1.1 $\lambda_i \in \mathbb{C}$ tq $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i = 0$

Par réc sur n

$\exists x_0$ tq $f_n(x_0) \neq f_1(x_0)$. $f_n(x_0) \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(x) = 0$

$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(x_0 x)$

$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(x_0) f_i(x)$

On obtient

$\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i f_i(x) \left(f_i(x_0) - f_n(x_0)\right) = 0$

(HR) $\lambda_i (f_i(x_0) - f_n(x_0)) = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0$

1.2

1 à 5 : 2, 3, 5 cyclique = cardinal premier.

$|G| = 4$

Si $\forall x \in G$, $\omega(x) \mid 2$, G est commutatif : $(xy)^2 = e = xy\,xy$

$xyyx = e = xyxy$

$\Rightarrow yx = xy$

$a \neq b$ dans $G \setminus \{e\}$: $G = \langle e, a, b, ab \rangle$

$G \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

$|G| = 6$:

* Si $\forall x \in G$, $x^2 = e \Rightarrow$ G abélien.

$\underbrace{\langle e, a, b, ab \rangle}_{\text{Cardinal } 4} \subseteq G$, NON !

Il y a un élément d'ordre 3

** $|G \setminus \{e\}|$ impair

$f : \begin{cases} G \setminus \{0\} \to G \setminus \{0\} \\ x \mapsto x^{-1} \end{cases}$ est involutive $\xrightarrow[\text{cycle}]{}$ pt fixe.

$\exists\, a \in G \setminus \{0\}$, $\omega(a) = 2$

$\exists\, b$ ——— , $\omega(b) = 3$ ou 6.

Si $\omega(b) = 6 \longrightarrow \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$

$\omega(b) = 3$ et $ab = ba \longrightarrow \omega(ab) = 6$

on suppose $ab \neq ba$. $G = \{e, b, b^2, a, ab, ab^2\}$

H alt

Où est ba ? $ba \notin H$ (sinon $a \in H$)

$ba \neq a$ ($b \neq e$) $ba \neq a^2$ (sup)

$\hookrightarrow ba = ab^2$

$\varphi : G \to S_3$ $\quad b \to (123)$

$a \to (12)$

$(123)(12) = (13) = (12)(132)$

(1.3) Ma G abélien.

$a : G \to Aut(G)$

$x \mapsto \sigma_x$

Ker $a = Z(G)$

$Z(G) = G$ donc G est abélien.

$\psi : G \to G$

$x \to -x$

Comme ψ est trivial, $x = -x$ donc $\omega(x) | 2$.

G est un $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ev.

On prend une base de G $(e_1, \dots)$

Supposons $\dim G \geq 2$.

Alors on considère l'automorphisme $\gamma : G \to G$

tq $\gamma(e_1) = e_2$

$\gamma(e_2) = e_1$

$\gamma(e_i) = e_i$ sinon.

Donc $\dim G < 2$

$G = \{e\}$ ou $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

2.1 $(1\,2)\circ(1\,2\,\cdots\,n) = (2\,\cdots\,n) = \sigma$

a) $\sigma^k \circ (1\,2) \circ (\sigma^{-1})^k = (1\ \sigma^k(2)) = (1+2k)$ pour $k \leq n-2$

On a les permutations $(1\,i)$.

Puis $(i\,j) = (1\,i)(1\,j)(1\,i)$

2.2 $(a_1, \cdots, a_{2n+1}) = (a_1\, a_{n+2}\, a_2\, a_{n+3}\, \cdots\, a_{2n+1}\, a_{n+1})^2$

Remarque Si x d'ordre impair, $x^{2n+1} = e$

donc $(x^{n+1})^2 = x$

Un cycle d'ordre pair est de signature (-1)

2.3

a) $\sigma = \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_{2p}$

$\tau_1 \tau_2 = (i\,j)(k\,\ell)$

- $j = k$: $(i,j)(j,k) = (i\,j\,k)$
- $j \neq k$, $j \neq \ell$: $(i,j)(k,\ell) = (i,j)(j,k)(j,k)(k,\ell) = (i\,j\,k)(j\,k\,\ell)$

b) $\mathcal{D}(G) = \langle \{ xyx^{-1}y^{-1} \mid (x,y) \in G^2 \} \rangle$

$= \{ x_1 y_1 x_1^{-1} y_1^{-1} \cdots x_p y_p x_1^{-1} y_1^{-1} \mid x_i, y_i \in G,\ p \in \mathbb{N} \}$

