Nombres réels, suites

1 Nombres réels

1.1

→ id, -id $\quad f : x \mapsto x + f(0)$ ou $-x + f(0)$

→ Soit $T_a : x \mapsto x+a$ pour $a \in \mathbb{R}$

1.2

a) → Par l'absurde, supposons que f ne soit pas bornée sur I.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists x_n \in [a,b],\ t.q.\ |f(x_n)| \geq n$$

D'après le théorème Bolzano-Weierstrass, il existe une extratrice $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ t.q. $(x_{\varphi(n)})$ converge.

Alors, il existe $l \in [a,b]$ t.q. $x_{\varphi(n)} \longrightarrow l$.
Par continuité, $f(x_{\varphi(n)}) \to f(l)$

Cependant, par construction, $|f(x_{\varphi(n)})| \geq |f(x_n)| \geq n$.
$|f(x_{\varphi(n)})| \longrightarrow +\infty$.
D'où, contradiction.
f est bornée sur I.

→ Soit $c = \sup f([a,b])$.
$\forall n$, $c - 2^{-n}$ n'est pas un majorant, donc il existe $x_n \in [a,b]$ t.q. $c - 2^{-n} \leq f(x_n) \leq c$
D'après le théorème B-W, il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ t.q. $(x_{\varphi(n)})$ converge.
Alors, il existe $l \in [a,b]$ t.q. $x_{\varphi(n)} \to l$
Par continuité, $f(x_{\varphi(n)}) \to f(l)$
Par construction, $f(x_{\varphi(n)}) \to c$
D'où, $f(l) = c$.

b) $C = \{x \in [a,b] \mid f(x) < 0\}$

$C \neq \emptyset$ car $a \in C$, C est majoré par b

Soit $c = \sup C$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $x_n \in C$ t.q.

$$c - \frac{1}{n} < x_n \leq c$$

donc $x_n \to c$

$\mathcal{C}^0$ de f : $\underbrace{f(x_n)}_{<0} \to f(c)$ $\quad f(c) \leq 0$

Par définition de c $\forall y \in]c, b]$, $f(y) \geq 0$

Par $\mathcal{C}^0$ de f, $f(c) \geq 0$

Ainsi, $f(c) = 0$.

VI $J = f(I)$ est un intervalle

$\iff J$ convexe

$\sim \forall (\alpha, \beta) \in J^2$, $[\alpha, \beta] \subset J$

Soit $\alpha < \beta$ dans J. $\begin{cases} \alpha = f(a) & \text{où } a, b \in I \\ \beta = f(b) \end{cases}$

Soit $\gamma \in]\alpha, \beta[$, $g_\gamma(x) = f(x) - \gamma$

$\begin{cases} g(a) < 0 \\ g(b) > 0 \end{cases}$ et g est $\mathcal{C}^0$ sur $[a,b]$

$\exists\, c \in [a,b]$, $g(c) = 0$, $f(c) = \gamma$.

Donc, $[\alpha, \beta] \subset J$.

Si f ne s'annule pas, f est de signe constante.

1.5 Soit $\varepsilon > 0$, $a \in \mathbb{R}$, SNG, $a \geq 0$

Mq : $A = \{\sqrt{m} - \sqrt{n},\ (m,n) \in \mathbb{N}^2\} \cap [a-\varepsilon, a+\varepsilon] \neq \emptyset$

Soit $f : x \longmapsto \sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$ sur $]0, +\infty[$

$f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$

D'où, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ t.q.

$\forall n \geq N_1, \quad f(n) \leq \varepsilon$

$N_2 = \left\lfloor \dfrac{a}{f(N_1)} \right\rfloor$

$(N_2+1) f(N_1) \in [a-\varepsilon, a+\varepsilon]$

$(N_2+1)\left(\sqrt{N_1+1} - \sqrt{N_1}\right) \in [a-\varepsilon, a+\varepsilon]$

$\sqrt{(N_1+1)(N_2+1)^2} - \sqrt{N_1(N_2+1)^2} \in [a-\varepsilon, a+\varepsilon]$

Donc, A est dense dans $\mathbb{R}$.

1.2 (alternatif)

a) On sait que $c = \sup \{y \in I \mid f \text{ est bornée sur } [a,y]\}$ existe. Supposons que $c < b$

Soit $\varepsilon > 0$, il existe $c' \in C$ t.q. $c - \varepsilon < c' \leq c$

f est bornée sur $[a, c']$

Par $\mathcal{C}^0$, $\exists \varepsilon' > 0$, $\forall x \in]c-\varepsilon, c+\varepsilon[\cap [a,b]$

Donc, il existe $c' > c$, f bornée sur $[a, c']$

$\left.\begin{array}{l} |f(x) - f(c)| \leq 1 \\ |f(x)| \leq 1 + |f(c)| \end{array}\right\}$ f est bornée sur $[a, c+\varepsilon/2]$

NON ! Donc, $c = b$

f bornée sur $[a, b-\varepsilon]$, $\forall \varepsilon > 0$, et f $\mathcal{C}^0$ en b

donc f bornée sur $[a, b]$ car bornée au voisinage de b.

1.3

On note $C = \{ x \in [a,b] \mid [a,x]$ est recouvert par un nombre fini de $J_\lambda \}$

$C \neq \emptyset$ car $a \in C$; C est majorée par b

Soit $c = \sup C$

1) $c \in C$ (?)

En effet, il existe λ_0 t.q. $c \in J_{\lambda_0}$

$$\begin{cases} c = a & \text{OK} \\ c > a \end{cases}$$

$\Downarrow$

Soit $\varepsilon > 0$ t.q. $]c-\varepsilon, c+\varepsilon[\subset J_{\lambda_0}$

BS : il existe $x \in C$ t.q. $c - \varepsilon < x \leq c$

Déf : $[a,x]$ est inclus dans $J_{\lambda_1}, \dots, J_{\lambda_N}$

$$[a,c] = \underbrace{[a,x]}_{\subset J_{\lambda_1} \cup \dots \cup J_{\lambda_N}} \cup \underbrace{[x,c]}_{\subset J_{\lambda_0}}$$

donc $[a,c] \subset J_{\lambda_0} \cup J_{\lambda_1} \cup \dots \cup J_{\lambda_N}$ et $c \in C$

2) $c = b$?

Si $c < b$, on voit que $[a, c+\frac{\varepsilon}{2}] \subset J_{\lambda_0} \cup \dots \cup J_{\lambda_N}$

donc $c + \frac{\varepsilon}{2} \in C$ (ε assez petit)

Contradiction !

