TD: Séries de fonctions II

1.1

a) Posons $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lfloor nx \rfloor}{n^3}$

Soit $A > 0$ Mq: la série CV sur $[-A, A]$.

$\forall n \in \mathbb{N}$ $\left| \frac{\lfloor nx \rfloor}{n^3} \right| \leq \frac{\lfloor nA \rfloor}{n^3} \leq \frac{A}{n^2}$ donc il y a CVN sur $[-A, A]$ et donc sur tout segment de $\mathbb{R}$.

Double limites :

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$f(x^+) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{t \to x^+} \frac{\lfloor nt \rfloor}{n^3} = f(x) \text{ si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$$

si $x = \frac{p}{q}$ $\quad f(x^+) - f(x^-) = \sum_{q \mid n} \frac{1}{n^3} \neq 0$

Croissance ?

si $x > y$, on choisit $p/q \in]y, x[$

On a donc $f(x) \geq f\left(\left(\frac{p}{q}\right)^+\right) > f\left(\left(\frac{p}{q}\right)^-\right) \geq f(y)$

D'où, le resultat : strictement croissante.

b) $I_x =]f'_g(x), f'_d(x)[$ $\quad$ x un point de non-derivabilité

$$h(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\int_0^x \lfloor nt \rfloor \, dt}{n^3}$$

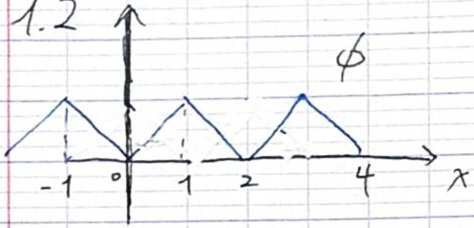
$$h(x) = \int_0^x f(t)\,dt \qquad h'_d(x) = f(x^+) \qquad h'_g(x) = f(x^-)$$

h étant l'intégrale d'une fonction strictement croissante, h est donc convexe.

Pour $x \in \mathbb{Q}$, $h'(x)$ n'est pas continue, h est non derivable en x.

Donc, l'ensemble des points de non-derivabilité est $\mathbb{Q}$.

1.2



ϕ $\qquad f = \sum \left(\frac{3}{4}\right)^n \Phi(4^n x)$

* $\left\|\left(\frac{3}{4}\right)^n \Phi(4^n x)\right\|_\infty \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$, sommable $\Rightarrow$ CVN $\Rightarrow$ CVU $\Rightarrow$ f est C^0
* Soit $m \in \mathbb{N}$ et $h = \pm \frac{1}{2} 4^{-m}$ t.q. il n'y ait pas d'entiers entre $4^n x$ et $4^n(x+h)$

$n > m \qquad 4^n(x+h) - 4^n x \in 2\mathbb{Z}$

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right| = \left|\sum_{n=0}^{m} \left(\frac{3}{4}\right)^n \frac{\phi(4^n(x+h)) - \phi(4^n x)}{h} + \sum_{n=m+1}^{+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \frac{\phi(4^n(x+h)) - \phi(4^n x)}{h}\right|$$

$$\geq \left|\left(\frac{3}{4}\right)^m \frac{\Phi(4^m(x+h)) - \Phi(4^m x)}{h}\right| - \sum_{n=0}^{m-1} \left(\frac{3}{4}\right)^n \left|\frac{\phi(4^n(x+h)) - \phi(4^n x)}{h}\right|$$

$$\geq \left(\frac{3}{4}\right)^m \times 4^m - \sum_{n=0}^{m-1} \left(\frac{3}{4}\right)^n \frac{4^n |h|}{|h|}$$

$$= 3^m - \frac{3^m - 1}{2} = \frac{3^m+1}{2} \xrightarrow[m \to +\infty]{} +\infty$$

1.3 $\qquad F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} \underbrace{(x - r_n)^{1/3}}$

C^0 strictement croissante borné par 1.

i) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [0,1]$, $|u_n(x)| \leq 2^{-n}$

il y a CVN $\begin{cases} F \text{ est } C^0 \\ F \nearrow \end{cases}$

c'est un homéomorphisme $[0,1] \to [F(0), F(1)]$

ii) $\begin{cases} v \neq u \\ u \neq 0 \end{cases}$ $\quad 0 \leq \dfrac{v^{1/3} - u^{1/3}}{v-u} = \dfrac{\alpha - \beta}{(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)}$

$$= \frac{1}{\beta^2\left(\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 + \frac{\alpha}{\beta} + 1\right)} \leq \frac{4}{3 \underbrace{\beta^2}_{u^{2/3}}}$$

Dérivées en r_n,

$$\frac{F(x) - F(r_n)}{x - r_n} = \sum_{k \neq n} 2^{-k} \underbrace{\frac{(x-r_k)^{1/3} - (r_n - r_k)^{1/3}}{x - r_n}}_{\geq 0} +$$

$$2^{-n} \underbrace{\frac{(x-r_n)^{1/3}}{x - r_n}}_{\to +\infty}$$

en $x \notin \mathbb{Q}$, série dérivée : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} \frac{1}{3} (x - r_n)^{-2/3}$

<u>premier cas</u> : La série converge $\to S$

$$\frac{F(y) - F(x)}{y - x} - S = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} \left\{ \frac{(y-r_n)^{1/3} - (x-r_n)^{1/3}}{y-x} - \frac{1}{3}(x - r_n)^{-2/3} \right\}$$

Or $\quad 0 \leq \dfrac{u^{1/3} - v^{1/3}}{u - v} \leq \dfrac{4}{3u^{2/3}} = 4 \cdot \dfrac{1}{3}(x - r_n)^{-2/3}$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}^*$ t.q. $\displaystyle\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{2^{-n}}{3}(x - r_n)^{-2/3} < \varepsilon$

De là, $\displaystyle\left| \frac{F(y) - F(x)}{y - x} - S \right| \leq \underbrace{\left| \sum_{n=0}^{N} 2^{-n} \left\{ \frac{(y-r_n)^{1/3} - (x-r_n)^{1/3}}{y-x} - \frac{1}{3}(x - r_n)^{-2/3} \right\} \right|}_{\Delta}$

$$+ (4+1) \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{2^{-n}}{3} (x - r_n)^{-2/3} \leq \Delta + \varepsilon$$

Or $\displaystyle \Delta \xrightarrow[y \to x]{} 0 \quad \sum$ finie

$\exists \eta > 0 \quad \forall y \neq x \quad |y - x| < \eta \Rightarrow \left| \dfrac{F(y) - F(x)}{y - x} - S \right| \leq 2\varepsilon$

Si $\displaystyle\sum \frac{2^{-n}}{3(x - r_n)^{2/3}}$ DV $\quad \exists F'(x) = +\infty$

iii) On regarde $G = F^{-1}$ homéo : $[F(0), F(1)] \to [0,1]$
G' existe partout, elle est nulle sur
$\underbrace{F(\mathbb{Q} \cap [0,1])}_{\text{dense dans } [F(0),\, F(1)]}$

1.4

$th = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

$\operatorname{argth} : [-1,1] \to \mathbb{R}^+$

(th)

a) $g = th \circ f$ à valeurs dans $[-1,1]$
Puis en notant, $a = \sup_{|A} th(f) \in [-1,1]$
$b = \sup_{|A} th(f) \in [-1,1]$
On pose : $g = \lambda\, th\, f + \mu$ t.q. $\lambda a + \mu = 1$
$\lambda b + \mu = -1$

b) On pose $g \begin{cases} X \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{d(x,F)}{d(x,G) + d(x,F)} \end{cases}$ $d(x,G)+d(x,F) > 0$ car $F \cap G = \phi$

1 sur G
0 sur F

– g est continue et vérifie les propriétés de l'énoncé.

c) Posons $g_1 : \begin{cases} X \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \underbrace{(2g(x) - 1)}_{-1 \leq \ \leq 1} \frac{1}{3} a \end{cases}$ $g_1 \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$