$\mathcal{D}(\mathcal{A}_n) \subseteq \mathcal{A}_n$ clair

$\mathcal{D}(\mathcal{S}_n) = \mathcal{A}_n$: $(1,2,3) = (1,2)(2,3)$

$(1,3,2) = (1,2,3)^2 = (1,2)(2,3)(1,2)(2,3)$

2.4 H s/g de $\mathcal{S}_4$. $|H| \mid 24$.

$|H| = 2, 3$: cycliques

$H = \{ Id, (1\,2)(3\,4), (1\,3)(2\,4), (1\,4)(2\,3) \}$

$H = \langle (1\,2\,3\,4) \rangle$

(nb de cycles d'ordre n : (n-1)!)

$H_1 = \{ \sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \sigma(1)=1 \}$ card 6.

pas de sg cyclique d'ordre 6.

$\mathcal{A}_4$: card 12, c'est le seul.

$\mathcal{A}_n$ est le seul sg de $\mathfrak{S}_n$ d'indice 2.

Si $[\mathfrak{S} : H] = 2$, H est distingué (cours)

$\mathfrak{S} \xrightarrow{\pi} \mathfrak{S}/H \overset{\varphi}{\simeq} \{-1,1\}$

$\varphi \circ \pi \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{S}_n, \{-1,1\})$, surjectif

$\varphi \circ \pi = \varepsilon$.

Peut-on avoir $H \subseteq \mathcal{A}_n$, $|H| = 6$!

Réponse : NON !

H (cardinal) normal dans $\mathcal{A}_4$.

$\mathcal{A}_4/H$ card 2, $\forall \sigma \in \mathcal{A}_4$, $\overline{\sigma}^2 = \overline{\varepsilon} = H$

$\Downarrow$

$\sigma^2 \in H$

$\rightarrow$ H contient les carrés $\Rightarrow$ H contient les cycles d'ordre 3 $\rightarrow$ $H = \mathcal{A}_4$

H de cardinal 8 : ~~tous~~ les éléments de H sont d'ordre 1, 2 ou 4.

Ordre 2 : transposition (6)

$(12)(34)$ etc.

Mettons $(12)(34) \in H$, s'il s'agit du seul de ce type, on a toutes les transpositions $(12)(23) \in H$

Si : $\tau, \tau' \in H$, $\tau \neq \tau'$, $\mathrm{supp}\,\tau \cap \mathrm{supp}\,\tau' = \emptyset$ (sinon $\omega(\tau\tau') = 3$)

$H = \{ I, (12), (34), (12)(34), (13)(24), (14)(23) \}$ NON !

$\sigma = (1\ 2\ 3\ 4) \in H$

$\sigma^2 = (1\ 3)(2\ 4) \in H$

$\sigma^3 = (1\ 4\ 3\ 2) \in H$

(2.5)

a) $E(X) = \sum_{k=1}^{n} E(X_k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} = 1.$

$\sigma = \sqrt{V(X)} = \sqrt{E(X^2) - 1^2}$

$E(X^2)$

$X^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 + 2 \sum_{i<j} X_i X_j$ $\qquad E(X_i X_j) = \frac{1}{n(n-1)}$

$E(X^2) = E(X) + 2 \frac{1}{n(n-1)} \times \binom{n}{2}$

$= 1 + \frac{1}{2}$

$\sigma = 1$

b) $\ell \leq 0 : P(X=\ell) = 0$

$\ell \geq n+1 \Rightarrow P(X=\ell) = 0$

choix des $\ell-1$ éléments $\binom{n-1}{\ell-1}$ — nb de cycles $(\ell-1)!$

$\ell \in [\![1, n]\!] : P(X=\ell) = \frac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-\ell+1) \times 1 \times (n-\ell)!}{n!}$

$= \frac{(n-1)!}{(n-\ell)!} \times \frac{(n-\ell)!}{n!}$

$P(X=\ell) = \frac{1}{n}$

Espérance : $E(X) = \sum_{\ell=1}^{n} \ell P(X=\ell) = \sum_{\ell=1}^{n} \frac{\ell}{n} = \frac{(n+1)}{2}$