D'où $c = b$.

$[a,b]$ est recouvert par un nombre fini de J_λ.

1.4

$(I_n) = (]a_n, b_n[) \downarrow$
$\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+1} \subset I_n$

$\forall n \in \mathbb{N},\ \begin{cases} a_{n+1} \geq a_n \\ b_{n+1} \leq b_n \end{cases}$

bornées par a_0 et b_0

$a_n \to l$
$b_n \to l'$

$a_n < l \leq l' < b_n$

non stationnaire

$\alpha \in [l, l']$
$\forall n \in \mathbb{N},\quad a_n < l \leq \alpha \leq l' < b_n$
$\forall n \in \mathbb{N},\quad \alpha \in]a_n, b_n[$
ie $\quad \alpha \in \bigcap_{n \leq N} I_n$

1.6

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$.

A est dense dans X, si tout point de X est adhérent à A,

→ Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall n \geq n_0,\quad |u_{n+1} - u_n| \leq \varepsilon$
→ $u_{n_0} - v_m \to -\infty$ donc il existe $m_0 \in \mathbb{N}$ t.q.
$u_{n_0} - v_{m_0} \leq x$

Soit $E = \{n \geq n_0,\ u_n - v_{m_0} \leq x\} \neq \emptyset$ et
E majoré car $u_n - v_{m_0} \to +\infty$

Soit $n_1 = \sup E$

Alors, $\quad u_{n_1} - v_{m_0} \leq x < u_{n_1+1} - v_{m_0}$
donc, $\quad u_{n_1+1} \leq u_{n_1} + \varepsilon$
donc, $\quad u_{n_1} - v_{m_0} \leq x < u_{n_1} - v_{m_0} + \varepsilon$

2.1

Posons $u_n = 2 + \sin \log n$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \to 1 \quad ?$$

$$|u_{n+1} - u_n| = |\sin \log(n+1) - \sin \log n| \leq |\log(n+1) - \log n|$$
$$= \left|\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right| \to 0$$

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1\right| \leq \frac{\log(1+\frac{1}{n})}{|u_n|} \leq \log\left(1+\frac{1}{n}\right) \to 0.$$

Int $\exists\, x>0, y>0$ t.q. $\begin{cases} x \notin \mathbb{Q} \\ y \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ $x^y \in \mathbb{Q}$

si $\sqrt{2}^{\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}$ c'est gagné ;

sinon, $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$

$$\begin{cases} \log_{10} 2 = \alpha \in \mathbb{Q} \Rightarrow 10^{\frac{p}{q}} = 2 \\ \phantom{\log_{10} 2 = {}} \frac{p}{q} \quad \Rightarrow 10^p = 2^q \quad \text{NON!} \end{cases}$$

Si (u_n) C.V., (u_{2^p}) C.V.

$\sin(p \underbrace{\log 2}_{\theta})$ CV

$$\underbrace{\sin((p+1)\theta)}_{CV} = \cos p\theta \underbrace{\sin\theta}_{\neq 0} + \underbrace{\sin p\theta \cos\theta}_{CV}$$

donc $\cos p\theta$ CV

$\to e^{ip\theta}$ CV

$$|e^{i(p+1)\theta} - e^{ip\theta}| = |e^{i\theta} - 1| > 0 \quad \text{ABS}$$

2.2

Posons $v_n = x_{n+1} - x_n$ (v_n) bornée

D'après $(*)$ $v_n \geq v_{n-1}$

Donc, $(v_n) \nearrow$, bornée donc cv, soit vers l

Si $l \neq 0$, par ex $l > 0$

Soit $\varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N$ $|x_{n+1} - x_n - l| \leq \varepsilon$

$$\Rightarrow \quad x_{n+1} \geq x_n + \underbrace{l - \varepsilon}_{>0}$$

$$\sum_{k=N}^{n} (x_{k+1} - x_k) \geq (n-N-1)(l-\varepsilon) \to +\infty \quad \lightning$$

<u>Mq</u> : (x_n) C.V.

$(v_n) \nearrow$, cv vers 0

donc $v_n \leq 0$

$x_n \geq x_{n+1}$

$(x_n) \downarrow$, bornée donc CV.

S/ (autre)

$x_{n+1} - x_n \to l$ par limite monotone,

on veut : $l = 0$

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} (x_{k+1} - x_k) \to l$$

$$\frac{1}{n+1} (x_n - x_0) \to l$$

Or (x_n) est bornée, $l = 0$

$e \notin \mathbb{Q}$

Par ABS,

$e = \frac{p}{q} = \frac{A_n}{n!}$

$u_n < e < u_n + \frac{1}{n \cdot n!}$

d'où,

$\underbrace{n!\, u_n}_{N \in \mathbb{N}} < A_n < N + \frac{1}{n}$

abs avec $n \geq 2$

II-3 $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 1$

$$\underbrace{1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{n!}}_{u_n} < e < \underbrace{1 + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{n \cdot n!}}_{v_n}$$

[vérifier $e = \lim u_n$ avec Taylor, puis que (u_n) et (v_n) sont adjacents]

Par Taylor, $e = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = \lim u_n$.

(u_n) est croissante

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)\cdot(n+1)!} - \frac{1}{n!} - \frac{1}{n \cdot n!}$$

$$= \frac{n(n+1) + n - (n+1)^2}{n(n+1)(n+1)!}$$

$$= \frac{n^2 + 2n - n^2 - 2n - 1}{n(n+1)(n+1)!} < 0$$

D'où, $(v_n) \searrow$

$$v_n - u_n = \frac{1}{n \cdot n!} \to 0$$

Donc, (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

→ Soit $u_n = \cos(n!\pi x)$

MQ : (u_n) C.V. pour $x \in \mathbb{Q}$

Soit $x = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$

À partir d'un certain rang, $n!\,x \in \mathbb{Z}$, et $2 \mid n!\,x$, donc $n!\pi x = 0\ [2\pi]$, $u_n = 1$.

(u_n) C.V.

Soit $x = 2e$.
Étudions : $(n!e)_n$

On a : $1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{n!} < e < 1 + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{n \cdot n!}$

$$n! + n! + \frac{n!}{2!} + \dots + 1 < n!e < n! + n! + \frac{n!}{2!} + \dots + 1 + \frac{1}{n}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ t.q.
$\forall n \geq N, \quad \frac{1}{n} \leq \varepsilon$

$$\begin{aligned} U_n &= \cos(n!\pi x) \\ &= \cos(n! 2\pi e) \\ &= \cos(2\pi(n!e - \lfloor n!e \rfloor)) \\ &\geq \cos(2\pi\varepsilon) \end{aligned}$$

$$|U_n - 1| \leq |2\pi\varepsilon - 0| = 2\pi\varepsilon$$

D'où, (U_n) converge vers 1.

