4 Intégrales généralisées II

4.1

$$g : x \longmapsto \frac{1}{x}\int_0^x t f(t)\,dt$$

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\int_0^x t f(t)\,dt}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\int_0^x t f(t)\,dt - \int_0^0 t f(t)\,dt}{x - 0}$$

$$= 0 \times f(0) = 0$$

$$\int_0^x t f(t)\,dt = \left[t F(t)\right]_0^x - \int_0^x F(t)\,dt$$

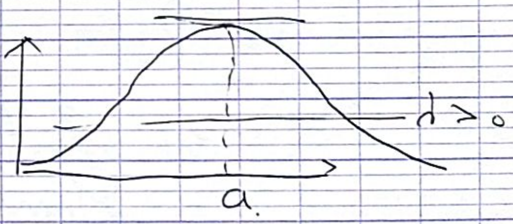
posons $F(x) = -\int_x^{+\infty} f$

$$g(x) = \frac{1}{x}\int_0^x t f(t)\,dt = F(x) - \frac{1}{x}\int_0^x F(t)\,dt$$

$$F(t) = o(1) \Rightarrow \int_0^x F = o\left(\int_0^x 1\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x}\int_0^x F = o(1)$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$$



Il existe a t.q. $g'(a) = 0$

$$g'(x) = -\frac{1}{x^2}\int_0^x t f(t)\,dt + \frac{1}{x}\, x f(x)$$

$$f(a) = \frac{1}{a^2}\int_0^a t f(t)\,dt$$

$$\int_0^a t f(t)\,dt = a^2 f(a)$$

4.2

En $+\infty$, $F(x) = \int_1^x f$, $\varphi(x) = \frac{1}{x}\left(F(2x) - F(x)\right)$

$$\int_1^A \varphi(x)\,dx = \int_1^A F(2x)\frac{dx}{x} - \int_1^A F(x)\frac{dx}{x}$$

$$= \int_2^{2A} F(x)\frac{dx}{x} - \int_1^A F(x)\frac{dx}{x}$$

$$= -\int_1^2 F(x)\frac{dx}{x} + \int_A^{2A}\frac{F(x)}{x}\,dx$$

premier cas $F(x) \nearrow l$ fini

$F(x) = l + \varepsilon(x)$ où $\varepsilon(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$

$$\int_A^{2A}\frac{F(x)}{x}\,dx \longrightarrow l \log 2$$

dernière cas $F(x) \to +\infty$, $x \geq M$ pour tout $x \geq x_0$

$A > x_0$ $\int_A^{2A}\frac{F(x)}{x}\,dx \geq M \ln 2$ $\int_A^{2A}\frac{F(x)}{x}\,dx \to +\infty$

4.3

a) $\int_0^{2\pi} f = 0$

b) Soit $g : x \longmapsto f(x) - c_0(f)$

D'après a), g admet une primitive G 2π-périodique

$$\int_1^x \frac{g(t)}{t^b}\,dt \overset{IPP}{=} \left[\frac{G(t)}{t^b}\right]_1^x - \int_1^x -b\frac{G(t)}{t^{b+1}}\,dt$$

G est $\mathcal{C}^0$ et 2π-périodique, donc bornée sur $\mathbb{R}^+$ par $M > 0$.

Donc, $\left[\frac{G(t)}{t^a}\right]_1^x$ admet une limite finie $-G(1)$ en $+\infty$

et $\left|\frac{G(t)}{t^{b+1}}\right| \leq \frac{M}{t^{b+1}}$ intégrable

(c) $$\int_1^X \frac{f(t)}{t^b}\,dt = \underbrace{\int_1^X \frac{f(t)-c_0(f)}{t^b}\,dt}_{\text{CV}} + \underbrace{\int_1^X \frac{c_0(f)}{t^b}\,dt}_{\begin{cases} c_0 \frac{X^{1-b}}{1-b} & \text{si } b<1 \\ c_0 \ln X & \text{si } b=1 \end{cases}}$$

finie

5.1 $n \geq 2$

On note $f_n : \begin{array}{l}]0,+\infty[\\ x \longmapsto x^{-\frac{1}{n}}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n \chi_{]0,n]} \end{array}$

