{d}{dT} \left(\frac{\Delta_r G^\circ(T)}{T} \right) = - \frac{\Delta_r H^\circ(T)}{T^2} \qquad \frac{d \ln K^\circ(T)}{dT} = \frac{\Delta_r H^\circ(T)}{RT^2}$$

Lois de déplacement des équilibres

Un facteur d'équilibre est une grandeur d'état intensive dont la variation entraîne une modification de l'état d'équilibre du système. La variance d'un système à l'équilibre est le nombre de facteurs d'équilibres indépendants entre eux décrivant l'équilibre du système.

Pour un système chimique initialement à l'équilibre, on dit qu'il y a déplacement d'équilibre à condition que le système ait au moins deux facteurs d'équilibre. S'il n'en a qu'un, c'est la rupture d'équilibre.

La pression n'est pas facteur d'équilibre si $\Delta \nu_{\text{gaz}} = 0$. La température n'est pas facteur d'équilibre pour un équilibre athermique.

Loi de Van't Hoff : Une augmentation de la température d'un système chimique fermé maintenu à une pression constante entraîne un déplacement d'équilibre dans le sens où la réaction est endothermique.

Loi de Le Châtelier : Une augmentation de la pression d'un système chimique fermé maintenu à une température constante entraîne un déplacement d'équilibre dans le sens d'une diminution de la quantité de matière des gaz.

Un constituant actif est un constituant qui participe à la réaction chimique. Un constituant inerte est une substance qui ne participe pas à la réaction chimique.

Loi de modération : En solution aqueuse diluée, l'ajout d'un constituant actif favorise le déplacement d'équilibre dans le sens de consommation de ce constituant à pression, température et volumes constants. A température et pression constantes, l'ajout d'un composant inerte gazeux provoque un déplacement de l'équilibre dans le sens d'une augmentation de la quantité de matière de la phase gazeuse.

Ordres de grandeur, astuces et méthodes

L'enthalpie standard de réaction est environ $\Delta_r H^\circ(T) = 100 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$, la capacité standard de réaction à pression constante est de l'ordre de $\Delta_r C_p^\circ(T) = 1 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$, les variations de températures s'estiment en quelques 1000 K.

La température de flamme s'obtient en écrivant l'égalité du cycle enthalpique en supposant qu'il ne reste plus de réactifs : ξ et les n_k vont être reliés à un n_0 qui disparaîtra de l'équation.

Electrochimie

Réactions d'oxydo-réduction et piles

Un oxydant est une espèce chimique capable de capter des électrons, un réducteur est capable d'en céder. Ils sont liés par la demi-équation redox :



Le nombre d'oxydation est un entier relatif plus élevé lorsque l'élément est oxydé ($no(O) = -II$ et $no(H) = +I$). L'oxydation du réducteur correspond à une augmentation du no alors que la réduction est associée à une diminution. Une réaction redox est un processus d'échange entre deux couples redox : $\text{Ox}_1 + n_1 e^- = \text{Red}_1$ et $\text{Ox}_2 + n_2 e^- = \text{Red}_2$ donnent la réaction $n_2 \text{Ox}_1 + n_1 \text{Red}_2 = n_2 \text{Red}_1 + n_1 \text{Ox}_2$.

Une demi-pile est l'ensemble de l'oxydant et du réducteur d'un couple dans une solution électrolytique, en contact avec un conducteur, l'électrode. Une pile est l'ensemble de deux demi-piles reliées par une jonction électrolytique : dans l'anode \ominus a lieu l'oxydation alors que la cathode \oplus est le siège de la réduction. Pour la faire fonctionner de manière réversible, il faut qu'elle ne débite pas de courant.

Au cours d'une évolution quasi-statique au cours de laquelle l'avancement varie de $d\xi$, la charge échangée vaut $dq = -n_1 n_2 \mathcal{F} d\xi$ et l'enthalpie libre de réaction est proportionnelle à la force électromotrice de la pile : $\Delta_r G(T, P, \xi) = -n_1 n_2 \mathcal{F} e_{\text{pile}}$.

Le potentiel d'électrode d'une demi-pile est la tension entre l'électrode métallique et la solution électrolytique. L'électrode standard à hydrogène est une électrode idéale faisant intervenir le couple ($\text{H}_3\text{O}^+/\text{H}_2$) dont le potentiel standard est nul. Les électrodes de première espèce sont

constituées par un élément en contact avec une solution qui contient un ion relatif à cet élément (ESH), les électrodes de deuxième espèce sont constituées d'un métal recouvert du sel de ce métal et plongeant dans une solution contenant l'anion de ce sel (calomel saturé ($\text{Hg}/\text{Hg}_2\text{Cl}_2/\text{Cl}^-$), les électrodes de troisième espèce sont constituées d'un métal inerte plongeant dans une solution contenant l'oxydant et le réducteur d'un même couple.

