# TP Informatique : Intégration numérique

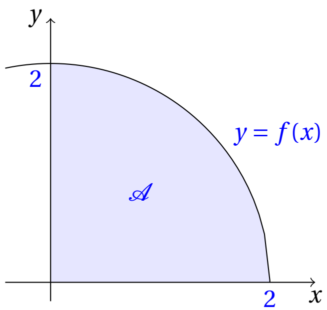
## 1 Surface d'un quart de disque

On souhaite déterminer, par intégration, l'aire d'un quart de disque de rayon 2. Pour ce faire, on définit la fonction

$$f \begin{cases} [0,2] \longmapsto [0,2] \\ x \longmapsto \sqrt{4-x^2} \end{cases}$$

L'aire recherchée est donc

$$\mathscr{A} = \int_0^2 f(\xi)\ \mathrm{d}\xi$$




**1.a** Définir la fonction $f$.

**1.b** Quelle est la valeur théorique de $\mathscr{A}$ ?

**2.a** Écrire une fonction `Rect(f, a, b, n)` qui détermine une approximation de $\int_a^b f(\xi)\ \mathrm{d}\xi$ par la méthode des rectangles gauches composite, lorsque l'intervalle $[a,b]$ est découpé en $n$ intervalles de même largeur.

**2.b** Écrire une fonction `Trap(f, a, b, n)` qui détermine une approximation de $\int_a^b f(\xi)\ \mathrm{d}\xi$ par la méthode des trapèzes composite, lorsque l'intervalle $[a,b]$ est découpé en $n$ intervalles de même largeur.

**2.c** Tester les deux méthodes avec $n=1$, $n=10$ et $n=100$, et vérifier que les méthodes s'approchent bien de la valeur théorique lorsque $n$ augmente.

**3.a** Justifier que, *dans le cas qui nous intéresse*, quel que soit $n$, l'estimation faite par la méthode des rectangles gauches est toujours supérieure à $\mathscr{A}$, et que celle obtenue par la méthode des trapèzes est toujours inférieure à $\mathscr{A}$ (on pourra faire un schéma). Cet encadrement n'est évidemment pas vrai dans le cas général.

La fonction étudiée étant continue et intégrable sur $[a,b]$, les deux méthodes tendent vers la valeur recherchée lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

**3.b** Montrer que l'encadrement permet d'obtenir une estimation à $\varepsilon$ près de l'intégrale recherchée, $\varepsilon$ étant donné, sans avoir besoin de choisir un $n$, et écrire une fonction `IntegreSpecial(f, a, b, eps)` qui retourne une telle estimation.

## 2 Adaptation de la subdivision

Malheureusement, la stratégie précédente ne fonctionne pas dans le cas général, car toutes les fonctions ne sont pas décroissantes et concaves (ou croissantes et convexes) ! Le choix de la bonne valeur de $n$ est donc plus délicat.

On s'intéresse dans un premier temps à la méthode des rectangles gauches composites. Pour déterminer adapter automatiquement le nombre d'intervales à la fonction à intégrer, on considère la suite $(\mathrm{I}_k)$ des valeurs obtenues par la méthode du rectangle gauche lorsque l'on divise l'intervale $[a,b]$ en $n = 6\times 2^k$.

**1.** Écrire une fonction `RectAuto(f, a, b, eps)` qui utilise `Rect(f, a, b, n)` pour déterminer les premiers termes de la suite $(\mathrm{I}_k)$ (soit $\mathrm{I}_0, \mathrm{I}_1, \ldots$) jusqu'à ce que $|\mathrm{I}_{k+1}-\mathrm{I}_k| \leqslant \varepsilon$, et retourne alors la valeur de $\mathrm{I}_{k+1}$.