$\forall n \geq 2$, $\forall x \in [1,+\infty[$, $0 \leq f_n(x) \leq e^{-x}$

$\forall x \in]0,1]$ $0 \leq f_n(x) \leq x^{-\frac{1}{2}}$

On prend $\varphi : x \mapsto \begin{cases} x^{-\frac{1}{2}} & \text{si } x \leq 1 \\ e^{-x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$ $\varphi \in L^1(\mathbb{R}_+)$

et $f_n \xrightarrow{\text{CVS}} e^{-x}$

par CVD, $\int_0^n f_n \longrightarrow 1$

5.2 $$\int_{[0,1[} \frac{t^a}{1+t^b}\,dt = \int_{[0,1[} t^a \sum_{n=0}^{+\infty} (-t^b)^n\,dt$$

$$= \int_{[0,1[} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{a+nb}\,dt$$

$$S_n(t) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{a+kb}$$

$\forall t < 1$: Leibniz $t^{a+kb} \searrow^{k} 0$

$$|S_n(t)| \leq 1$$

CVD, 1 est intégrable sur $[0,1[$.

$$I = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 (-1)^k t^{a+kb}\,dt \longrightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^1 (-1)^k t^{a+kb}\,dt$$

3.3

$$\frac{1}{k}\left(\frac{n-1}{n}\right)^k = \int_0^{\frac{n-1}{n}} x^{k-1}\,dx$$

$$S_n = \int_0^{\frac{n-1}{n}} (1+x+\cdots+x^{n-1})\,dx$$

$$= \int_0^{1-\frac{1}{n}} \frac{1-t^n}{1-t}\,dt = \log n - \int_0^{1-\frac{1}{n}} \frac{t^n}{1-t}\,dt$$

$$\int_0^{1-\frac{1}{n}} \frac{t^n}{1-t}\,dt \underset{t \leftrightarrow 1-t}{=} \int_{1/n}^{1} \frac{(1-t)^n}{t}\,dt$$

$u = tn \quad u \in [1,n]$

$$I_n = \int_1^n \left(1-\frac{u}{n}\right)^n \frac{du}{u}$$

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall u \in [1,n] \quad \left(1-\frac{u}{n}\right)^n \leq e^{-u}$

on prolonge f_n par 0

CVD, $\displaystyle\int_0^{1-\frac{1}{n}} \frac{t^n}{1-t}\,dt \rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,du = -K$

5.4 $x > 0$

Il faut justifier pour $x>0$ donc, $\phi(x)$ CV

$$\frac{\phi(x)}{x} = \int_0^{+\infty} \frac{(\sin xy)^2}{xy} f(y)\,\frac{dy}{y}$$

$$\underset{t=xy}{=} \int_0^{+\infty} \frac{(\sin t)^2}{t} f\left(\frac{t}{x}\right)\frac{dt}{t}$$

Sur $]0,+\infty[$, $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f\left(\frac{u}{x}\right) = l$

La CVD s'applique :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\phi(x)}{x} = l \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin u}{u}\right)^2 du$$

$$= l \times \frac{\pi}{2}$$

6.1 $$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x^2+t^2)}{1+t^2}\,dt$$

Soit $g : (x,t) \longmapsto \dfrac{\ln(x^2+t^2)}{1+t^2}$

Soit $x > 0$ fixé, g est $\mathcal{C}^0$ en t, $[0,+\infty[$

$\dfrac{\ln(x^2+t^2)}{1+t^2} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2\ln t}{1+t^2}$ intégrable sur $[1,+\infty[$

$\dfrac{\ln(x^2+t^2)}{1+t^2} \underset{0}{\sim} 2\ln x$ intégrable au $\mathcal{V}(0)$.

Soit $t \geq 0$ fixé, sur $]0,+\infty[$

$\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\ln(x^2+t^2)}{1+t^2}\right) = \dfrac{1}{1+t^2} \times \dfrac{2x}{x^2+t^2}$ $\mathcal{C}^0$ sur $]0,+\infty[$

$t \mapsto \dfrac{\partial g(x,t)}{\partial x}$ est CPM.