EX Formule de Legendre : $v_p(n!) = \sum_{k=1}^{n} \lfloor n/p^k \rfloor$

S/ ① Multiples de $p \leq n$: $\lfloor n/p \rfloor$ contribution $1 \times \lfloor n/p \rfloor$

$p^2 \leq n$: $\lfloor n/p^2 \rfloor$ compté 1 fois avant, contribution $2 \lfloor \frac{n}{p^2} \rfloor - \lfloor n/p \rfloor$

$\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$ compté $(k-1)$ fois, contribution $k\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor - (k-1)\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$

$\Sigma \to \nu_p$

(2) Récurrence !

(3) On note I_k la fonction indicatrice des multiples de p^k

$$\nu_p(n!) = \sum_{i=1}^{n} \nu_p(i) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{+\infty} I_k(i) = \sum_{k=1}^{+\infty} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} I_k(i)}_{\text{nb de multiples de } p^k \leq n}$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$$

(3.2) Liouville, Wilson : $(p-1)! \equiv -1 \ [p]$, $p \geq 3$

$$x^{p-1} - 1 = \prod_{k=1}^{p-1} (x - \bar{k}) \quad : \quad \overline{(p-1)!} = \overline{-1} \qquad \text{(mod } p\text{)}$$

Ex 2 $p^2 \nmid (p-1)! + 1$.

Abs $\exists m \in \mathbb{N}$, $p^m = (p-1)! + 1$

$m = 0, 1, 2$ $m!$ "faible"

$m \geq 6 \Rightarrow (m-1)! + 1 > m^2$

Idée : transformation $\longrightarrow$ divisibilité

$$(p-1)! = p^m - 1 = (p-1)\left(p^{m-1} + \cdots + p + 1\right)$$

$$(p-2)! = p^{m-1} + \cdots + p + 1$$

$\rightarrow$ modulo $p-1$

$$(p-2)! \equiv m \ [p-1]$$

p première car $p \wedge (p-1)! = 1$, donc p est première

$p - 1 = \underbrace{\frac{p-1}{2}}_{\geq 3} \times 2$ divise $(p-2)!$

Bilan : $m \equiv 0 \ [p-1]$ donc $m \geq p-1 \Rightarrow \underbrace{p^m}_{\geq p^{p-1}} > (p-1)! + 1$

3.3) Soit $m \in \{1, \dots, p-1\}$ le premier résidu non quadratique $\left(m^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \ [p] \right)$

Soit $n = (m-1)m < p \leq nm$

Il vient : $nm - m < p \leq n$

$nm - p < m$

Choix de m $\longrightarrow$ $nm - p$ est un résidu quadratique

donc nm est un résidu quadratique (mod p)

$(nm)^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \ [p]$ mais $m^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \ [p]$ ainsi $n \geq m$

$n^{\frac{p-1}{2}} m^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \ [p]$ donc $m^{\frac{p-1}{2}} \geq -1 \ [p]$

Fin : $(m-1)m < p \ : \ m < 1 + \sqrt{p}$ $\left(\text{si } m(m-1) > p \text{ alors } m > \sqrt{p} \right)$

(4.1) Soit $I \neq \{0\}$ un idéal de A.

- Si $1 \in I$, $I = A = X^0 A$
- Sinon, soit $F = \frac{P}{Q} \in I$, $P \wedge Q = 1$, Q irréductible. Si 0 n'est pas racine de F, $\frac{Q}{P} \in A \Rightarrow 1 \in I$ donc $I = A$
- Sinon, $\forall F = \frac{P}{Q} \in A$, $P(0) = 0$. On écrit $F = X^m \frac{\tilde{P}}{Q}$ avec $\tilde{P}(0) \neq 0$

On pose $k = \min \left\{ \ell \in \mathbb{N}^* \mid \exists F \in I, F = \frac{P}{Q} X^\ell, P(0) \neq 0 \right\}$

Claimant, $X^k A \subseteq I$. ($\frac{P}{Q}$ irréductible dans A)

Si $X^\ell \frac{P}{Q} \in I$, on écrit $X^k \underbrace{X^{\ell-k} \frac{P}{Q}}_{\in A}$ donc $I \subseteq X^k A$.