Formule de Nernst : le potentiel d'oxydoréduction du couple (Ox/Red) représente une différence de potentiel entre l'électrode et la solution contenant le couple

$$E_{(\text{Ox}/\text{Red})} = E^\circ_{(\text{Ox}/\text{Red})} + \frac{RT}{n\mathcal{F}} \ln \frac{a(\text{Ox})}{a(\text{Red})}$$

La constante d'équilibre d'oxydo-réduction entre deux couples qui réagissent selon $n_2 \text{Ox}_1 + n_1 \text{Red}_2 = n_2 \text{Red}_1 + n_1 \text{Ox}_2$ est :

$$\log K^\circ(T) = \frac{n_1 n_2}{0,059} (E^\circ_1 - E^\circ_2)$$

Une grande valeur de la différence rend compte d'une réaction quantitative. Si $E^\circ_1 > E^\circ_2$, alors c'est Ox_1 qui est réduit (sens direct). Sinon, c'est Ox_2 (sens retour). Deux espèces qui ont des domaines de prédominance disjoints ne peuvent pas coexister et réagissent.

La fonction de Gibbs standard associée à un couple est :

$$\Delta_r G^\circ = -n\mathcal{F}E^\circ$$

Sur le diagramme de Frost, si un point A se trouve au-dessus de la courbe OB , alors l'espèce est instable et se dismute.

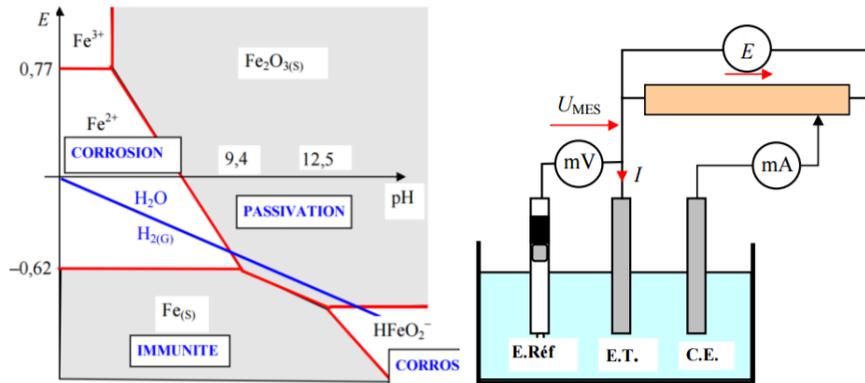


Diagrammes de Pourbaix

Les équations des frontières s'obtiennent avec la formule de Nernst pour les frontières obliques ou horizontales et en utilisant les concentrations (la concentration de travail total et les pressions partielles des gaz sont fixées). A la frontière, il y a équirépartition en concentrations atomiques entre deux espèces solubles. La frontière entre une espèce solide est une espèce dissoute correspond au seuil d'apparition d'un précipité.

Le nombre d'oxydation augmente lorsque le potentiel augmente, l'oxydant est au-dessus du réducteur. Plus une espèce est oxydée et plus le potentiel de la solution est élevé. Plus une espèce est protonée et plus le pH de sa solution est faible. Pour une frontière verticale, on raisonne sur les produits d'acidité et les produits de solubilité.

On construit le diagramme pour une concentration totale en élément étudié soluble et on le superpose à celui du solvant eau. Le domaine d'immunité est le domaine de stabilité thermodynamique du métal (pas oxydé) ; le domaine de corrosion est le domaine où le métal est oxydé sous forme d'espèces solubles ; le domaine de passivité est le domaine où le métal est oxydé en surface, le dépôt d'oxyde le protégeant alors d'une attaque en profondeur.



Courbes courant-potentiel

La mesure de l'intensité du courant d'électrolyse permet d'accéder à la vitesse de la réaction électrochimique :

$$i = -n_1 n_2 \mathcal{F} v_{réaction}$$

Si $i > 0$, on observe une oxydation. Sinon, c'est la réduction.

Pour mesurer les courants, on utilise trois électrodes : l'électrode de travail où a lieu la réaction étudiée, une contre-électrode en milieu inerte assurant la fermeture du circuit électrique et l'électrode de référence pour pouvoir mesurer une différence de potentiel (où le courant est quasi nul).