$\forall x \in]0,+\infty[$, $\exists\, a, b > 0$ t.q. $x \in [a,b]$, $\forall t \geq 0$

$\left|\dfrac{\partial g(x,t)}{\partial x}\right| \leq \dfrac{2b}{(1+t^2)(a^2+t^2)}$ intégrable sur $[0,+\infty[$

Donc f est $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$, et

$$f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} \times \frac{2x}{x^2+t^2}\,dt$$

$$= 2x \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2+t^2)(1+t^2)}\,dt$$

$$= \frac{2x}{x^2-1}\left(\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt - \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+t^2}\,dt\right)$$

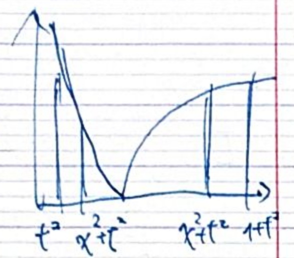
$$\frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{x^2+t^2} = \frac{x^2-1}{(1+t^2)(x^2+t^2)}$$

$F(x) = \pi \ln(1+x) + \underbrace{C}_{F(0)=0}$ $\quad x > 0$

$\mathcal{C}^0$ de F sur $\mathbb{R}^+$

$x>0$ pas de problème (en fait $\mathcal{C}^1$)

$x \in [0,1]$ $\varphi(x,t) = \dfrac{\ln(x^2+t^2)}{1+t^2}$ est $\mathcal{C}^0$ sur $[0,1] \times]0,+\infty[$



$$\frac{|\ln(x^2+t^2)|}{1+t^2} \leq \frac{|\ln t^2| + |\ln(1+t^2)|}{1+t^2} \in L^1$$

$x \in [a,b]$, $0<a<b$

$$\left|\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t)\right| \leq \frac{2b}{(a^2+t^2)(1+t^2)} \rightarrow \mathcal{C}^1$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t^2)}{x^2+t^2}\,dt \underset{t=ux}{=} \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+u^2x^2)}{x^2(1+u^2)}$$

$$= \frac{1}{x^2}\int_0^{+\infty} \frac{\ln x^2 + \ln(\frac{1}{x^2}+u^2)}{1+u^2}\,du$$

$$= \pi\frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{x^2}F\left(\frac{1}{x}\right) = \pi\frac{\ln x}{x^2} + \frac{\pi\ln(1+\frac{1}{x})}{x^2}$$

6.2

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos^2 t + x^2\sin^2 t)\,dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\ln\cos t\,dt + \int_0^{\pi/2} \ln(1+x^2\tan^2 t)\,dt$$

$$= -\pi\log 2 + \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2u^2)}{1+u^2}\,du$$

RM/ $\frac{\operatorname{sh} x}{x}$ $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ DSE

6.3 CV si $a>1$ car $\operatorname{sh} x \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{e^x}{2}$

Soit $\alpha>1$, pour $a \geq \alpha$, $x>0$

$$\left|\frac{\partial \varphi}{\partial a}(a,x)\right| \leq |\operatorname{sh} x|\,e^{-\alpha x} \text{ intégrable.}$$

$$\exists\, f'(a) = \int_0^{+\infty} \operatorname{sh} x\, e^{-ax}\,dx = \ldots$$

6.3

$$\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\sinh x}{x} e^{-ax}\right) = -\sinh x \, e^{-ax} \qquad a>2$$

$a>1$

$$I'(a) = \int_0^{+\infty} -\sinh x \, e^{-ax} \, dx$$

$$= -\int_0^{+\infty} \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} e^{-ax} \, dx$$

$\mathrm{sh}x)' = \mathrm{ch}x$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{e^{(1-a)x}}{1-a} - \frac{e^{-(a+1)x}}{-1-a} \right]_0^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{1-a} + \frac{1}{+1+a} \right) = \frac{1+a-1+a}{2(1-a)(1+a)}$$

$$= \cancel{\frac{a}{1-a^2}}$$

$$I(a) = \frac{1}{2}\left(-\ln(a-1) + \ln(1+a)\right) + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{a+1}{(a-1)}\right) + C$$

Or $I(a) \xrightarrow[a\to+\infty]{} C=0$ d'où $I(a) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{a+1}{a-1}\right)$

6.4

$$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n} n!^2}$$

C'est la somme d'une série entière, de rayon de convergence $+\infty$.