* Soit $x \in X$
Si $x \in F$, $g(x) = 0$, $-a + \frac{a}{3} \leq f(x) - g_1(x) \leq -\frac{a}{3} + \frac{a}{3} = 0$
Donc, $|f(x) - g_1(x)| \leq \frac{2}{3} a$
* Si $x \in G$
$0 \leq \frac{a}{3} - \frac{a}{3} \leq f(x) - g_1(x) \leq a - \frac{a}{3}$
$|f(x) - g_1(x)| \leq \frac{2}{3} a$
* Sinon $|f(x)| < \frac{a}{3}$
Donc $|f(x) - g_1(x)| \leq |f(x)| + |g_1(x)| \leq \frac{a}{3} + \frac{a}{3} = \frac{2}{3} a$
Ainsi, $\|f - g_1\|_\infty \leq \frac{2a}{3}$

d) On construit par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ une suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions t.q.

$\forall n \in \mathbb{N}$ $$\| f - \sum_{k=1}^{n} g_k \| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n a$$

Les $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont définies partout sur X

puis, $\| f - \sum_{k=N}^{+\infty} g_k \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$

Donc $f = \sum_{k=1}^{+\infty} g_k$ sur A

D'où, $\sum_{k=1}^{+\infty} g_k$ convient

1.5

a) $\varphi_0(x) = e^{-\frac{1}{x(1-x)}}$, $x \in]0,1[$

0 , ailleurs

$\varphi_1(x) = \int_0^x \varphi$ $\quad \varphi_1(x) = cste = C$ pour $x \geq 1$

$\varphi_2(x) = \frac{1}{C}\int_0^x \varphi$ $\quad \varphi_2(x) = 1$ pour $x \geq 1$

$\varphi_2(a+x)\ \varphi_2(b-x)$

b1) $\mathcal{C}^0$ de f $\quad \phi(\lambda_n x) = 0$ si $|x| \geq \frac{1}{\lambda_n}$

$k \geq 1$ $\quad \phi^{(k)}(x) = 0$ si $|\lambda_n x| \leq \frac{1}{2}$

On regarde : $\left| a_n \frac{x^n}{n!} \underbrace{\phi(\lambda_n x)}_{\leq 1} \right| \leq \frac{a_n}{|\lambda_n|^n} \cdot \frac{1}{n!}$

$\lambda_n = 1 + |a_n|$

À l'ordre p, pour $n \gg p$ (CVN de $\sum u_n^{(p)}$ |

$$\left(a_n \frac{x^n}{n!}\phi(\lambda_n x)\right)^{(p)} = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} a_n \frac{x^{n-k}}{(n-k)!} \lambda_n^k \underbrace{\phi^{(k)}(\lambda_n x)}_{\text{bornée par } M_p}$$

$$\left| \quad '' \quad \right| \leq \frac{|a_n| \cdot \frac{1}{|\lambda_n|^{n-2k}}}{(n-k)!} M_p$$

$$|a_n \lambda_n^{2k-n}| \leq 1$$

$n > 2p$ $\quad \frac{1}{(n-k)!} \leq \frac{1}{(n-p)!} \qquad |u_n^{(k)}| \leq 2^p M_n \frac{1}{(n-p)!}$

1.2 (refaite)

~~Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.~~

~~Soit $\varepsilon > 0$, $N \in \mathbb{N}^*$ t.q. $\sum_{n \geq N} \left(\frac{3}{4}\right)^n \leq \varepsilon$~~

Continuité de f :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\quad \left\| \left(\frac{3}{4}\right)^n \phi(4^n x) \right\|_\infty \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$

$\sum \left(\frac{3}{4}\right)^n$ CV, donc f CVN sur $\mathbb{R}$,

toutes $\left(\frac{3}{4}\right)^n \phi(4^n x)$ étant continues, f est continue.

