Polynômes de Bernstein

1. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{C}$.

Comme $\forall P \in \mathbb{R}[x]$, $|f-P| \leq |Re(f-P)| + |Im(f-P)|$

et

$|Re(f-P)| + |Im(f-P)| \leq 2|f-P|$

alors $P_n \in \mathbb{R}[x]^{\mathbb{N}}$ tend vers $f$ si $Re(P) \xrightarrow{\|\|} Re(f)$

et $Im(P) \longrightarrow Im(f)$

On peut donc se restreindre à

$f : [0,1] \to \mathbb{R}$.

2. Dériver, calcul bête.

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial g^2(u,v)}{\partial u^2} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k(k-1) u^{k-2} v^{n-k} = n(n-1)(u+v)^{n-2} \\ \frac{\partial g}{\partial u} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k u^{k-1} v^{n-k} = n(u+v)^{n-1} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} u^k v^{n-k} = (u+v)^{n-2}\left[n(n-1)u^2 + un(u+v)\right]$$

$$2\sum_{k=0}^{n} k n \binom{n}{k} u^k v^{n-k} = 2 u n^2 (u+v)^{n-1}$$

On prend $u = x$, $v = 1-x$ $(u+v=1)$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (k-nx)^2 x^k (1-x)^{n-k} = nx(1-x)$$

Lien proba (loi de Bernoulli ?)

3. Soit $\varepsilon > 0$. $\exists \alpha > 0$, $\forall (x,y) \in [0,1]^2$, $|x-y| \leq \alpha \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq \varepsilon$

Soit $x \in [0,1]$.

Posons $A = \left\{k \in [\![0,n]\!],\ \left|x - \frac{k}{n}\right| \leq \alpha\right\}$

$B = \left\{k \in [\![0,n]\!],\ \left|x - \frac{k}{n}\right| > \alpha\right\}$

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}$$

* $\forall k \in A$, $\left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leq \varepsilon$.

De là, $\displaystyle\sum_{k\in A} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} \left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leq \varepsilon \sum_{k\in A}\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$

$$\leq \varepsilon \qquad (1)$$

** $\forall k\in B$, $\left|x-\frac{k}{n}\right| > \alpha$ i.e $|k-nx|^2 > n^2\alpha^2$

d'où $(k-nx)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} > (n\alpha)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$

soit $(k-nx)^2 \underbrace{\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|}_{2\|f\|_\infty \geq} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} > \left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \ldots$

Alors d'après 2.,

$$nx(1-x)\times 2\|f\|_\infty \geq \sum_{k\in B} 2\|f\|_\infty (k-nx)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

$$\geq (n\alpha)^2 \sum_{k\in B} \binom{n}{k} \left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}$$

De plus, $\forall x\in[0,1]$, $x(1-x)\leq \frac{1}{4}$ par Inégalité arithmético géométrique

Il en résulte que $\displaystyle\sum_{k\in B}\binom{n}{k}\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right| x^k(1-x)^{n-k} \leq \frac{nx(1-x)}{n^2\alpha^2}\times 2\|f\|_\infty$

$$\leq \frac{\|f\|_\infty}{2\alpha^2 n} \qquad (2)$$

*** Alors (1) + (2) donne pour tout $x\in[0,1]$

$$\boxed{|P_n(x)-f(x)| = \left|\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}\left(f(x)-f\left(\tfrac{k}{n}\right)\right)\right| \leq \frac{\|f\|_\infty}{2\alpha^2 n}+\varepsilon}$$

b) $\displaystyle\frac{\|f\|_\infty}{2\alpha^2 n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$, donc il existe N tel que $\forall n\geq N$, $\displaystyle\frac{\|f\|_\infty}{2\alpha^2 n}\leq\varepsilon$

$$\boxed{\text{De là, } \forall n\geq N,\ \forall x\in[0,1],\quad |P_n(x)-f(x)|\leq 2\varepsilon}$$

donc $P_n \xrightarrow{CVU} f$.