f est alors $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n 2n x^{2n-1}}{x^{2n} n!^2}$$

$$f''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2n(2n-1) x^{2n-2}}{2^{2n} (n!)^2}$$

sur $\mathbb{R}$,

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2(n-1)}}{2^{2(n-1)} (n-1)!^2} - \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-1} \cdot 2n}{x^{2n} (n!)^2}$$

$$= (-1) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n} n!^2} - \frac{1}{x} f'(x)$$

$$= (-1) f(x) - \frac{1}{x} f'(x)$$

$$\boxed{xy'' + y' + xy = 0}$$

Mq: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x\sin y)\,dy = \frac{\pi}{2} f(x)$

Prouvons la CVN à x fixé,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (x\sin y)^{2n}}{(2n)!}$$

$$|u_n(y)| \leq \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{tq d'une série CV}$$

Donc, correctement,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x\sin y)\,dy = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin y)^{2n}\,dy}_{I_{2n}}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \times \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{\pi}{2} f(x)$$

c.) f est bornée par 1

donc sa transformée de Laplace

$s \longmapsto \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\,dt$ existe.

On regarde $\int_0^{+\infty} \left| e^{-st} \frac{(-1)^n t^{2n}}{2^{2n}(n!)^2} \right| dt = \frac{1}{2^{2n}(n!)^2} \int_0^{+\infty} t^{2n} e^{-st}\,dt$

$$= \frac{1}{2^{2n}(n!)^2} \times \frac{1}{s^{2n+1}} \int_0^{+\infty} u^{2n} e^{-u}\,du \qquad u = st$$

$$= \frac{1}{2^{2n}(n!)^2} \times \frac{1}{s^{2n+1}} \Gamma(2n+1)$$

$$= \frac{1}{2^{2n}(n!)^2} \times \frac{1}{s^{2n+1}} (2n)!$$

Donc $\int_0^{+\infty} |u_n|$

$$\sim \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi \cdot n}} \cdot \frac{1}{s^{2n+1}}$$

$\sum \int |u_n|$ CV

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2}(2n)! \times \frac{1}{s^{2n+1}}$$

$$= \frac{1}{s}\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} \times \frac{(-1)^n}{2^{2n}} \left(\frac{1}{s}\right)^{2n}$$

Or $(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{x^2}{2} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-\frac{1}{2})\times(-\frac{3}{2})\times \cdots \times (\frac{1-2n}{2})\, x^{2n}}{n!}$

$$= 1 - \frac{x^2}{2} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}} \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^{2n}$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt = \frac{1}{s} \times \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{1}{s})^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+s^2}}$$

$s > 0$, f bornée O.K.

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} \tilde{f}(t)\,dt = \lim_{a\to+\infty} \int_0^a e^{-st}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{it\sin y}dy\right)dt$$

Fubini $= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^a e^{-st} e^{it\sin y}dt\right)dy$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{e^{t(i\sin y - s)}}{-s+i\sin y}\right]_{t=0}^{t=a} dy$$

$$= \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{e^{a(i\sin y - s)}}{-s+i\sin y}\right.}_{\xrightarrow[a\to+\infty]{} 0 \text{ car } s>0} - \left.\frac{1}{-s+i\sin y}\right)dy \longrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{s-i\sin y}dy$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{s+i\sin y}{s^2+\sin^2 y}dy \quad \Big|\ \text{partie réelle.}$$

$$= s\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 y + \sin^2 y}{s^2(\cos^2 y+\sin^2 y)+\sin^2 y}dy$$

$$= s\int_0^{\pi/2} \frac{(1+\tan^2 y)}{s^2+(1+s^2)\tan^2 y} = s\int_0^{+\infty}\frac{du}{s^2+(1+s^2)u^2} = \frac{s}{1+s^2}\int_0^{+\infty}\frac{du}{\alpha^2+u^2}$$

$$= \frac{1}{\alpha}\,\frac{s}{1+s^2}\,\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2\sqrt{1+s^2}}$$

7.1

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-nt} \ln t}{\sqrt{t}} \, dt$$

$$\overset{u=nt}{=} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u} \sqrt{n} (\ln u - \ln n)}{\sqrt{u}} \frac{du}{n}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u} \ln u}{\sqrt{u}} du - \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} \ln n \, du$$