A travers les courbes courant-potentiel, on examine deux aspects du processus redox : l'aspect thermodynamique par la donnée du potentiel d'équilibre de Nernst, l'aspect cinétique par la donnée de l'intensité du courant et donc de la vitesse de réaction aux électrodes. Un système électrochimique est dit rapide si un faible écart du potentiel imposé par rapport à sa valeur à l'équilibre déclenche l'oxydation ou la réduction de manière quasi-instantanée. Le système est lent s'il est nécessaire d'appliquer une surtension positive pour réaliser une oxydation.

L'intensité est proportionnelle à la concentration du réducteur en solution d'après $i = \frac{DN_A q_{red} S}{\delta} [Red]$. La vitesse d'oxydation finit par atteindre une valeur limite à cause de la diffusion. Lorsque le réactif électroactif est le solvant ou le métal de l'électrode, le problème lié à l'approvisionnement au niveau de l'électrode ne se pose plus et le courant d'électrode n'est plus limité par la diffusion.

Une réaction redox est spontanée dans une pile, forcée dans un électrolyseur (nécessite donc un apport d'énergie sous forme électrique). Pour une électrolyse, la courbe d'oxydation anodique est située à droite de la courbe de réduction cathodique.

Phénomènes de corrosion

Pour protéger le fer qui risque la corrosion par aération différentielle, celui-ci ne doit pas constituer l'anode mais plutôt la cathode d'une pile de concentration. On peut opérer une protection électrochimique cathodique (courant imposé, anode sacrificielle), une protection par revêtement (électrozingage, galvanisation à l'aide du zinc), une protection par réaction chimique superficielle (passivation, parkerisation).

Astuces et méthodes

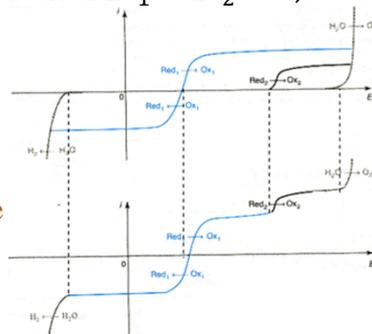


Red est toujours tout seul, l'électron est de l'autre côté. L'oxydant est obligé de monter haut dans la formule de Nernst et les diagrammes. Si la balle est dans ton camp, c'est que le flingue est de mon côté...

Pour équilibrer une réaction redox, on s'occupe **séparément** des demi-équations que l'on équilibre en assurant d'abord la conservation de l'élément commun à l'oxydant et au réducteur, puis l'oxygène avec de l'eau et les hydrogène avec des ions H^+ (on ajoute ensuite suffisamment de HO^- si on est en milieu basique).

Toujours commencer par tracer **l'échelle des potentiels** en prenant bien garde à les écrire au bon pH. La réaction est totale si $E^{\circ}_1 - E^{\circ}_2 > 0,3 V$. Si les espèces sont dans le même domaine, alors la réaction est thermodynamiquement peu favorisée.

Dans le cas de la présence de plusieurs couples redox, on fait la **somme algébrique** des courbes pour déterminer les oxydations susceptibles d'avoir lieu.



Ordres de grandeur

Le phénomène de corrosion dévore 4 à 5% du PNB des pays industrialisés : chaque heure ce sont 500 kg d'acier qui sont détruits aux Etats-Unis. Une maison de 70 m² consomme annuellement 10 MWh, le kWh coûte 15 centimes.

La constante de Faraday $\mathcal{F} = 96,5 \cdot 10^3 C \cdot mol^{-1}$ est la charge d'une mole d'électrons.

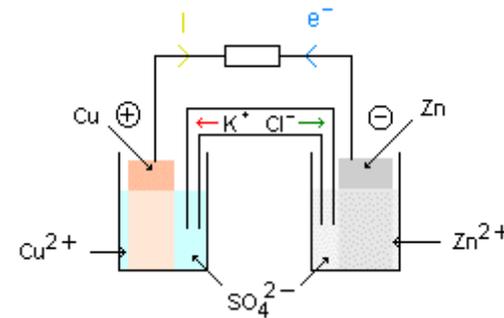
L'eau oxydant : $2H^+ + 2e^- = H_{2(g)}$, $E^{\circ} = 0,00 V$, $E = -0,06pH$. La surtension à courant nul est Pt : rapide ; Fe : $-0,15 V$; Zn : $-0,5 V$.

L'eau réducteur $O_{2(g)} + 4H^+ + 4e^- = H_2O$, $E^{\circ} = 1,23 V$, $E = 1,23 - 0,06pH$. La surtension à courant nul est Pt : $0,5 V$.

L'ECS est représentée par $Hg(l) | Hg_2Cl_2(s) | KCl$ et $E = 0,246 V$ à $25^{\circ}C$.