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. $\forall n \in \mathbb{N}$, $h_n = \pm \frac{1}{2} 4^{-n}$ où le signe est choisi de sorte que $]4^n x_0, 4^n(x_0+h_n)[\cap \mathbb{Z} = \emptyset$

$$\left| \frac{f(x_0+h_n) - f(x_0)}{h_n} \right| = \left| \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^k \frac{\phi(4^k(x_0+h_n)) - \phi(4^k x_0)}{h_n} \right|$$

$\forall m > n$, $\quad 4^m h_n = \pm \frac{1}{2} 4^{m-n} \in 2\mathbb{Z}$, $\quad \phi(4^m(x_0+h_n)) = \phi(4^m x_0)$

$$= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{3}{4}\right)^k \frac{\phi(4^k(x_0+h_n)) - \phi(4^k x_0)}{h_n} + \left(\frac{3}{4}\right)^n \frac{\phi(4^n(x_0+h_n)) - \phi(4^n x_0)}{h_n} \right|$$

$$\geq \left(\frac{3}{4}\right)^n \times \frac{4^n h_n}{h_n} - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{3}{4}\right)^k \left| \frac{4^k h_n}{h_n} \right|$$

$$= 3^n - \sum_{k=0}^{n-1} 3^k = 3^n - \frac{1-3^n}{1-3} = \frac{2 \cdot 3^n - 3^n + 1}{2} = \frac{3^n+1}{2} \longrightarrow +\infty$$

Donc, nulle part dérivable.

1.3 (refaite)

ii) $\forall u \neq v,\ u \neq 0, \quad \alpha = v^{\frac{1}{3}}, \quad \beta = u^{\frac{1}{3}} \neq 0$

$$\frac{v^{\frac{1}{3}} - u^{\frac{1}{3}}}{v-u} = \frac{\alpha - \beta}{\alpha^3 - \beta^3} = \frac{1}{\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2}$$

$1+t+t^2$

$$\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 \geqslant \alpha\beta + 2|\alpha\beta| \geqslant 0$$

$\min\ 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$

$= \frac{3}{4}$

$$\frac{1}{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2} = \frac{1}{\beta^2\left(1+\frac{\alpha}{\beta}+\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right)} \leqslant \frac{4}{3\beta^2} \leqslant \frac{4}{3u^{\frac{2}{3}}}$$

Dérivée en r_n,

$$\frac{F(x)-F(r_n)}{x-r_n} = \sum_{k\neq n} 2^{-k} \underbrace{\frac{(x-r_k)^{\frac{1}{3}} - (r_n - r_k)^{\frac{1}{3}}}{x - r_n}}_{\geqslant 0 \text{ car } t \mapsto (t-r_k)^{\frac{1}{3}} \nearrow}$$

$$+ 2^{-n} \underbrace{\frac{(x-r_n)^{\frac{1}{3}}}{x-r_n}}_{(x-r_n)^{-\frac{2}{3}}} \xrightarrow[x \to r_n]{} +\infty$$

Donc, $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists F'(r_n) = +\infty$

1.4 d) On a $g_1 \in \mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ t.q. $\|f - g_1\|_{\infty,A} \leq \frac{2}{3} a$

De même, on peut trouver $g_2 \in \mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ t.q.

$\|(f-g_1) - g_2\|_{\infty,A} \leq \frac{2}{3} \times \left(\frac{2}{3} a\right)$

Ainsi, on peut construire une suite de fonctions

$(g_n)_{n \geqslant 1} \in \mathcal{C}(X,\mathbb{R})^{\mathbb{N}^*}$ t.q.

$\forall n \geqslant 1, \quad \|f - \sum_{k=1}^{n} g_k\|_{\infty,A} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n a$

On a $G_n = \sum_{k=1}^{n} g_k \in \mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ et

$$\|f - G_n\|_{\infty,A} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

$\sum g_n$ est la série cherchée.

1.5 (refait)

a) Soit $\varphi_0(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x(x-1)}} & , x \in]0,1[\\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$ est $\mathcal{C}^\infty$