7.2

$$J_n = \int_0^1 \frac{t^{n+1} \ln t}{1-t^2} dt$$

$$= \int_0^1 \underbrace{\frac{t \ln t}{(1-t)(1+t)}}_{f(t)} t^n dt$$

$f \, C^2$ $\quad f(0) = 0$

$f(1) = -\frac{1}{2}$

$$\int_0^1 f(t) t^n dt = \frac{f(1)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$t^n = u$

$]0,1]$

4.2 Soit $f \in \mathcal{C}^0(]0,+\infty[, \mathbb{R}^+)$

MQ : $f \iff g : x \to \frac{1}{x}\int_x^{2x} f$ est intégrable

Soit $F : x \mapsto \int_1^x f$, alors, $g(x) = \frac{1}{x}\left(F(2x) - F(x)\right)$

$$\int_1^A g(x)\,dx = \int_1^A \frac{F(2x)}{x}dx - \int_1^A \frac{F(x)}{x}dx$$
$$= \int_2^{2A} \frac{F(u)}{u}du - \int_1^A \frac{F(x)}{x}dx$$
$$= \int_A^{2A} \frac{F(u)}{u}du - \int_1^2 \frac{F(u)}{u}du$$

Comme $f \geq 0$, $F \nearrow$.

Si $F(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} l$ fini, $F(x) = l + \varepsilon(x)$ où $|\varepsilon(x)| \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$

$$\int_A^{2A} \frac{F(u)}{u}du = \underbrace{\int_A^{2A} \frac{l}{u}du}_{= l \times \ln 2} + \underbrace{\int_A^{2A} \frac{\varepsilon(u)}{u}du}_{|\ | \leq \frac{\varepsilon(A)}{A} \times A = \varepsilon(A) \xrightarrow[A\to+\infty]{} 0}$$

Donc, $\int_A^{2A} \frac{F(u)}{u}du \xrightarrow[A\to+\infty]{} 0$

Si $F(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ Soit $M > 0$, il existe $x_0 \geq 1$ $\forall x \geq x_0$, $F(x) \geq M$

Soit $A \geq x_0$, $\int_A^{2A} \frac{F(u)}{u}du \geq \int_A^{2A} \frac{M}{u}du = M \ln 2$

Donc, $\int_1^A g(x)\,dx \xrightarrow[A\to+\infty]{} +\infty$

On a montré en $+\infty$, f intégrable $\iff$ g intégrable

De même, en 0, soit $F : x \mapsto \int_x^2 f$ définie sur $]0,2]$. alors $g(x) = \frac{1}{x}\left(F(x) - F(2x)\right)$

F est décroissante

$$\int_a^1 g(x)\,dx$$

$$= \int_a^1 \frac{F(x)}{x}dx - \int_a^1 \frac{F(2x)}{x}dx$$

$$= \int_a^1 \frac{F(x)}{x}dx - \int_{2a}^2 \frac{F(u)}{u}du$$

$$= \int_a^{2a} \frac{F(u)}{u}du - \underbrace{\int_1^2 \frac{F(u)}{u}du}_{\text{fini}}$$

Si f est intégrable en 0, $F(x)$ admet une limite en 0, $F(x) \underset{0}{=} l + \varepsilon(x)$, l fini, $\varepsilon(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

$$\int_a^{2a} \frac{l+\varepsilon(x)}{x}dx$$

$$= l \times \ln 2 + \int_a^{2a} \frac{\varepsilon(x)}{x}dx$$

$$\left| \int_a^{2a} \frac{\varepsilon(x)}{x}dx \right| \leq \frac{|\varepsilon(2a)|}{a} \times a \xrightarrow[a\to 0]{} 0$$

Donc, g est intégrable en 0.

Si f n'est pas intégrable en 0, $F(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$

Soit $M > 0$, il existe $a_0 \leq 1$ t.q.

$\forall x \leq a_0, \quad F(x) \geqslant M$

$a \leq \frac{a_0}{2} \quad \int_a^{2a} \frac{F(u)}{u}du \geq \int_a^{2a} \frac{M}{u}du \geqslant M \ln 2$

Donc, $\int_a^1 g(x)\,dx \xrightarrow[a\to 0^+]{} +\infty$

On a montré en 0, f intégrable $\Leftrightarrow$ g intégrable.