(cc) $\boxed{X^k A = I}$

(5.1) $f(x) = x^{n+1} + a_n x^n + \cdots + a_0 \quad (a_0 \neq 0)$.

$$g(x) = x^{n+1} - \sum_{k=0}^{n} |a_k| x^k.$$

- Montrons par récurrence forte sur $n \in \mathbb{N}$ que : $g_n(x) = x^{n+1} - \sum_{k=0}^{n} \alpha_k x^k$ avec $\alpha_k \geq 0$ et $\alpha_0 \neq 0$ s'annule exactement une fois sur $[0, +\infty[$.

$\underline{n=0}$: $g_0(x) = x - \alpha_0$ OK car $\alpha_0 > 0$

$\underline{n \in \mathbb{N}}$: $g_n'(x) = (n+1) x^n - \sum_{k=1}^{n} k \alpha_k x^{k-1}$

Notons α_p le premier $\alpha_{k \geq 1}$ non nul. Il vient

$$g_n'(x) = (n+1) x^n - \sum_{k=p}^{n} k \alpha_k x^{k-1} = (n+1) x^{p-1} \left(x^{n-p+1} - \sum_{k=p}^{n} \frac{k \alpha_k}{n+1} x^{k-p} \right)$$

Comme $\frac{k \alpha_k}{n+1} \geq 0$, $\frac{p \alpha_p}{n+1} > 0$, l'HR permet de dresser le tableau

de variation suivant

x	0		ρ_m		$+\infty$
g_n'	0	$-$	0	$+$	
g_n	$-a_0$	↘	$g_n(\rho_n)$	↗	$+\infty$

Comme $g_n(0) = -a_0 < 0$,

on en déduit que g_n ne s'annule qu'une et une seule fois sur $[0, +\infty[$, ce qui clot la récurrence.

On applique la propriété à g, d'où l'existence et l'unicité de ρ

- Soit z une racine de f.

$$f(z) = 0 \iff z^{n+1} = -\sum_{k=0}^{n} a_k z^k \Rightarrow |z|^{n+1} = \left|\sum_{k=0}^{n} a_k z^k\right|$$

d'où $|z|^{n+1} - \left|\sum_{k=0}^{n} a_k z^k\right| = 0$.

or, $0 \le |z|^{n+1} - \left|\sum_{k=0}^{n} a_k z^k\right| \le |z|^{n+1} - \sum_{k=0}^{n} |a_k|\,|z^k| = g(|z|)$

Alors les variations de g (cf. la récurrence) montrent que $\boxed{|z| \le \rho.}$

3.1 $\mathcal{C} = \{(\cos\theta, \sin\theta) \mid \theta \in [0, 2\pi[\}$

$t = \tan\frac{\theta}{2}$, $\quad \cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\quad \sin\theta = \frac{2t}{1+t^2}$

$t \in \mathbb{R}_+$

$$\mathcal{C} = \left\{\left(\tfrac{1-t^2}{1+t^2}, \tfrac{2t}{1+t^2}\right) \mid t \in \overline{\mathbb{R}_+}\right\}$$

$\left\{\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right) \mid t \in \mathbb{Q}_+\right\}$ est infini

Si $\mathcal{C}(\Omega, R)$ possède au moins 3 points rationnels (x_i, y_i) $i = 1, 2, 3$

l'équation était $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - R^2 = 0$

avec $\begin{matrix} x = x_i \\ y = y_i \end{matrix}\Big)\ i = 1, 2, 3$ on voit que $2ax_i + 2by_i + R^2 - a^2 - b^2 \in \mathbb{Q}$

par différence $\begin{cases} a(x_1 - x_2) + b(y_1 - y_2) \in \mathbb{Q} \\ a(x_1 - x_3) + b(y_1 - y_3) \in \mathbb{Q} \end{cases}$

$a, b \in \mathbb{Q}$ puis $R^2 - a^2 - b^2 \in \mathbb{Q}$

Soit $\Delta_{(p,q)} : t \longmapsto M_1 + t\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + tp \\ y_1 + tq \end{pmatrix}$

$M_t \in \mathcal{C} \iff (x_1+tp)^2 + (y_1+tq)^2 - 2(a(x_1+tp) + b(y_1+tq))$
$+ a^2 + b^2 - R^2 = 0$