A $25^{\circ}C$, on peut utiliser $E_{(Ox/Red)} = E^{\circ}_{(Ox/Red)} + \frac{0,059}{n} \log \frac{a(Ox)}{a(Red)}$ car $\frac{RT \ln 10}{\mathcal{F}} \approx 0,06 V$.

La pile Daniell est représentée par $\ominus Zn_{(s)} | Zn^2+_{(aq)} || Cu^2+_{(aq)} | Cu_{(s)} \oplus$. L'intensité est orientée de la borne positive vers la borne négative, les électrons partent depuis l'anode.



Eléments de thermodynamique statistique



Bases de la statique des fluides incompressibles

La résultante des forces de pression dans un fluide au repos est caractérisée par une densité volumique $\overrightarrow{\text{grad}}(P)$ en N.m^{-3} .

Un fluide, soumis à un champ de force extérieur de densité volumique \overrightarrow{f}_v , est en équilibre dans un référentiel galiléen si

$$\overrightarrow{\text{grad}}(P) = \overrightarrow{f}_v$$

Un fluide incompressible est tel que le volume ne dépend pas de la variation de la pression. Si le fluide est de plus homogène, la masse volumique est constante.

Equation locale de la statique des fluides : dans un champ de pesanteur,

$$\overrightarrow{\text{grad}}(P) = \rho \vec{g}$$

Dans un champ de gravité, pour un fluide au repos, on peut simplement écrire $P_A + \rho g z_A = P_B + \rho g z_B$: tout dépend de la hauteur relative.

Principe d'Archimède : la résultante des forces de pression exercée par un fluide statique sur un solide immergé est l'opposé du poids du volume déplacé par ce fluide et le centre de poussée est confondu avec le centre d'inertie :

$$\vec{\Pi} = -\rho_{\text{fluide}} V_{\text{corps}} \vec{g}$$

Théorème de Bernoulli : en dynamique des fluides, dans un écoulement parfait, incompressible, stationnaire, tourbillonnaire évoluant dans un champ de pesanteur, la quantité $\frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz$ est uniforme.

Modèle de l'atmosphère isotherme

Le système étudié est une tranche de gaz d'aire S et d'épaisseur dz . Le champ de pesanteur est uniforme, l'atmosphère est assimilée à un gaz parfait dont la température est constante. La pression à l'équilibre thermodynamique est quasi-uniforme dans une enceinte dont la dimension caractéristique est très petite devant $\frac{RT}{Mg}$:

$$P(z) = P_0 e^{-\frac{Mg}{RT}z}$$

Sachant $k_B = \frac{R}{N_A}$, en notant n^* la densité volumique particulaire, on a

$$n^* = n_0^* e^{-\frac{mgz}{k_B T}} \quad \frac{dN}{N} = \frac{mg}{k_B T} e^{-\frac{mgz}{k_B T}}$$

Facteur de Boltzmann : la probabilité qu'une particule de masse m atteigne l'altitude z vaut $e^{-\frac{mgz}{k_B T}}$.

Etude d'un système à spectre énergétique discret

On considère un système constitué de N particules identiques et indépendantes, en équilibre thermodynamique avec un thermostat. A la température T , la probabilité pour une particule donnée d'occuper l'état d'énergie ϵ_i s'écrit en faisant intervenir la fonction de partition :

$$\mathbb{P}(\epsilon_i) = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n_{\text{max}}} e^{-\frac{\epsilon_k}{k_B T}}} e^{-\frac{\epsilon_i}{k_B T}}$$

A basse température $k_B T \ll \epsilon_2 - \epsilon_1$, le système est gelé dans son état fondamental. Toutes les particules sont au même niveau d'énergie et la valeur moyenne des énergies particulières est $\langle \epsilon \rangle = \epsilon_1$.

A haute température $k_B T \gg \epsilon_{max} - \epsilon_1$, tous les états sont occupés et ce, de manière équiprobable.

L'énergie totale du système est $E = \sum_{k=1}^N \epsilon_k$, sa valeur moyenne est $\langle E \rangle = N \langle \epsilon \rangle = U$, c'est l'énergie interne. La dispersion des valeurs est mesuré par la valeur quadratique moyenne $\Delta E = \sqrt{\langle (E - \langle E \rangle)^2 \rangle}$.

Théorème de fluctuation-dissipation : les fluctuations d'énergie d'un système de N particules sont d'autant plus faibles que le nombre de particules est grand :

$$\frac{\Delta E}{\langle E \rangle} = \frac{1}{\sqrt{N}} \frac{\Delta \epsilon}{\langle \epsilon \rangle}$$

La capacité thermique à volume constant est $C_V = \frac{\partial U}{\partial T} = N \frac{\partial \langle \epsilon \rangle}{\partial T}$.