5.1

Soit $x > 0$

$$x^{-\frac{1}{n}}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-x} \times \frac{1}{x^{\frac{1}{n}}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-x}$$

Soit $f_n : x \longmapsto x^{-\frac{1}{n}}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n \mathbb{1}_{]0,n]}$

f_n CVS vers $f : x \longmapsto e^{-x}$

Pour $n \geq 2$,

$$\forall x \in [1,n], \quad f_n(x) = x^{-\frac{1}{n}}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n \leq x^{-\frac{1}{n}} e^{-x}$$

$$\leq \frac{e^{-x}}{x^{\frac{1}{n}}} \leq e^{-x}$$

$$\forall x \in]0,1], \quad f_n(x) \leq x^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{n}}} \leq \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = x^{-\frac{1}{2}}$$

Soit $\varphi : x \longmapsto \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \geq 1 \\ x^{-\frac{1}{2}} & \text{sinon} \end{cases}$

φ est intégrable sur $[0,+\infty[$.

et pour tout $n \geq 2$, $\quad f_n(x) \leq \varphi$

Par CVD,

$$\int_0^{+\infty} f_n \longrightarrow \int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_0^{+\infty}$$

$$= 1$$

Donc, $\displaystyle\int_0^n x^{-\frac{1}{n}}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

5.2 $\displaystyle\frac{t^a}{1+t^b} = t^a \times \sum_{k=0}^{+\infty}(-t^b)^k$

$$\int_{[0,1[} \frac{t^a}{1+t^b}\,dt = \int_{[0,1[} \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k t^{a+kb}\,dt$$

Soit $S_n(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{a+kb}$, $\forall t < 1 : |S_n(t)| \leq t^a \leq 1$

S_n CVS vers $t \mapsto \frac{t^a}{1+t^b}$ sur $[0,1[$

Par CVD, $\int_0^1 S_n(t)\,dt \longrightarrow \int_0^1 \frac{t^a}{1+t^b}\,dt$

$$\int_0^1 \frac{t^a}{1+t^b}\,dt = \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{a+kb}\,dt$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \times \frac{1}{a+kb+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{a+kb+1}$$

7.1 $\quad I_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-nt}\ln t}{\sqrt{t}}\,dt \qquad n \geq 1$

$$\overset{u=nt}{=} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}\ln\left(\frac{u}{n}\right)}{\sqrt{\frac{u}{n}}}\,\frac{du}{n}$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\,\frac{e^{-u}(\ln u - \ln n)}{\sqrt{u}}\,du$$

$$\overset{v=\sqrt{u}}{=} \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-v^2}\ln v^2}{v} \times 2v\,dv - \frac{\ln n}{\sqrt{n}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-v^2}}{v} \times 2v\,dv$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}} \times 2 \int_0^{+\infty} e^{-v^2}\ln v^2\,dv}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0} - \underbrace{\frac{\ln n}{\sqrt{n}} \times 2\,\frac{\sqrt{\pi}}{2}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$$

Donc, $I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Comme $\int_0^{+\infty} e^{-v^2}\ln v^2\,dv = C = \text{cste}$.

$$I_n = \frac{2C}{\sqrt{n}} - \frac{\sqrt{\pi}\ln n}{\sqrt{n}} \qquad \frac{2C}{\sqrt{\pi}\ln n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Donc, $I_n \sim \sqrt{\pi}\,\frac{\ln n}{\sqrt{n}}$.

7.2

$$I_n = \int_0^1 \underbrace{\frac{t \ln t}{1-t^2}}_{f(t)} t^n \, dt$$

f est $\mathcal{C}^0$ sur $]0,1[$, $\lim\limits_{t\to 0^+} f(t) = t \ln t \xrightarrow[t\to 0^+]{} 0$

$$\lim_{t\to 1^-} f(t) = \frac{1}{2} \frac{\ln t}{(1-t)} = \frac{-1}{2} \frac{\ln(1) - \ln t}{1-t}$$

$$= -\frac{1}{2} (\ln t)'_{t=1} = -\frac{1}{2}$$

$$I_n = \int_0^1 f(t) t^n \, dt \qquad t^n = u \quad t = u^{1/n}$$

$$dt = \frac{1}{n} u^{1/n - 1} du$$

$$= \int_0^1 f(u^{1/n}) u \times \frac{1}{n} u^{1/n - 1} du$$

$$n I_n = \int_0^1 f(u^{1/n}) u^{1/n} du$$

Soit $f_n : u \longmapsto f(u^{1/n}) u^{1/n}$

Sur $]0,1]$, $f_n(u) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(1)$.