équation du 2e degré en t avec $\Delta(0) > 0$
$\Rightarrow$ 2e racine est rationnelle

3.4.

a) Par l'abs : $p_1, \dots, p_n$ de la forme $3k+2$

$m = \prod_{i=1}^{n} p_i$ et on regarde $m^2 + 1 \equiv (-1)^2 + 1$
$\equiv 2 [3]$

donc $\exists p \mid m^2+1$, p premier $\equiv 2 [3]$

d'où $p \notin \{p_1, \dots, p_n\}$ NON !

b) $A \subseteq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$, $p = 3k+2$

$B(x) = A \cap \underbrace{\{(k+1)x, \dots, (2k+1)x\}}_{E(x)}$

$$\sum_{x \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*} |B(x)| = \sum_{x \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*} \sum_{y \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} \mathbb{1}_{B(x)}(y)$$

$$= \sum_{x \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*} \sum_{y \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} \mathbb{1}_A(y)\, \mathbb{1}_{E(x)}(y)$$

$$= \sum_{y \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*} \mathbb{1}_A(y) \sum_{x \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*} \mathbb{1}_{E(x)}(y)$$

$y \in E(x) \iff \exists \ell \in [\![1, k+1]\!]$, $y = (k+\ell)x$

$\Rightarrow$ $x = (k+\ell)^{-1} y$

$\rightarrow$ y est contenu dans $(K+1)$ ensemble $E(x)$

donc $\sum_{x \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*} \prod_{E(x)} (y) = k+1$

$\Rightarrow \sum_{x \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*} |B(x)| = |A| \times (k+1)$

b) Soit $x \in B+B$.

$\exists (k,l) \in [\![1, k+1]\!]^2$, $x = k+l+k+m = 2k+l+m$

ABS $x \in B$, $x = k+m$, $m \in [\![1, k+1]\!]$

$k+m = 2k+l+m \ [p]$

$m = k+l+m \ [p]$

1er cas $m = k+l+m \geq k+2$ NON

2e cas $m = k+l+m-p \leq 0$ NON

Donc B est sans somme, et de même chaque $B(x)$ est sans somme.

Soit $p = 3k+2 > \max_{a \in A} a$

$\Rightarrow \exists x \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$, $|B(x)| \geq \frac{k+1}{p}|A| \geq \frac{|A|}{3}$

4.2 a) ABS $\exists \varphi : \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}) \xrightarrow{\text{isom}} \underbrace{\mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})}_{A}$

Tout élément de A possède une racine cubique dans A

C'est faux pour B avec $f = Id$

b) I est maximal : Soit $J \supsetneq I$ idéal de $\mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$

Il existe $f \in J$ tq $f(0) \neq 0$

Si $g \in A$, $g = \underbrace{g - \frac{g(0)}{f(0)} f}_{\in I} + \underbrace{\frac{g(0)}{f(0)} f}_{\in J}$

$\boxed{J = A}$

I n'est pas principal

Abs Soit $f : I = (f)$

Comme $Id \in I$, il existe g tq $Id = fg$ en dérivant en 0

$1 = f'(0) g(0)$ donc $f'(0) \neq 0$ $\underbrace{f^{4/3}}_{\in I} = \underbrace{f^{1/3} f}_{\text{pas dérivable en } 0}$

Si $f^{4/3} = gf$ sur $]0, \alpha)$, $\alpha > 0$ petit, $g = f^{1/3}$

et aussi en 0.

Or $f^{1/3}$ n'est pas $\mathcal{C}^1$ en 0 !

Variante : $h(x) = \sqrt{x} f(x) \in A$ car $h'(x) = \frac{f(x)}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x} f'(x) \xrightarrow{0^+} 0$

$A = C^\infty([0,1], \mathbb{R})$

$I = \langle x \rangle$

Si $f \in A$, on a $\forall x \in [0,1]$, $f(x) = x \underbrace{\int_0^1 f'(tx)\, dt}_{C^\infty}$

(I.1) $g(0) = -|a_0| < 0$, $g \xrightarrow[+\infty]{} +\infty$

$g \in \mathcal{C}^\infty$ par TVI, g s'annule

$F = g^{-1}(\{0\}) \cap \mathbb{R}_+^*$. $\rho = \inf F > 0$ car $g(0) \neq 0$

$g(\rho) = 0$ $\rho^{n+1} = |a_n| \rho^n + \cdots + |a_0|$

$h(x) = \frac{g(x)}{x^{n+1}} = 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{|a_k|}{x^{n+1-k}}$