*Attention, la méthode précédente ne garantit pas que la différence entre l'estimation obtenue et le résultat réel soit inférieure à* `eps`*, contrairement au cas précédent. C'est simplement une façon commode d'adapter le nombre de subdivisions à la fonction étudiée.*

**2.** Tester la fonction `RectAuto(f, a, b, eps)` sur les fonctions suivantes (toutes continues et intégrables sur l'intervale considéré), en prenant `eps = 1e-4`. On modifiera la fonction `RectAuto` afin de savoir également quelle valeur de $n$ a été nécessaire pour le calcul.

| Intégrale | Valeur théorique | Valeur numérique | $n$ |
|---|---|---|---|
| $\int_0^3 \xi^2\ \mathrm{d}\xi$ | 9.0 | | |
| $\int_0^{20\pi} \frac{\sin(\xi)}{\xi}\ \mathrm{d}\xi$ | $\simeq 1.554889$ | | |
| $\int_{0.001}^1 \sin(1/\xi)\ \mathrm{d}\xi$ | $\simeq 0.5040664$ | | |
| $\int_0^5 \mathrm{E}(\xi)\ \mathrm{d}\xi$ | 10.0 | | |
| $\int_0^\pi \cos(48\xi)\ \mathrm{d}\xi$ | 0.0 | | |

On s'efforcera de comprendre les difficultés pratiques éventuelles que peuvent poser chacun des différents cas présentés ci-dessus.

## 3 Amélioration

La fonction précédente évalue en fait plusieurs fois la fonction $f$ en un même point, ce qui est du gaspillage. On peut essayer d'éviter cela.

**1.a** Montrer que l'on peut calculer $\mathrm{I}_{k+1}$ à partir de $\mathrm{I}_k$ et de `Rect(f, a2, b2, 6*2**k)` où $a2$ et $b2$ ont été bien choisis.

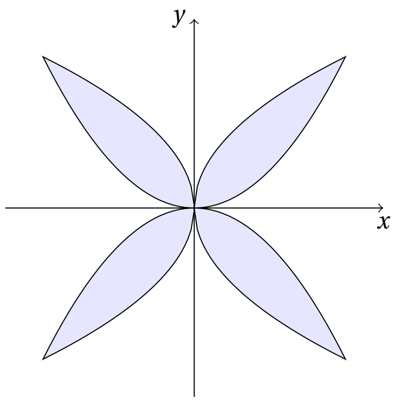
**1.b** Modifier la fonction `RectAuto(f, a, b, eps)` pour tenir compte de cette relation, qui permet de ne jamais évaluer deux fois la fonction au même point, et vérifier son bon fonctionnement sur l'une des fonctions précédentes.

**2.a** Montrer qu'une relation similaire existe pour la méthode des trapèzes composites (la relation entre deux valeurs successives de la suite faisant également appel à la méthode des *rectangles* composites).

**2.b** Si l'on voulait appliquer une stratégie similaire à la méthode des rectangles milieux, et que la première estimation consistait en une division en six intervales, quels seraient les nombres de subdivision des étapes suivantes ?

## 4 Utilisation pratique

Un peintre doit réaliser une rosace similaire à celle ci-dessous. Elle est symétrique par rapport aux axes et aux premières bissectrices. La distance entre les extrémités des deux pétales supérieurs est 3 m. La forme des contours des « pétales » est parabolique, et ils sont tangents aux axes à l'origine.




**1.** En s'aidant des outils développés précédemment, déterminer, au $\mathrm{mm}^2$ près, la surface à peindre, afin de connaître la quantité de peinture nécessaire (certes, une telle précision ne sera certainement pas indispensable !)

## 5 Méthode de Monte-carlo

La méthode de Monte-Carlo (qui tire son nom des casinos de la principauté) consiste, lorsqu'un calcul exact est difficile car nécessitant trop de temps, d'effectuer un certain nombre d'expériences particulières, et d'en tirer des conclusions.

Par exemple, si le calcul précis d'une espérance d'une variable aléatoire est difficile, on effectue un grand nombre de simulations, et on se sert de la moyenne des résultats pour obtenir une approximation de l'espérance en question. Plus le nombre d'expériences est grand, plus on a de chances d'avoir une moyenne proche de l'espérance.