$\forall n \geq 1$, $\forall u \in]0,1]$

$|f_n(u)| \leq \|f\|_\infty$ intégrable sur $]0,1]$.

CVB, $\int_0^1 f_n(u) du \to \int_0^1 f(1) du = f(1)$

$$n I_n \to f(1)$$

Donc, $I_n \sim \frac{f(1)}{n} \sim -\frac{1}{2n}$

5.4 $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} l \in \mathbb{R}$

$$\phi(x) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin xy}{y}\right)^2 f(y)\,dy$$

$x > 0$
$$\overset{u=xy}{=} \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin u}{u}\right)^2 x^2 f\left(\frac{u}{x}\right) \frac{du}{x}$$

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin u}{u}\right)^2 du = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\phi(x)}{x} = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin u}{u}\right)^2 f\left(\frac{u}{x}\right) du$$

$u \in]0,+\infty[$, $f\left(\frac{u}{x}\right) \xrightarrow[x\to 0^+]{} l$

$$\left|\left(\frac{\sin u}{u}\right)^2 f\left(\frac{u}{x}\right)\right| \leq \|f\|_\infty \left(\frac{\sin u}{u}\right)^2 \text{ intégrable sur } [0,+\infty[$$

CVD, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin u}{u}\right)^2 f\left(\frac{u}{x}\right) du \xrightarrow[x\to 0^+]{} l \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin u}{u}\right)^2 du$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\phi(x)}{x} = l\frac{\pi}{2}$$

6.1

Soit $x \in \mathbb{R}$, ~~par ex $x > 0$~~.

$$\frac{\ln(x^2+t^2)}{1+t^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2\ln t}{t^2} = O\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right) \text{ intégrable en } +\infty$$

si $x \neq 0$, $\displaystyle\frac{\ln(x^2+t^2)}{1+t^2} \sim \frac{\ln(x^2)}{1}$ intégrable en 0

si $x = 0$, $\displaystyle\frac{\ln(t^2)}{1+t^2} \sim 2\ln t$ intégrable en 0

Donc, $f(x)$ est défini sur $\mathbb{R}$.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\ln(x^2+t^2)}{1+t^2}\right) = \frac{2x}{(1+t^2)(x^2+t^2)}$$

est continue du couple (x,t) sur $\mathbb{R} \times]0,+\infty[$

$$\frac{2x}{(1+t^2)(x^2+t^2)} = \frac{2}{(1+t^2)\left(x+\frac{t^2}{x}\right)} \leq \frac{2}{(1+t^2)\times 2t} = \frac{1}{t+t^3}$$

$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall t \in [1, +\infty[$,

$$\left|\frac{2x}{(1+t^2)(x^2+t^2)}\right| \leq \frac{1}{t+t^3} \quad \text{intégrable en } +\infty$$

$$\frac{2x}{(1+t^2)(x^2+t^2)} \leq \frac{2x}{x^2+t^2}$$

$\forall x \geq a > 0,\ \forall t \in [0,1]$,

$$\frac{2x}{(1+t^2)(x^2+t^2)} \leq \frac{2x}{x^2+t^2} \leq \frac{2x}{x^2} \leq \frac{2}{a} \quad \text{intégrable en } 0$$

Donc f est $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

$$f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{2x}{(1+t^2)(x^2+t^2)}\, dt$$

$$= 2x \left(\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)(x^2+t^2)}\, dt \right)$$

$(x \neq 1)$ $$= \frac{2x}{x^2-1} \left(\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{x^2+t^2}\, dt \right)$$

$$= \frac{2x}{x^2-1} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{x^2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+\left(\frac{t}{x}\right)^2}\, d\left(\frac{t}{x}\right) \right)$$

$$= \frac{2x}{x^2-1} \left(1 - \frac{1}{x}\right) \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{x+1}$$

$$f'(x) = \frac{\pi}{x+1} \Rightarrow f(x) = \pi \ln(x+1) + \underbrace{C}_{f(0)}$$

par $\mathcal{C}^0$ de f en 1.