Pour un système macroscopique, les fluctuations d'équilibre sont quasi-nulles et l'énergie du système en équilibre thermodynamique prend une valeur bien déterminée.

La fonction de partition canonique est $Z = \sum_{k=1}^{n_{max}} e^{-\frac{\epsilon_k}{k_B T}}$ ainsi que le facteur de température inverse $\beta = \frac{1}{k_B T}$ permettent d'écrire les grandeurs thermodynamiques relatives aux systèmes :

$$\langle E \rangle = -\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta} = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} \quad \langle E^2 \rangle = \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial \beta^2} \quad C_V = \frac{\partial \beta}{\partial T} \frac{\partial U}{\partial \beta}$$

Système à deux niveaux non dégénérés : Pour un système à deux états d'énergie $\epsilon_1 = -\epsilon_0$ et $\epsilon_2 = +\epsilon_0$, $Z = 2 \operatorname{ch} \left(\frac{\epsilon_0}{k_B T} \right)$, $\langle E \rangle = -N \epsilon_0 \operatorname{th} \left(\frac{\epsilon_0}{k_B T} \right)$.

Capacités thermiques des gaz et des solides

Les hypothèses statistiques sont les suivantes : uniformité de la répartition des molécules en l'absence de champ extérieur, isotropie du champ de vitesse, indépendance des composantes de vitesse.

Distribution de probabilité de Maxwell-Boltzmann : pour un gaz parfait vérifiant ces hypothèses, la probabilité en vitesse est

$$dP(v_x, v_y, v_z) = \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{2} \frac{mv^2}{k_B T}} dv_x dv_y dv_z$$

La vitesse la plus probable des particules est $v_p = \sqrt{\frac{2k_B T}{m}}$, la vitesse moyenne est $\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m}}$. La seule grandeur physique intéressante est la vitesse quadratique moyenne :

$$v_{qm} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$$

Théorème d'équipartition de l'énergie : si l'énergie d'une particule fait intervenir, de manière indépendante, le carré d'une donnée de position ou de d'une vitesse (linéaire ou angulaire), ce terme est appelé degré de liberté énergétique : chaque degré de liberté contribue pour $\frac{1}{2} k_B T$ à l'énergie moyenne.

La capacité thermique molaire d'un gaz parfait monoatomique est $\frac{3}{2} R$, pour un gaz diatomique $\frac{5}{2} R$. Pour un solide cristallin, c'est $3R$ en vertu de la loi de Dulong et Petit.

Ordres de grandeur

On a $\frac{RT}{Mg}$ qui correspond environ à 8,6 km, soit la hauteur de l'Everest. Le volume émergé de l'iceberg correspond à 10%. Le champ de pesanteur peut être considéré uniforme : il varie de 0,3% pour une variation d'altitude de 10 km.

La masse molaire de l'air est $M = 29 \text{ g.mol}^{-1}$, son volume molaire est $V_m = 25 \text{ L.mol}^{-1}$. A température ambiante, $k_B T \approx 25 \text{ meV}$. L'énergie de première ionisation de l'hydrogène est de 13,6 eV. A l'équilibre thermique pour un gaz parfait, la vitesse quadratique moyenne est de l'ordre de 500 m.s^{-1} .

$$\int_0^{+\infty} v^{2q} \exp(-bv^2) dv = \frac{(2q-1)!}{(q-1)!} \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2q} b^{q+\frac{1}{2}}} \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} v^{2q+1} \exp(-bv^2) dv = \frac{q!}{2 b^{q+1}}$$

Exercices de référence

Oscillations d'un tube en U : on recherche la période des oscillations d'un fluide homogène dans un tube une fois écarté de son équilibre de Δz .

On utilise une approche énergétique puisque le système étudié (tout le liquide contenu dans le tube) n'est pas soumis à une dissipation d'énergie (liquide non visqueux) : l'énergie mécanique est conservée donc $\frac{1}{2}mv^2 + E_{pot}(z) = C^{ste}$. Le travail fourni pour déplacer une masse de z est ainsi de $W = +m'gz$. Or $\Delta E_{pot} = E_{pot}(z) - E_{pot}(z_{\acute{e}q}) = W = \rho g S z^2$. Ainsi, $\frac{1}{2}mv^2 + \rho g S z^2 = C^{ste}$. En dérivant, $\ddot{z} + \frac{2gS}{V}z = 0$ d'où $T = 2\pi \sqrt{\frac{V}{2gS}}$ indépendant du lâcher.

Vidange de deux cuves : on recherche le temps caractéristique de la vidange d'un réservoir de volume V avec une petite ouverture s .