2.4.

Notons $a_n \to l$, $b_n \to l'$
Soit $\varepsilon > 0$.
~~→ Si $l = 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ t.q.~~
~~$\forall n \geq N, \quad |a_n| < \varepsilon$~~
~~$\frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$~~

1er cas :
On suppose $a_n \to 0$
(b_n) est bornée, il existe $M \in \mathbb{R}_+$ t.q. $\forall n \in \mathbb{N}, |b_n| \leq M$
$|W_n| \leq \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} |a_i| M \xrightarrow[n]{} 0$ par Cesaro

Il existe $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ t.q.
$\forall n \geq N_1, \quad |a_n - l| \leq \varepsilon$
$\forall n \geq N_2, \quad |b_n - l'| \leq \varepsilon$

2ème cas :

$(a_n) \to l$

$(b_n) \to l'$

$u_n = \underbrace{\frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} (a_i - l) b_{n-i}}_{\to 0}$

$+ \underbrace{\frac{l}{n+1} \sum_{i=0}^{n} b_{n-i}}_{\to ll'}$

$\to ll'$

Soit $n \geq N_1 + N_2$.

$$\frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i} - ll'$$

$$= \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} (a_i b_{n-i} - ll')$$

$$= \frac{1}{n+1} \left(\sum_{i=0}^{N_1} (a_i b_{n-i} - ll') + \sum_{i=N_1+1}^{n-N_2} (a_i b_{n-i} - ll') + \sum_{i=n-N_2+1}^{n} (a_i b_{n-i} - ll') \right)$$

pour $i \in [\![N_1+1, n-N_2]\!]$

$$|a_i b_{n-i} - ll'|$$

$$= |a_i b_{n-i} - a_i l' + a_i l' - ll'|$$

$$\leq |a_i| |b_{n-i} - l'| + |a_i - l| |l'|$$

$$\leq (|l| + \varepsilon) \varepsilon + \varepsilon |l'| = \varepsilon (|l'| + |l| + \varepsilon)$$

pour $i \in [\![0, N_1]\!]$

$$|a_i b_{n-i} - ll'|$$

$$= |a_i b_{n-i} - l b_{n-i} + l b_{n-i} - ll'|$$

$$\leq |a_i - l| |b_{n-i}| + |l| |b_{n-i} - l'|$$

$$\leq |a_i - l| (|l'| + \varepsilon) + |l| \varepsilon$$

De même pour $i \in [\![n-N_2+1, n]\!]$

$$|a_i b_{n-i} - ll'| \leq |b_{n-i} - l'| (|l| + \varepsilon) + |l'| \varepsilon$$

$$\left| \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} (a_i b_{n-i} - ll') \right| \leq \frac{1}{n+1} \left(\sum_{i=0}^{N_1} |a_i b_{n-i} - ll'| + \varepsilon (|l'| + |l| + \varepsilon)(n - N_1 - N_2) + \sum_{i=0}^{N_2 - 1} |a_{n-i} b_i - ll'| \right)$$

$$\longrightarrow 0 + \varepsilon\left(|\ell'|+|\ell|+\varepsilon\right)(n-N_1-N_2)\times\frac{1}{n+1} + 0$$

$$\leq \varepsilon\left(|\ell'|+|\ell|+\varepsilon\right)$$

D'où, $\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i} \to \ell\ell'$.

3.2

Posons $v_n = \ln u_n$, $u_n = e^{v_n}$

$$v_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\sqrt{\frac{k}{n^3}}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{\frac{k}{n^3}} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\sqrt{\frac{k}{n}} + o(1)$$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \sqrt{x}\,dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{\frac{k}{n^3}} + O\left(\frac{k}{n^3}\right)\right)$$

$$= \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}}\right) + \underbrace{O\left(\frac{1}{n}\right)}_{o(1)}$$

$\forall k \in [\![1, n]\!]$,

$$\ln\left(1+\sqrt{\frac{k}{n^3}}\right) = \sqrt{\frac{k}{n^3}} + \underbrace{O\left(\frac{k}{n^3}\right)}_{\frac{k}{n^3}\underbrace{\alpha\left(\sqrt{\frac{k}{n^3}}\right)}_{\text{bornée}}}$$

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^3}\alpha\left(\sqrt{\frac{k}{n^3}}\right)\right| \leq \frac{M}{n^3}\times\frac{n(n+1)}{2} = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

D'où, $u_n \to e^{\frac{2}{3}}$ par continuité de exp.

3.1

Posons $v_n = u_n^{\,n}$

$$\ln v_n = n\ln u_n$$

$$\ln v_n \underset{+\infty}{=} n\ln\left(1+\frac{a}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$\underset{+\infty}{=} n\left(\frac{a}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$\underset{+\infty}{=} a + o(1)$$

$$v_n = e^{a+o(1)}$$

$$u_n^{\,n} = \exp\left(n\ln\left(1+\frac{a}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)$$

$$= \exp\left(n\left(\frac{a}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)$$

$$= \exp(a+o(1))$$

$$\longrightarrow e^a$$

D'où, $v_n \to e^a$.

$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \underbrace{O(x^5)}$

$\alpha(x) x^5$ avec

α bornée au $\mathcal{V}(0)$

Application :

Posons $V_n = \sin\left(\frac{n\pi}{6n+1}\right) + \cos\left(\frac{n\pi}{3n+2}\right)$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{6+\frac{1}{n}}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3+\frac{2}{n}}\right)$$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{6}\left(1 - \frac{1}{6n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3}\left(1 - \frac{2}{3n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)$$

$$= \sin\frac{\pi}{6}\cos\left(\frac{\pi}{36n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \cos\frac{\pi}{6}\sin\left(\frac{\pi}{36n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$
$$+ \cos\frac{\pi}{3}\cos\left(\frac{2\pi}{9n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) + \sin\frac{\pi}{3}\sin\left(\frac{2\pi}{9n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\pi}{36n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$
$$+ \frac{1}{2}\left(1 + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{2\pi}{9n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$= 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{7}{36}\frac{\pi}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$U_n \to e^{\frac{7\sqrt{3}\pi}{72}}$$

2.5 (Suites presque monotones)

a) ($\Rightarrow$) (U_n) converge $\Rightarrow (U_{\sigma(n)})$ est bornée

Soit $\varepsilon > 0$.