$h'(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{|a_k|}{x^{n+1-k}} > 0$, donc h est strictement croissante

5.2 $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ $a_k > 0$, $P(x) = 0$, $\delta = \min \frac{a_k}{a_{k+1}}$, $\gamma = \max \frac{a_k}{a_{k+1}}$

1er cas $\gamma = 1$. Alors $a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_n$

$$(X-1)P(X) = a_n X^{n+1} + (a_{n-1} - a_n) X^n + \cdots + (-a_0)$$

$$= a_n X^{n+1} - (a_n - a_{n-1}) X^n - \cdots - a_0$$

≥ 0 ≥ 0

On applique 5.1 à $Q(X) = (X-1)P(X)$: 1 est la plus grde racine de Q en module

2ème cas $\gamma > 0$ quelconque. On veut $\frac{|x|}{\gamma} \leq 1$. On regarde

$$P(\gamma X) = \sum_{k=0}^{n} \gamma^k a_k X^k \quad \left| \quad \frac{b_k}{b_{k+1}} = \frac{1}{\gamma} \frac{a_k}{a_{k+1}} < 1 \right.$$

(cc) $\frac{x}{\gamma}$ est racine de $P(\gamma x)$, avec le 1er cas $\frac{|x|}{\gamma} \leq 1$.

Pour le minoration on envisage $Q(x) = x^n P\left(\frac{1}{x}\right) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k}$

$$\max\left(\frac{a'_\ell}{a'_{\ell+1}}\right) = \max\left(\frac{a_{k+1}}{a_k}\right) = \frac{1}{\min\left(\frac{a_k}{a_{k+1}}\right)}$$

$$\frac{1}{|x|} \leq \max\left(\frac{a'_\ell}{a'_{\ell+1}}\right)$$

Ex 2 $\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{e^{i(n-1)\frac{\pi}{2}}}{(2i)^{n-1}} \underbrace{\prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - e^{-\frac{2ik\pi}{n}}\right)}_{} = \frac{(-1)^{n-1}}{(2i)^{n-1}} A$

$A = P(1)$ où $P(X) = X^{n-1} + \cdots + X + 1$.

$= n$.

5.3 Soit $U = U_{2n+2}$.

$\sum_{\zeta \in U} \zeta^m = 0$ si $1 \leq m \leq 2n+1$

$= 2n+2$ si $m = 0$

donc $\sum_{\zeta \in U} P(\zeta) = (2n+2) a_0 = (2n+2) P(0)$

$\sum_{\zeta \in U} P(\zeta)$ et $P(-1) = P(1) > 0$

$|S| \leq 2n \|P\|_{\infty, S^1}$ $\qquad \|P_{n+1}\|_{\infty, S^1} \geq \frac{2n+2}{2n} |P(0)|$

5.4 a) Clair

b) $P(\mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{Q}$: Lagrange (ou Vandermonde) $\rightarrow P \in \mathbb{Q}[X]$

$P(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$: Trad. x rationnel $\Rightarrow P(x)$ idem

$P(x)$ rationnel $\Rightarrow x$ rationnel

$\deg P = 1$, équation affine ok

$\deg P \geq 2$, $P(x) = \frac{1}{q}$, $q \in \mathbb{P}$. $\qquad x = \frac{a}{b}$

a des solutions q grand

On suppose $P(0) = 0$

$P > 0$: droite

$$a_1 x + \cdots + a_n x^n = \frac{1}{q}$$

$q(a_1 ab^{n-1} + \cdots + a_n a^n) = b^n$. Si b, $a \mid b^n$

Or $a \wedge b = 1$: $a = 1$

reste $q(a_1 b^{n-1} + \cdots + a_n) = b^n$ donc $q \mid b^n$, avec $n \geq 2$.

$b = qb'$ $\qquad a_1 b^{n-1} + \cdots + a_n = q^{n-1} b'^n$

Par différence, $q \mid a_n$.

QCA ($q \in \mathbb{P}$, infinité de facteurs premiers)