Entre deux instants très proches, $N(t+dt) - N(t) = -\delta N^{sortant}$. Les particules qui sortent sont dans le cylindre de sortie $d\tau = v \cos \theta s dt$. On utilise

la distribution de Maxwell-Boltzmann en écrivant alors que $\delta^2 N^{sort} = n^* v dP(v, \theta) \cos \theta s dt$ avec $dP(v, \theta) = \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{2} \frac{mv^2}{k_B T}} 2\pi v \sin \theta v d\theta dv$ en prenant l'élément volumique sur une couronne. On somme alors sur l'ensemble des possibles, $\delta N^{sort} = n^* \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{\frac{3}{2}} 2\pi \int_0^\infty v^3 e^{-\frac{1}{2} \frac{mv^2}{k_B T}} dv \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \sin \theta d\theta s dt$ d'où finalement $\delta N^{sort} = -\frac{N}{V} \left(\frac{2\pi m}{k_B T}\right)^{\frac{1}{2}} s dt$ d'où $\tau = \frac{V}{s} \sqrt{\frac{k_B T}{2\pi m}}$. Dans le cas de deux réservoirs, on utilise les termes $-\delta N^{sort} + \delta N^{entr}$.

Suspension colloïdale : Exercices 39 page 619 des « Mille et Une questions »

Mécanique quantique

Onde et particules : le quanton

L'hypothèse fondamentale de Louis de Broglie consiste à associer à toute particule matérielle en mouvement une onde.

Relations de Planck-Einstein : Les couples caractérisant l'onde (longueur d'onde, fréquence) et caractérisant la particule (énergie, quantité de mouvement) sont liés par :

$$p = \frac{h}{\lambda} = \hbar k \quad E = h\nu = \hbar\omega$$

Les propriétés ondulatoires d'une particule matérielle en mouvement apparaissent dès lors que la longueur d'onde de de Broglie associée n'est plus négligeable devant les dimensions caractéristiques du système.

La probabilité qu'une mesure de position d'un objet de fonction d'onde $\underline{\psi}(M, t)$ donne, à l'instant t la position M est proportionnelle au module au carré de $\underline{\psi}(M, t)$:

$$dP(M, t) = \left| \underline{\psi}(M, t) \right|^2 d\tau(M) = \underline{\psi}^*(M, t) \underline{\psi}(M, t) d\tau(M)$$

La condition de normalisation est $\int \left| \underline{\psi}(M, t) \right|^2 d\tau(M) = 1$. La densité de probabilité correspond à $\rho(M, t) = \left| \underline{\psi}(M, t) \right|^2$.



Toute quantité mesurable pour laquelle on calcule la valeur moyenne est observable. La position moyenne, dans un déplacement à une dimension est alors $\langle x \rangle = \int x \left| \underline{\psi}(x, t) \right|^2 dx$.

Mécanique ondulatoire de Schrödinger

Pour une particule relativiste, $E = \gamma mc^2$ et $p = \gamma mv$, avec $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$.

Les hypothèses de Schrödinger sont qu'il n'y a pas de création ni de destruction de particules matérielles et toutes les particules matérielles sont traitées de manière non relativiste.

L'énergie totale d'une particule libre (sans forces extérieures) est liée à son énergie de repos et à sa quantité de mouvement : $E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$.

Une particule libre non localisée est associée à une onde plane progressive harmonique $\underline{\psi}(M, t) = \psi_0 e^{+i(kx - \omega t)} = \psi_0 e^{+\frac{i}{\hbar}(px - Et)}$. Si de plus, la particule est non relativiste alors son énergie totale est d'essence cinétique selon $E = \frac{p^2}{2m}$. Elle vérifie l'équation de Schrödinger libre :

$$i\hbar \frac{\partial \underline{\psi}}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \underline{\psi}}{\partial x^2}$$

Dans le cas d'une particule libre non relativiste, la densité de courant de probabilité $\vec{J} = \rho \vec{v} = \left| \underline{\psi}(x, t) \right|^2 \frac{\hbar \vec{k}}{m}$, $J = \frac{\hbar}{m} \Im \left(\underline{\psi}^* \frac{\partial \underline{\psi}}{\partial x} \right)$ vérifie $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial x} = 0$.



Equation de Schrödinger : si la particule est soumise à des forces de circulation conservative associées à l'énergie potentielle $V(x, t)$,

$$i\hbar \frac{\partial \underline{\psi}}{\partial t}(x, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \underline{\psi}}{\partial x^2}(x, t) + V(x, t) \underline{\psi}(x, t)$$

Dans le cas d'un état stationnaire (l'énergie potentielle ne dépend pas du temps), en écrivant $\underline{\psi}(x, t) = \underline{\varphi}(x)g(t)$, la densité de probabilité ne dépend pas du temps. On a alors $g(t) = g_0 e^{-\frac{iE}{\hbar}t}$ et $\underline{\varphi}$ est vecteur propre pour la valeur propre E de l'opérateur hamiltonien :



$$\hat{H}(\underline{\varphi}) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right) (\underline{\varphi}) = E \underline{\varphi}$$

Un niveau d'énergie est dégénéré si plusieurs états stationnaires linéairement indépendants correspondent à la même énergie.