(U_n) converge vers l,

$\exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_1 \ |U_n - l| \leq \varepsilon$

donc $\{n \mid |U_{\sigma(n)} - l| > \varepsilon\}$ est majoré par N_2

fini, σ injectif

$\forall n \geq N_2 + 1, \ |U_{\sigma(n)} - l| \leq \varepsilon$

$U_{\sigma(n)}$ converge.

($\Leftarrow$) Avec σ^{-1}.

b) (cas des suites injectives)

Analyse: La suite (u_n) a au moins 2 va dans $\mathbb{R}$ (l et l')

Cas (2 V.A.)

Cas l et l' finis : $\delta = \frac{|l-l'|}{3}$

$L = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cap]l - \frac{\delta}{3}, l + \frac{\delta}{3}[$

$L' = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cap]l' - \frac{\delta}{3}, l' + \frac{\delta}{3}[$

L et L' sont infinis ~~et il existe $N \in \mathbb{N}$~~, ~~$\forall n \in \mathbb{N}$~~,

~~$\sigma(n) \geq N \Rightarrow u_{\sigma(n)} \in L \cup L'$~~

$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \in L \cup L'$

De là, $\forall n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $\sigma(n_0) \geq N$, $\exists n_1, n_2 > n_0$ t.q.

$u_{\sigma(n_0)}, u_{\sigma(n_2)} \in L$ par ex

$u_{\sigma(n_1)} \in L'$ par ex

$n_0 < n_1 < n_2$

$(u_{\sigma(n)})$ n'est pas monotone.

$$(u_{\sigma(n)}) \text{ monotone} \Rightarrow u_{\sigma(n)} \to l$$
$$\Rightarrow \underbrace{u_{\sigma^{-1}(\sigma(n))}}_{u_n} \to l$$

C.N.S. : (u_n) est convergente, et $\{u_n \mid u_n > l\}$ ou $\{u_n \mid u_n < l\}$ est fini.

Réciproque Si $\{n \in \mathbb{N} \mid u_n \leq l\}$ est fini.

→ On suppose $\forall n \geq N, \quad u_n > l$

$u_n - l > 0$ et $u_n - l \to 0$

→ Alors, $u_n - l$ atteint son max (pour $n \geq N$)

Soit $\sigma(N) = \min\{n \geq N \mid u_n = \max\}$ unique

$\sigma(N+1) = \left(n \geq N \mid n \neq \sigma(N), u_n \max\right)$

3.3

a) $\{kx - [kx]\}_{k \in [\![0,N]\!]}$

$$[0,1] = \bigcup_{k=0}^{N-1} \left[\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N}\right]$$

$\exists (k \neq q)$ t.q.

$$|kx - [kx] - px + [px]| \leq \frac{1}{N}$$

$$\left| x - \frac{[kx]-[px]}{k-p} \right| \leq \frac{1}{|k-p| N}$$

$|\{kx - [kx]\}| = N+1$

Sinon, $\exists k \neq p$

$kx - [kx] = px - [px]$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{[kx]-[px]}{k-p}$

$\in \mathbb{Q}$ NON !

b) $u_n = \cos^n(n)$

$I_m = \left[m\pi + \frac{2\pi}{3}, m\pi + \frac{4\pi}{3}\right]$ $\quad l(I_m) = \frac{2\pi}{3} > 1$

Il existe $q_m \in I_m$, $q_m \in \mathbb{N}$, $\quad |\cos q_m{}^{q_m}| \leq \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{q_m} \to 0$

$\exists \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\lim u_{\varphi(n)} = 0$, d'où 0 est une VA.

Montrer que : 1 est aussi une V.A.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists (p_n, q_n) \in \mathbb{N} \times [\![1,n]\!]$ t.q.

$$\left|2\pi - \frac{p_n}{q_n}\right| \leq \frac{1}{n q_n} \to 0$$

$$\Leftrightarrow |2\pi q_n - p_n| < \frac{1}{n}$$

1) (q_n) est non bornée (?)

Si (q_n) est bornée, alors p_n aussi

(sinon $2\pi q_n - p_n$ non bornée)

$\left\{\left|2\pi - \frac{p_n}{q_n}\right|\right\}_{n \in \mathbb{N}}$ est donc fini, donc son inf est atteint.

Or c'est $0 \Rightarrow 2\pi \in \mathbb{Q}$ NON !

$(1+o(\frac{1}{n}))^n \to 1$

2) Quitte à extraire $\lim p_n = \lim q_n = +\infty$

$$\begin{cases} 1 \leq q_n \leq n \\ 1 \leq p_n \leq 2\pi n + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_n = O(n) \\ q_n = O(n) \\ 2\pi p_n - q_n = O(\frac{1}{n}) \end{cases}$$

$$|\cos^{p_n} p_n| = |\cos^{p_n}(2q_n\pi - p_n)|$$

$$= \left|\cos^{p_n}\left(\frac{\alpha_n}{n}\right)\right| \quad \alpha_n \text{ bornée}$$

$$\cancel{\geq \left|\cos\frac{\alpha_n}{n}\right|^n = \exp\left(n \ln\left(1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right)}$$

$$\cancel{\to 1}$$

$$\geq \left|\cos\left(\frac{\alpha_n}{n}\right)\right|^{2\pi n}$$

$$= \exp\left(2\pi n \ln\left(1 - \frac{\alpha_n}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)\right)$$

$$= \exp\left(2\pi n\left(-\frac{\alpha_n}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right)$$

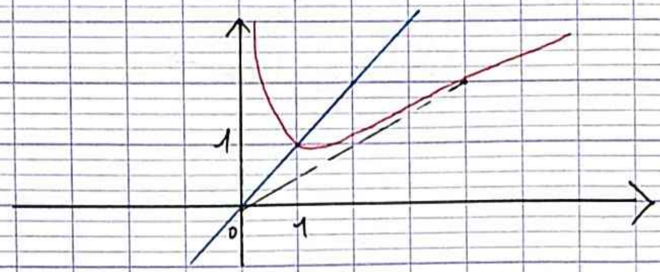
$$= \exp\left(-\frac{2\pi\alpha_n}{n} + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \to 1$$

4.1

- $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{1}{u_n}\right)$

Sans perte de généralité, $u_0 > 0$

Par réc, $u_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq 1$



$I = [1, +\infty[$ stable par f

$f(l) = l \iff l = 1$ pour $l \in [1, +\infty[$

$f(x) - 1 = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x} - 2\right) = \frac{1}{2x}(1-x)^2 > 0$

$f(x) - x$
$= \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) - x$
$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} - x\right) < 0$

$f(x) - x < 0$ ' $u_n \searrow$

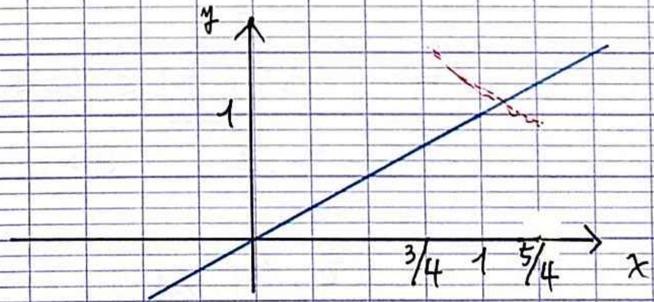
~~$\exists N, \exists q \in]0,1[\quad \forall n \geq N, \ |u_n - 1| \leq q^{2^{N-n}}$~~

Donc, $(u_n) \longrightarrow 1$.