Densité : Théorème de Korovkin

1) Soit $f \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$.

Soit $\varepsilon > 0$.

Le théorème de Heine appliqué à $f$ sur le segment $[0,1]$ donne $\eta > 0$ tel que $\forall x, y \in [0,1]$, $|x-y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$.

Posons $k = \frac{2\|f\|_\infty}{\eta^2}$. Soit $(x,y) \in [0,1]^2$

Si $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$, alors a fortiori $\underline{|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon + k|x-y|^2}$

Si $|f(x) - f(y)| > \varepsilon$, alors $|x-y| > \eta$ soit $|x-y|^2 > \eta^2$

d'où $\frac{1}{\eta^2} > \frac{1}{|x-y|^2}$

donc $\frac{|f(x) - f(y)| - \varepsilon}{\eta^2} > \frac{|f(x) - f(y)| - \varepsilon}{|x-y|^2}$

Il vient $\frac{2\|f\|_\infty}{\eta^2} > \frac{|f(x) - f(y)| - \varepsilon}{|x-y|^2}$

soit $\underline{k|x-y|^2 + \varepsilon > |f(x) - f(y)|}$

$\boxed{\text{Conclusion : } \forall x, y \in [0,1], \quad |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon + k|x-y|^2}$

2. a) $\forall f, g \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$, $f \geq g \Leftrightarrow f - g \geq 0$

Avec i), $\forall n \in \mathbb{N}$, $B_n(f-g) \geq 0$ d'où $\boxed{B_n(f) \geq B_n(g)}$

De là, soit $f \in \overline{B}_{\|\|_\infty}(0,1)$.

Il vient $\forall n \in \mathbb{N}$, $B_n(\mathbb{1}) \geq B_n(f) \geq -B_n(\mathbb{1}) \rightarrow \|B_n(f)\|_\infty \leq \|B_n(\mathbb{1})\|_\infty$

Or, $B_n(f_0) \xrightarrow{CVU} f_0 = \mathbb{1}$ donc il existe $M > 0$

tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|B_n(\mathbb{1})\|_\infty \leq M$

Par passage à la borne sup, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $|||B_n||| \leq M$.

i.e. $\underline{|||B_n||| \text{ uniformément borné}}$.

$f(y) - \varepsilon - kx^2 + 2kyx - ky^2 \leq f(x) \leq f(y) + \varepsilon + kx^2 - 2kyx + ky^2$

On fixe $y$ et on applique $B_n$ : $\left(f(y) - \varepsilon - ky^2\right) B_n(f_0) - k B_n(f_2) + 2ky\, B_n(f_1) \leq B_n(f) \leq \left(f(y) + \varepsilon + ky^2\right) B_n(f_0) - 2ky\, B_n(f_1) + kB_n(f_2)$

Par combinaison linéaire, le membre de gauche CVU vers

$$\left(f(y) - \varepsilon - ky^2\right) f_0 - k f_2 + 2ky\, f_1 \qquad \text{(Idem à droite).}$$

$n_0$ tel que $\forall n \geq n_0$, $\left(f(y) - \varepsilon - ky^2\right) f_0 + 2yk f_1 - k f_2 - \varepsilon \leq B_n(f) \leq \varepsilon + \left(f(y) + \varepsilon + ky^2\right) f_0 - 2ky\, f_1 + k f_2$

Donc $\forall y\ \forall x$ $\underbrace{f(y) - \varepsilon - ky^2 + 2ykx - kx^2 - \varepsilon}$ $\leq B_n(f)(x) \leq \varepsilon + \dots$

$y = x \Rightarrow$ $f(x) - 2\varepsilon \leq B_n(f)(x) \leq f(x) + 2\varepsilon$

$\Rightarrow \|B_n(f) - f\|_\infty \leq 2\varepsilon.$