L'équation de Schrödinger obéit au principe de superposition et

$$\rho_{1+2}(x, t) = \rho_1(x, t) + \rho_2(x, t) + 2\Re \left(\underline{\varphi}_1^* \underline{\varphi}_2 e^{-\frac{i(E_1 - E_2)}{\hbar}t} \right)$$

Principe d'incertitude de Heisenberg



L'état dynamique d'une particule matérielle non relativiste qui se déplace est décrit par la somme d'ondes planes de de Broglie (paquet d'ondes) :

$$\underline{\psi}(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(k) e^{i(kx - \omega t)} dk$$

Inégalité de Heisenberg : on ne peut tout localiser avec précision,

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$$

La vitesse de la particule s'identifie à la vitesse de groupe du paquet d'ondes. L'état dynamique d'une particule matérielle localisée dans une région d'extension spatiale Δx est décrit par un paquet d'ondes d'extension spectrale Δk vérifiant $\Delta k \sim \frac{1}{\Delta x}$.

Etats stationnaires dans un potentiel

Les fonctions d'ondes correspondant à des situations physiquement réalisables doivent vérifier : φ doit être finie partout pour éviter les probabilités infinies, n'avoir qu'une valeur à la fois pour que la probabilité soit univoque. Pour des potentiels finis, φ doit être en plus continu et continument dérivable en tout point.

Marche de potentiel : si $V(x) = \begin{cases} V_0 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$, alors on a toujours pour $x \leq 0$, $\varphi(x) = Ae^{ik_0x} + Be^{-ik_0x}$ avec $k_0^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$.

Si $E \geq V_0$ pour $x > 0$, la particule peut franchir la marche $\varphi(x) = Ce^{ikx}$ avec $k^2 = \frac{2m(E - V_0)}{\hbar^2}$, $r = \frac{1-n}{1+n}$ et $t = \frac{2}{1+n}$ avec $n = \frac{k}{k_0}$ indice quantique de la barrière. La particule est alors presque sûrement quelque part.

Si $E < V_0$ pour $x > 0$, $\varphi(x) = Ce^{-kx}$ avec $k^2 = \frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}$. La fonction d'onde évanescence $\underline{\psi}(x, t) = Ce^{-kx} e^{-i\omega t}$ décrit alors la pénétration de l'onde de Schrödinger dans la région interdite à la particule classique.

Confinement dans un puits de potentiel : dans un puits infiniment profond (ce qui empêche de sortir du puits et fixe les conditions de frontières), une particule libre confinée voit son énergie quantifiée,

$$k_n = n \frac{\pi}{l} \quad E_n = \frac{n^2 \hbar^2 \pi^2}{2ml^2} \quad \underline{\psi}(x, t) = \sqrt{\frac{2}{l}} i \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) e^{-\frac{iE}{\hbar}t}$$

Effet tunnel : une barrière de potentiel suffisamment fine peut être traversée avec une probabilité non nulle par une particule :

$$T \approx \frac{16E(V_0 - E)}{V_0^2} e^{-2kl}$$





Si la barrière de potentiel est continue, alors $\frac{P(x+dx)}{P(x)} = e^{-2k(x)dx}$ et la probabilité de passer entre deux positions est donnée par :

$$T(x_1, x_2) = e^{-2 \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{2m(V(x)-E)} dx}$$

Puits double et couplage tunnel : si on considère une particule matérielle confinée dans l'un des deux puits dans l'état fondamental E_1 , φ_d et φ_g les fonctions d'espace vecteur propre du hamiltonien pour E_1 , on définit une fonction d'espace antisymétrique (impaire) par $\varphi_{AS} = \frac{\varphi_d - \varphi_g}{\sqrt{2}}$ et une fonction d'espace symétrique (paire) par $\varphi_S = \frac{\varphi_d + \varphi_g}{\sqrt{2}}$. Ils ont la même énergie si et seulement si les deux puits sont non couplés.

Radioactivité

Règle de Klechkowski : l'énergie d'un électron dans une orbitale (n, l, m_l, m_s) ne dépend que des deux premiers nombres quantiques, elle est croissante avec $n + l$, et croissante avec n à $n + l$ fixé.