- $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{4}\sin\left(\frac{1}{u_n}\right)$

$f : x \mapsto 1 + \frac{1}{4}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

$f' \; x \mapsto \frac{1}{4}\cos\left(\frac{1}{x}\right) \times \frac{-1}{x^2}$



$\forall n \geq 1, \quad u_n \in \left[\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right]$

$\exists l \in \left[\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right], \quad f(l) = l$

$\varphi(n)+1 \neq \varphi(n+1)$

sur $[3/4, 5/4]$, $|f'| \leq \dfrac{1}{4\left(\frac{3}{4}\right)^2} = \dfrac{4}{9}$

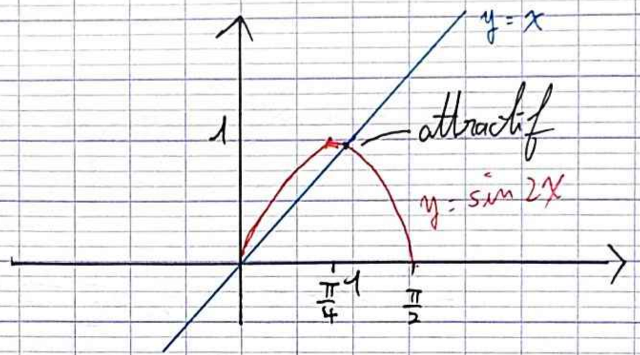
$$|f(x)-f(\ell)| \leq \frac{4}{9}|x-\ell|$$

$$|u_n-\ell| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}|u_1-\ell|$$

Donc, $(u_n) \to \ell$.

$-$ $u_{n+1} = \sin 2u_n$

$f : x \mapsto \sin 2x$
$f' : x \mapsto 2\cos 2x$



SNG, $u_0 \in [0,1]$

$\Rightarrow$ 0 est répulsif : $u_n \to 0 \iff (u_n)$ stationnaire à 0.

$\to$ Si $u_0 \in \left[\frac{\pi}{4}, 1\right]$

$$\frac{\pi}{2} \leq 2u_0 \leq 2 < \frac{2\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{4} \leq \underbrace{\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)}_{\frac{\sqrt{3}}{2}} \leq u_1 \leq 1$$

$\Rightarrow \left[\frac{\pi}{4}, 1\right]$ stable par f

$f'(x) = 2\cos 2x \in [\underbrace{2\cos 2}_{\sim -0,8}, 0] \Rightarrow |f'(x)| < 1$

$$\sup_{x \in \left[\frac{\pi}{4}, 1\right]} |f'(x)| = k < 1$$

$(u_n) \to \ell$
Th point fixe

Si $0 < u_0 < \frac{\pi}{4}$

Soit $N = \max\{k \mid u_0 < \dots < u_k \leq \frac{\pi}{4}\}$

N existe $\left(\begin{array}{l} \text{Sinon } \forall k,\ u_0 < \dots u_k \leq \frac{\pi}{4} \\ \quad u_k \uparrow \lambda \leq \frac{\pi}{4} \qquad \text{NON!} \end{array}\right)$

alors $u_{N+1} > \frac{\pi}{4}$ et $u_{N+1} \leq 1$

$u_{N+1} \in [\frac{\pi}{4}, 1]$

De même, $(u_n) \to l$.

Exo (supplementaire)

$f : [a; b] \to [a, b]$ $\mathcal{C}^0$

$u_0 \in [a, b]$ $u_{n+1} = f(u_n)$

<u>MQ</u>: (u_n) CV $\iff$ $(u_{n+1} - u_n) \to 0$

($\Rightarrow$) clair

D/ ($\Leftarrow$) $Adh(u_n) = [\alpha, \beta]$ (Rappel)

$\alpha = \beta \Rightarrow (u_n)$ CV O.K.

$\alpha < \beta$ Soit $\gamma \in]\alpha, \beta[$

$\gamma = \lim u_{\varphi(n)}$

f $\mathcal{C}^0$ $\underbrace{f(u_{\varphi(n)})}_{u_{\varphi(n)+1}} \to f(\gamma)$

$u_{\varphi(n)+1} \to \gamma$

D'où $\gamma = f(\gamma)$ est un point fixe

Comme $(u_{\varphi(n)}) \to \gamma$, il existe $N \in \mathbb{N}$

t.q. $\forall n \geq N$, $\alpha < u_{\varphi(n)} < \beta$

ainsi, $u_{\varphi(n)} \in Adh(u_n)$

et $f(u_{\varphi(N)}) = u_{\varphi(N)} = u_{\varphi(N)+1}$

la suite stationnaire à $u_{\varphi(N)}$ non !