Ce genre d'approche a d'innombrables applications, y compris de nombreuses applications qui ne sont pas directement liées aux probabilité. Par exemple, pour obtenir des images de synthèse de grande qualité, il faudrait envisager tous les trajets possibles de tous les photons dans la pièces, afin de tenir précisément compte des rebonds, réflexions, réfractions, etc. C'est évidemment impossible tant il y a de trajectoires possibles. Toutefois, en lançant un suffisamment grand nombre de photons au hasard (non seulement au départ, mais également à chaque étape d'un rebond sur une surface diffusant la lumière par exemple), on peut s'approcher du résultat souhaité. Les images ainsi obtenues (techniques de *radiosité*) sont alors de bien meilleure qualité que les images de synthèse habituelles.

De façon plus modeste, nous allons ici montrer comment il est possible de déterminer le volume d'une boule de rayon $\mathrm{R} = 1$ dans $\mathrm{R}^3$ à partir de la méthode de Monte-Carlo. Pour le calcul de ce volume, nous n'aurons pas besoin de $\pi$ !

On s'intéresse au cube, dans $\mathbb{R}^3$ muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\right)$, défini par $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $-1 \leqslant y \leqslant 1$ et $-1 \leqslant z \leqslant 1$.

**1.a** Quel est le volume $\mathrm{V}_c$ d'un tel cube ?

On note V le volume de la boule de rayon $\mathrm{R} = 1$ centrée en O, origine du repère.

**1.b** Déterminer la probabilité $\mathscr{P}$ pour un point choisi aléatoirement dans le cube de se trouver dans la boule, en fonction de V et $\mathrm{V}_c$. En déduire $\mathrm{V}_c$ en fonction de V et $\mathscr{P}$.

**2.a** Proposer une fonction `DansBoule(x, y, z)` retournant un booléen indiquant si le point $\left(x, y, z\right)$ se trouve dans la sphère de rayon $\mathrm{R} = 1$.

Pour estimer $\mathscr{P}$, nous allons utiliser la méthode de Monte-Carlo, en choisissant N points aléatoirement dans le cube, et en déterminant la proportion de ces points qui se situent dans la sphère.

On dispose d'une fonction `random()` dans le module `random` qui retourne des flottants choisis aléatoirement dans l'intervalle $[0, 1[$ avec une distribution uniforme.

**2.b** Écrire une fonction `PointAleatoire()` qui retourne une liste `[ x, y, z ]` correspondant aux coordonnées d'un point choisi aléatoirement, grâce à la fonction `random()`, à l'intérieur du cube de côté 2 centré sur l'origine.

**2.c** Écrire une fonction `Proba(N)` qui retourne une estimation de $\mathscr{P}$ à partir de N points aléatoires, dont les coordonnées ont été obtenues avec la fonction précédente.

**2.d** En déduire une fonction `Volume(N)` retournant une estimation du volume d'une boule de rayon $R = 1$ par la méthode de Monte-Carlo, en utilisant N points aléatoires.

**2.e** Tester la fonction pour $N = 100$, $N = 1000$, $N = 10000$ et $N = 100000$, et comparer le résultat à la valeur « théorique » $4\pi/3$.

Notons qu'il n'est pas intéressant d'effectuer $k$ expériences pour un même N et de moyenner les résultats : de par le principe même de la méthode, cela revient très exactement à utiliser la méthode sur $k \times N$ points choisis aléatoirement.

En revanche, on peut vouloir estimer l'écart-type des résultats de plusieurs appels à `Proba(N)`. Cela donne en effet une information quant à la précision du résultat.

**3.** En réalisant $k = 20$ expériences pour $N = 100$ et $N = 10000$, et en collectant les $k$ résultats, calculer l'écart-type pour chaque N. Que pensez-vous de la précision de la méthode ?

La méthode de Monte-Carlo présente surtout un avantage quand le nombre de variables intervnant dans le calcul est très grand.

**4.a** Par une méthode similaire, estimer le volume d'une boule de rayon $R = 1$ dans $\mathbb{R}^{10}$.

Le volume d'une boule de rayon $R = 1$ en dimension $n$ vaut $\pi^{n/2}/(n/2)!$ lorsque n est pair.

**4.b** Quel problème rencontre-t-on pour $\mathbb{R}^{20}$ ou $\mathbb{R}^{50}$ ?