Soit $\varphi_1(x) = \int_0^x \varphi_0(t)\,dt$

pour $x \leq 0$, $\varphi_1(x) = 0$

pour $x \geqslant 1$, $\varphi_1(x) = \varphi_1(1) = C > 0$

Soit $\varphi_2(x) = \frac{1}{C}\varphi_1(2(x+1))$

pour $x \leq -1$, $\varphi_2(x) = 0$

pour $x \geqslant -\frac{1}{2}$, $\varphi_2(x) = 1$

Soit $\varphi_3(x) = \varphi_2(-x)$

pour $x \geqslant 1$, $\varphi_3(x) = 0$

pour $x \leq \frac{1}{2}$, $\varphi_3(x) = 1$

Soit $\varphi_4 = \varphi_2\varphi_3$

pour $x \leq -1$, $x \geqslant 1$, $\varphi_4 = 0$

pour $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$, $\varphi_4 = 1$

b) $\phi(\lambda_n x) = 0$ si $|\lambda_n x| \geqslant 1$

$\left|\frac{a_n x^n}{n!}\phi(\lambda_n x)\right| \leq \frac{|a_n|}{n!\,\lambda_n^n}$

$\forall n$, prenons, $\lambda_n = 1 + |a_n|$

Alors, $\left|\frac{a_n x^n}{n!}\phi(\lambda_n x)\right| \leq \frac{|a_n|}{n!\,(1+|a_n|)^n} \leq \underbrace{\frac{1}{n!}}_{\text{t.g. d'une série CV}}$

Donc, CVN sur $\mathbb{R}$.

Soit $p \geq 1$

$$\left(\frac{a_n x^n}{n!}\phi(\lambda_n x)\right)^{(p)}$$

$$= \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \frac{a_n}{n!} \lambda_n^k \phi^{(k)}(\lambda_n x)\, x^{n-(p-k)} \times n \times \cdots \times (n-(p-k)+1)$$

$$= \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \frac{a_n}{(n-(p-k))!} \lambda_n^k \phi^{(k)}(\lambda_n x)\, x^{n-(p-k)}$$

Pour $|\lambda_n x| > 1$, $\phi^{(k)}(\lambda_n x) = 0$

$|\lambda_n x| < \frac{1}{2}$, $\phi^{(k)}(\lambda_n x) = 0$

Il suffit d'examiner $|\lambda_n x| \in [\frac{1}{2}, 1]$

On a choisi $1 + |a_n| = \lambda_n$, donc $|x| \leq \frac{1}{\lambda_n} \leq 1$

Soit M_p t.q. $\forall k \leq p$, $\|\phi^{(k)}\|_\infty \leq M_p$

$$\left|\left(\frac{a_n x^n}{n!}\phi(\lambda_n x)\right)^{(p)}\right| \leq \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \frac{|a_n|}{(n-(p-k))!} M_p \lambda_n^k \lambda_n^{p-k-n}$$

$$\leq \frac{|a_n| M_p}{\lambda_n^{n-p}} \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \frac{1}{(n-(p-k))!}$$

$$\leq \frac{|a_n| M_p}{\lambda_n^{n-p}} \times \frac{2^p}{(n-p)!}$$

$$\leq M_p 2^p \times \underbrace{\frac{|a_n|}{\lambda_n^{n-p}(n-p)!}}_{\text{t.g. d'une série CV}}$$

Donc, les séries dérivées sont CVN.

$$f' = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{k!} \left(k x^{k-1} \phi(\lambda_k x) - x^k \lambda_k \phi'(\lambda_k x)\right)$$

$$f'(0) = \frac{a_1}{1!}(\phi(0))$$

$$f(0) = a_0$$

~~Par Newme~~

$\phi(\lambda_n x)$ vaut 1 au voisinage de 0,
par identification,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0) x^n}{n!} = \sum \frac{a_n x^n}{n!} \phi(\lambda_n x)$$

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{a_n}{n!} \phi(\lambda_n x) \quad , \quad f^{(n)}(0) = a_n$$

c) Soit $\varphi : t \mapsto \phi\left(-\frac{1}{2} + \frac{t-a}{b-a}\right)$

φ est nulle hors de $\left[\frac{3a-b}{2}, \frac{3b-a}{2}\right]$
vaut 1 sur $[a,b]$

Soit $\tilde{f}$ se prolonge à $\mathbb{R}$, $\tilde{f} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$

Soit $F = \tilde{f} \times \varphi$.

$F_{|[a,b]} = f$.

F vaut 0 hors de $\left[\frac{3a-b}{2}, \frac{3b-a}{2}\right]$

F est à support compact