4.2

a) $x_{n+1} = (1-a_n)x_n + a_n f(x_n)$

$x_{n+1} - x_n = a_n(f(x_n) - x_n)$

$|a_n(f(x_n) - x_n)| \leq a_n M$ car $(f - Id)$ bornée sur $[0,1]$

$\sum a_n(f(x_n) - x_n)$ C.V.A donc CV

et $\sum x_{n+1} - x_n$ CV et $(x_n)_n$ CV.

b) $x_n \to l$ et $f(l) \neq l$

$\exists \delta > 0$, $\forall x \in]l-\varepsilon, l+\varepsilon[$ $|f(x) - x| > \delta$

la fonction $f(x)-x$ ne s'annule pas

par ex : $\forall x \in]l-\varepsilon, l+\varepsilon[$, $f(x) - x \geq \delta$

$\exists N_0$, $\forall n \geq N_0$, $x_n \in]l-\varepsilon, l+\varepsilon[$

Ainsi, $0 \leq a_n = \dfrac{x_{n+1} - x_n}{f(x_n) - x_n} \leq \dfrac{x_{n+1} - x_n}{\delta}$

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = \underbrace{\sum_{k=0}^{N_0} a_k}_{\text{cste.}} + \underbrace{\sum_{k=N_0+1}^{n} a_k}_{\leq \frac{1}{\delta}\left(x_n - x_{N_0+1}\right)}$$

majorée

$$x_n - x_{N_0+1} \to l - x_{N_0+1}$$

D'où, la série de t.g. a_n cv.

c) $f(l) = l$ unique

$\sum a_n \to +\infty$, $a_n \to 0$

Soit $v_n = x_n - l$

$$x_{n+1} - l = (1-a_n)(x_n - l) + a_n\left(f(x_n) - f(l)\right)$$

$$v_{n+1} = (1-a_n)\, v_n + a_n\left(f(x_n) - f(l)\right)$$

$$v_{n+1} - v_n = a_n\left(f(x_n) - f(l) - v_n\right)$$

$$a_n = \frac{v_{n+1} - v_n}{f(x_n) - f(l) - v_n} \leq$$

$$v_{n+1} - v_n = a_n\left(f(x_n) - x_n\right) \leq a_n M$$

$$v_n = \sum v_{k+1} - v_k \leq \sum a_n M$$

$|f'(l)| < 1$, $x_{n+1} - x_n \to 0$ car $a_n \to 0$

donc $a_n[f(x_n) - x_n] \to 0$

à compléter

$\sum a_n$ DV 0 est une valeur d'adhérence

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, |f(x_N) - x_N| < \varepsilon \quad (*)$$

$$\forall \delta > 0 \quad \exists N, \ |x_N - l| < \delta$$ impossible

Sinon $\exists \delta \ \forall n, |x_n - l| \geq \delta$

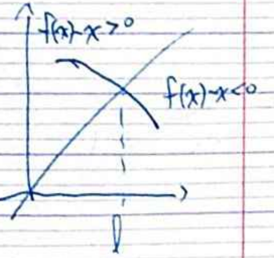
Or $f(x) - x$ ne s'annule pas

sur $[0,1] \setminus]l-\delta, l+\delta[$ $\quad \varepsilon = \min\limits_{|x-l| \geq \delta} |f(x) - x| > 0$

$|f'(l)| < 1$ pour δ assez petit $x_N \in]l-\delta, l+\delta[$

$$n \geq N \quad \begin{cases} x'_{n+1} = f(x'_n) \to l \text{ et } x_{n+1} - x_n \to 0 \\ x_n = x_N \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_n \to 0^+ \\ \sum a_n \text{ DV} \end{cases}$$



$l \in]0,1[$

HYP: $x_{n+1} - x_n = a_n [f(x_n) - x_n]$

1) $(a_n) \to 0$ donc $x_{n+1} - x_n \to 0$

2) $a_n \geq 0$ donc $x_{n+1} - x_n$ et $f(x_n) - x_n$ ont le même signe

3) Si $f(x_n) - x_n \geq \varepsilon$ apcr, il vient : $\frac{x_{n+1} - x_n}{\varepsilon} \geq a_n$ a.p.c.r. $\Rightarrow \sum a_n$ CV NON! $\{n \mid f(x_n) - x_n < \varepsilon\}$ est infini

Si $f(x_n) - x_n \leq -\varepsilon$ apcr, il vient : $\frac{x_n - x_{n+1}}{\varepsilon} \geq a_n$ apcr $\Rightarrow \sum a_n$ CV NON! $\{n \mid f(x_n) - x_n > -\varepsilon\}$ est infini

On choisit N : $\begin{cases} \forall p \geq N, \ |x_{p+1} - x_p| < \varepsilon \\ f(x_N) - x_N > 0, \ x_{N+1} - x_N > 0 \\ \quad \text{et} \quad x_N < l \end{cases}$

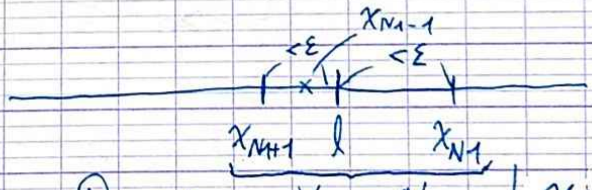
<u>tant que</u>: $n \geq N$ et $x_{n+1} - x_n \geq 0$, la suite croît. Si cela a toujours lieu, x_n CV.

Sinon : $\exists N_1 > N_2$, $x_n \nearrow$ jusqu'à $n = N_1$ et

$x_{N_1+1} - x_{N_1} < 0$

$f(x_{N_1}) - x_{N_1} < 0$ $\quad \begin{cases} x_{N_1-1} \leq l < x_{N_1} \\ x_{N_1+1} < x_N \end{cases}$

Bref,



De même, $\forall n \geq N_1$, $|x_n - l| < \varepsilon$

4.3 $u_0 \in]0,1[$

OBS $u_{n+1} \leq u_n^2 \frac{1}{u_n} = u_n$ donc $u_n \searrow l$

ABS Si $l>0$, $E\left(\frac{1}{u_n}\right) = \frac{u_{n+1}}{u_n^2} \to \frac{1}{l}$ $E\left(\frac{1}{u_n}\right)$ stationnaire à p

$p \leq \frac{1}{u_n} < p+1$

$\frac{1}{p+1} < u_n \leq \frac{1}{p}$

Si $\exists n$, $u_n = \frac{1}{p}$ $u_{n+1} = u_n$ stationnaire

Si $\forall n$, $\frac{1}{p+1} < u_n < \frac{1}{p}$

$\frac{p}{(p+1)^2 p}$

p^2+2p+1

$\frac{1}{p+2+1}$

$u_{n+1} = p u_n^2$ a.p.cr. lors $u_n \to 0$ NON!