Principe d'exclusion de Pauli : deux électrons ne peuvent occuper un même état quantique.

Principe de Hund : les électrons sont répartis de manière à maximiser le nombre d'électrons non appariés, et les électrons célibataires ont tous le même nombre de spin.

Le nombre d'atomes radioactifs décroît exponentiellement avec le temps selon la loi de probabilité $dP = \lambda dt$, $dN = -\lambda N dt$ d'où $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$. Une particule α est un noyau d'hélium produit au cours de la désintégration ${}^A_Z X \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2} Y + {}^4_2 \text{He}$. Entre le noyau fils et la particule α , l'énergie dérivant de la force coulombienne s'écrit $U = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}$.

La durée de vie du noyau est alors égale $\tau = \frac{1}{\lambda} = \frac{R}{T\nu}$.

Astuces et méthodes

Attention pour le calcul des constantes de normalisation, il faut penser à écrire la densité de probabilité et non pas la fonction d'onde de probabilité : on fait généralement apparaître des carrés.

Réécrire l'équation de Schrödinger à l'aide de l'opérateur Hamiltonien à chaque fois dans chaque secteur et bien identifier les conditions de continuité.

Pour la cohérence des signes, se ramener au cas de la mécanique classique pour pouvoir vérifier.

Un éléphant qui court a clairement un comportement particulière plutôt qu'ondulatoire : sa longueur d'onde de De Broglie est toute petite !

Ordres de grandeur

$h = 6,62 \cdot 10^{-34}$ J.s et la constante réduite est $\hbar \approx 10^{-34}$ J.s, pour les calculs de longueur d'onde $hc = 1240$ eV.nm, $mc^2 = 0,511$ MeV pour l'électron.

La probabilité pour qu'une particule d'énergie $E = 0,2$ eV franchisse une barrière de $V = 2$ eV de longueur $L = 1 \text{ \AA} = 0,1$ nm est proche de 80%.

Pour la désintégration α , l'énergie cinétique des particules est proche de 10 MeV alors que la barrière de potentiel est à 40 MeV en prenant. La valeur du rayon est $R = r_0 A^{\frac{1}{3}}$ avec $r_0 = 1,1$ fm. La probabilité de sortir de la barrière coulombienne va de 10^{-28} à 10^{-44} selon l'isotope radioactif.

Exercices de référence

Shimizu et Shimizu : On montre que dans le cas du refroidissement de quelques millions d'atomes au milliKelvin de néon lâchés au-dessus d'une plaque percée de deux fentes parallèles séparés par 6 microns (écran à 85 cm), on ne peut pas savoir dans quel trou passent chaque atome.

La vitesse des électrons vérifie $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{3}{2}k_B T$ soit $v = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$.

L'interfrange doit vérifier $i = \frac{\lambda D}{a}$ avec $\lambda = \frac{h}{mv}$ d'où $i \approx 0,3$ mm. Comment savoir quelle fente a été traversée en un point d'écart angulaire α ? Si l'écran reçoit toute la quantité de mouvement, il suffit de mesurer son déplacement, donc $|p_{2x} - p_{1x}| \gg \Delta p_x$ soit $p \left| \frac{x+\frac{a}{2}}{D} - \frac{x-\frac{a}{2}}{D} \right| \gg \Delta p_x$ soit $\frac{pa}{2D} \gg \Delta p_x$. Mais par l'inégalité de Heisenberg, $\Delta p_x \geq \frac{h}{2\pi\Delta x}$ d'où $\Delta x \gg i$: on n'aurait donc observé des interfranges inférieures à l'écart permis.

Modèle de Bohr : L'atome d'hydrogène est constitué d'un proton fixe et d'un électron ($m \ll M$). Si on postule qu'il existe des orbites stationnaires sur lesquelles l'électron ne rayonne, et qu'il peut rayonner lors de la transition entre deux états, on montre que le moment cinétique de chaque orbite est par $\sigma_n = n\hbar$: l'énergie est aussi quantifiée.

La vitesse de l'électron autour du proton découle de $m \frac{v^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ d'où $v = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m r}}$, l'énergie cinétique est alors $E_c = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r}$ et l'énergie potentielle est $E_p = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$ d'où $E_m = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r}$. Or sur chacune des orbites, on doit avoir $\sigma_n = m r_n v_n = n\hbar$ d'où $r_n = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar}{m e^2} n^2$. On en déduit que l'énergie mécanique est bien quantifiée selon $E_n = -\frac{E_1}{n^2}$ avec $E_1 = \frac{1}{2} m \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar} \right)^2 \approx 13,6$ eV.

Particules dans un double puits de potentiel profond : Exercices 40 & 41
page 457 des « Mille et Une questions »