4.4

$ch\alpha = \frac{e^\alpha + e^{-\alpha}}{2}$

$sh\alpha = \frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{2}$

$(ch\alpha)^2 - (sh\alpha)^2 = 1$

$\frac{1+ch\alpha}{2}$

$= ch\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2$

$v_0 = u_0 ch\alpha$

$v_1 = \frac{u_0 + v_0}{2} = u_0\left(\frac{1+ch\alpha}{2}\right) = \left(ch\frac{\alpha}{2}\right)^2 u_0$

$u_1 = (u_0 v_1)^{1/2} = u_0 \sqrt{\frac{1+ch\alpha}{2}}$

$= u_0 \frac{e^\alpha + e^{-\alpha} + 2}{4}$

$= u_0 \frac{e^{\frac{\alpha}{2}} + e^{-\frac{\alpha}{2}}}{2} = u_0 ch\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

$v_2 = \frac{1}{2}(u_1 + v_1) = \frac{u_0}{2}\left(\frac{1+ch\alpha}{2} + ch\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)$

$u_2 = (u_1 v_2)^{1/2} = u_0 \sqrt{\frac{1}{2} ch\frac{\alpha}{2}\left(\left(ch\frac{\alpha}{2}\right)^2 + ch\frac{\alpha}{2}\right)}$

$v_n = u_n ch\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)$

il vient : $v_{n+1} = \frac{1}{2} u_n \left(1 + ch\frac{\alpha}{2^n}\right) = u_n\left(ch\frac{\alpha}{2^{n+1}}\right)^2$

$u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 \left(ch\frac{\alpha}{2^{n+1}}\right)^2} = u_n ch\frac{\alpha}{2^{n+1}}$

$sh\,\alpha = 2\,sh\frac{\alpha}{2}\,ch\frac{\alpha}{2}$

$= \dots$

$= \underbrace{2^n sh\frac{\alpha}{2^n}}_{\xrightarrow{DL}\ \alpha}\ \underbrace{\prod_{k=1}^{n} ch\frac{\alpha}{2^n}}_{P_n}$

$V_{n+1} = U_{n+1}\, ch\frac{\alpha}{2^{n+1}}$ $\quad U_n = U_n\, ch\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)$

$V_n = U_0\left(\prod_{k=1}^{n} ch\frac{\alpha}{2^k}\right) \times ch\frac{\alpha}{2^k}$ $\quad = U_{n-1}\, ch\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)^2$

$\vdots$

$= U_0 \prod_{k=1}^{n} ch\frac{\alpha}{2^k}$

$P_n \xrightarrow[+\infty]{} \frac{sh\,\alpha}{\alpha}$

Bref : $V_n \to U_0 \frac{sh\,2\alpha}{2\alpha} \times 1$

$U_n \to U_0 \frac{sh\,2\alpha}{2\alpha}$

$\ln\left(x+\sqrt{x^2+k}\right)'$

$= \dfrac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+k}}}{x+\sqrt{x^2+k}}$

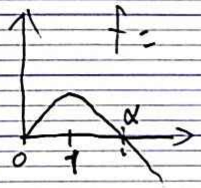
$= \dfrac{1}{\sqrt{x^2+k}}$

4.5

$U_{n+1} = 2\ln(1+U_n)$

Étudions $f : x \mapsto 2\ln(1+x) - x$

$f' : x \mapsto \frac{2}{x+1} - 1 = \frac{1-x}{x+1}$



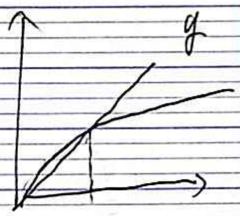
$U_0 > 0$

$\forall n \in \mathbb{N},\quad U_n > 0$

$2\ln(1+\alpha) = \alpha$

$g : x \mapsto 2\ln(1+x)$

$g' : x \mapsto \frac{2}{1+x}$



α

Point fixe α : $\alpha > 1$, $2\ln(1+\alpha) = \alpha$

$|g'(\alpha)| < 1$ stable.

$\forall x < \alpha,\ \alpha > g(x) > x$ $\quad]0, l[$ stable par g

$\forall x > \alpha,\ g(x) < x$ $\quad]l, x[$ stable par g

Si $U_0 \in]0, l[$, (U_n) croît vers l

$U_0 \in]l, +\infty[$, (U_n) décroît vers l

$$V_{n+2} = \ln(1+V_{n+1}) + \ln(1+V_n) \quad , \quad V_0, V_1 > 0$$

On prend : $(U_n) \begin{cases} U_0 < l, V_0, V_1 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$

$(W_n) \begin{cases} W_0 > l, V_0, V_1 \\ W_{n+1} = f(W_n) \end{cases}$

MQ : $\forall n, \quad U_n \leq V_{2n} \quad , \quad V_{2n+1} \leq W_n$

$(W_n) \Downarrow$

$W_{n+1} = 2\log(1+W_n)$
$\geq \log(1+V_{2n})$
$+ \log(1+V_{2n+1})$
$= V_{2n+2}$

$V_{2n+3} = \log(1+V_{2n+2}) + \log(1+V_{2n+1})$
$\leq \log(1+W_{n+1}) + \log(1+W_n)$
$\leq \cancel{\log}(1+W_n) \times 2$
$= W_{n+1}$

$V_3 = \log(1+V_1) + \log(1+V_2)$

$\rightarrow \quad U_0 < V_0 \quad , \quad U_0 < V_1$

$\rightarrow \quad U_1 = 2\log(1+U_n) < \log(1+V_0) + \log(1+V_1) = V_2$

$\rightarrow \quad W_0 > V_1, \quad W_0 > V_0$

$W_1 = 2\log(1+W_0) > \log(1+V_0) + \log(1+V_1) = V_2$

$W_1 = 2\log(W_0+1)$
$> \log(1+W_0) + \log(1+W_1)$
$> \log(1+V_1) + \log(1+V_2) = V_3$

$W_{n+1} = 2\log(1+W_n) \geq \log(1+V_{2n}) + \log(1+V_{2n+1})$
$= V_{2n+2}$

$W_{n+1} = 2\log(1+W_n) \geq \log(1+W_n) + \log(1+W_{n+1})$
$\geq \log(1+V_{2n+1}) + \log(1+V_{2n+2}) = V_{2n+3}$

Donc, $\underbrace{U_n}_{\to l} \leq V_{2n} \leq \underbrace{W_n}_{\to l}$

$(V_n) \to l$.

4.6 $u_{n+1} - \sin u_n \to 0$ | $u_{n+1} = \sin u_n + \varepsilon_n$, $\varepsilon_n \to 0$

$A = Adh(u_n)$ $\begin{cases} (u_n) \text{ bornée, donc } A \neq \emptyset \text{ via BW} \\ \text{On va mq } \sin(A) = A \text{ ?} \end{cases}$

Si $a \in A$

1) $a = \lim u_{\varphi(n)}$ par C^0

$\sin a = \lim \sin(u_{\varphi(n)})$ O.K.

ainsi, $\sin(A) \subset A$

2) $a = \lim u_{\varphi(n)}$ on regarde $v_n = u_{\varphi(n)-1}$

$u_{\varphi\circ\psi(n)} = \sin u_{\varphi\circ\psi(n)-1} + \varepsilon$

on extrait avec $\psi \uparrow$, $v_{\psi(n)} = u_{\varphi(\psi(n))-1} \to l$

$\sin v_{\psi(n)} \to \sin l$

$u_{\varphi\circ\psi(n)} \to \sin l$

$\sin l = a$ $\quad u_{\varphi\circ\psi(n)} + \varepsilon_{\varphi\circ\psi(n)} \to 0$

$A \subset \sin(A)$

On sait que A possède sa bs β

bi α

$\left.\begin{matrix} \beta \leq 1 \\ \alpha \geq -1 \end{matrix}\right\}$ clair

si $\alpha \neq \beta$

alors, $\sin A \subset \sin[\alpha,\beta] \subsetneq [\alpha,\beta]$

on ne peut avoir $\sin A = A$

$x \neq 0$

$|\sin x| < |x|$

DONC, $\alpha = \beta = 0$ $\begin{cases} (cc) \; Adh(u_n) = \{0\} \\ (u_n) \text{ étant borné } \to 0 \end{cases}$

3.4

$$u_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{i}{k}\right)$$

$$|u_n| = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k^2}\right)^{1/2} \qquad \log|u_n| = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k^2}+o\left(\frac{1}{k^2}\right.\right.$$

$$|u_n| \to r > 1$$

$$1+\frac{i}{k} = \sqrt{1+\frac{1}{k^2}}\,\exp\left(i\arctan\left(\frac{1}{k}\right)\right)$$

$$u_n = P_n \times \exp\Big(i \underbrace{\sum_{k=1}^{n}\arctan\left(\frac{1}{k}\right)}_{\theta_n}\Big)$$

$$\theta_n = \sum_{k=1}^{n}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{k}\right)$$

$$\theta_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right) = H_n + \underbrace{S_n}_{CV} = \log n + \underbrace{\gamma + S_n}_{S_n'' \to S}$$

Alors, $\begin{cases} \theta_n \to +\infty \\ \theta_{n+1} - \theta_n \to 0 \end{cases}$

donc, $\{\theta_n - 2k\pi \mid n \in \mathbb{N}^*, k \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$

par C^0 et surjectivite de $x \mapsto e^{ix}$

$$\overline{\{e^{i\theta_n}\}} = \mathbb{U}$$

$$\mathrm{Adh}(u_n) = \mathcal{C}(0, r)$$

4.7 $$U_{n+1} = \frac{U_n^2}{n+1}$$

Soit $U_n(x)$ définie par $U_0 = x$ et par cette relation de récurrence.

<u>Obs</u> : $x < y \Rightarrow U_n(x) < U_n(y)$

$\forall n \in \mathbb{N}, \ U_n \geq 0$

<u>1er cas</u> : $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \ U_{n_0+1} \leq U_{n_0}$

alors $\frac{U_{n_0+1}^2}{n_0+2} \leq \frac{U_{n_0}^2}{n_0+2} \leq \frac{U_{n_0}^2}{n_0+1}$

et par récurrence, $U_{n+1} < U_n \quad \forall n \geq n_0$

$(U_n) \searrow$ minorée par 0

$\rightarrow$ CV vers 0

<u>2ème cas</u> : $U_{n+1} > U_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

alors $\frac{U_n^2}{n+1} > U_n \ \forall n \in \mathbb{N}$

$\Leftrightarrow U_n > (n+1) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

donc $\lim\limits_{+\infty} U_n = +\infty$

$\lim\limits_{+\infty} U_n(1) = 0 \quad , \quad \lim\limits_{+\infty} U_n(2) \rightarrow +\infty$

- Soit $A = \{x \in \mathbb{R} \mid \lim\limits_{n \to +\infty} U_n(x) = 0\} \neq \emptyset$, majoré donc possède une borne sup, α.

- Si $x < \alpha$ alors $\exists x' \in A, \ x \leq x' \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} U_n(x) = 0$
- Si $x > \alpha$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n(x) \rightarrow +\infty$

$\boxed{\alpha \notin A}$ Sinon $\exists N \quad U_N(\alpha) < 1$

$f_N : x \mapsto U_N(x)$ est C^0

il existe η tq. $\forall x \in]\alpha - \eta, \alpha + \eta[$

$f_N(x) < 1$

$f_N(\alpha + \frac{\eta}{2}) < 1, \quad \alpha + \frac{\eta}{2} \in A \quad \lightning$

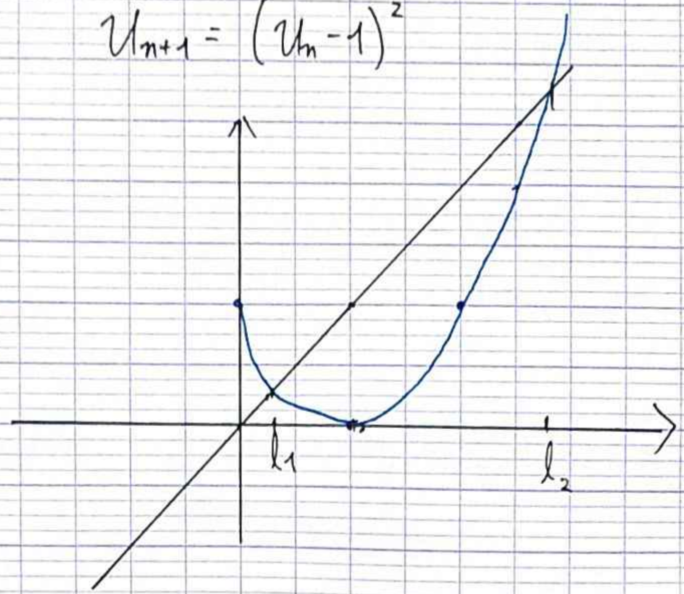
Si $U_n < 1$

$U_{n+1} = \underbrace{\frac{U_n}{n+1}}_{<1} \times U_n$

$U_{n+1} < U_n$

4.1.

$$u_{n+1} = (u_n - 1)^2$$



$f : x \mapsto (x-1)^2$

$f' : x \mapsto 2(x-1)$

$(l-1)^2 = l$

$l^2 - 3l + 1 = 0$

$l = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

$\approx 2,62$

$0,38$

$u_1 \geq 0$, donc SNG, on considère $u_0 \geq 0$.

$\forall x > l_2$, $f(x) > x$, donc si $u_0 > l_2$, $(u_n)_n \nearrow\nearrow \to +\infty$.

Si $u_0 = l_2$, stationnaire

l_1, l_2 points fixes non stables.