Donc, $$f(x) = \pi \ln(|x|+1) + \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{\ln t^2}{1+t^2}\, dt}_{=0}$$

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t^2)}{x^2+t^2}\,dt$$

$$\overset{xu=t}{=} \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2u^2)}{x^2+x^2u^2}\,x\,du$$

$$= \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \frac{\ln x^2 + \ln\left(\frac{1}{x^2}+u^2\right)}{1+u^2}\,du$$

$$= \frac{\ln x^2}{x} \times \frac{\pi}{2} + \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \frac{\ln\left(\frac{1}{x^2}+u^2\right)}{1+u^2}\,du$$

$$= \frac{\pi \ln|x|}{x} + \frac{1}{x} f\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= \frac{\pi \ln|x|}{x} + \frac{1}{x}\,\pi \ln\left(\frac{1}{x}+1\right)$$

$$= \frac{\pi}{x}\ln(x+1)$$

6.2

$$I(x) = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos^2 t + x^2 \sin^2 t)\,dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} \ln(\cos^2 t) + \ln(1 + x^2 \tan^2 t)\,dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} \ln \cos^2 t\,dt + \int_0^{\pi/2} \ln(1 + x^2 \operatorname{tg}^2 t)\,dt$$

$u = \operatorname{tg} t$

$\operatorname{arg tg} u = t$

$\frac{1}{1+u^2}\,du = dt$

$$= -\pi \ln 2 + \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2u^2)}{1+u^2}\,du$$

$$= -\pi \ln 2 + \int_0^{+\infty} \frac{\ln\left(\frac{1}{x^2}+u^2\right)}{1+u^2}\,du + \int_0^{+\infty} \frac{\ln x^2}{1+u^2}\,du$$

$$= -\pi \ln 2 + \pi \ln\left(\frac{1}{x}+1\right) + (\ln x^2)\frac{\pi}{2}$$

$$= \pi \ln\left(\frac{x}{2}\right) + \pi \ln\left(\frac{1}{x}+1\right) = \pi \ln\left(\frac{1}{2}+\frac{|x|}{2}\right)$$

6.3 $\quad I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\sinh x}{x} e^{-ax}\, dx$

→ pour $a > 1$, $\quad \frac{\sinh x}{x} e^{-ax} \xrightarrow[x \to 0^+]{} 1$ intégrable en 0

$$\frac{\sinh x}{x} e^{-ax}$$

$$= \frac{e^{(1-a)x} - e^{-(1+a)x}}{2x} \sim \frac{e^{(1-a)x}}{2x} \text{ intégrable en } +\infty$$

Donc, $I(a)$ est définie pour $a > 1$.

$$\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\sinh x}{x} e^{-ax}\right) = -\sinh x\, e^{-ax}$$

Sur $[a_0, +\infty[$, $(a_0 > 1)$,

$$\left| -\sinh x\, e^{-ax} \right| \leq \sinh x\, e^{-a_0 x}$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{(1-a_0)x} - e^{-(1+a_0)x}\right) \text{ intégrable sur } \mathbb{R}$$

Donc $I(a)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1, +\infty[$,

$$I'(a) = \int_0^{+\infty} -\sinh x\, e^{-ax}\, dx$$

$$= -\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{(1-a)x} - e^{-(1+a)x}\, dx$$

$$= +\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1+a}\right)$$

$$I(a) = +\frac{1}{2}\left(\ln(a+1) - \ln(a-1)\right) + C$$

$$= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{a+1}{a-1}\right) + C$$

$$I(a) \xrightarrow[a \to +\infty]{} 0$$

Donc, $I(a) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{a+1}{a-1}\right)$

6.4

a) Soit $x \in \mathbb{R}$.

pour $N > \frac{x}{2}$ $\left(\frac{x^{2n}}{2^{2n} n!^2}\right)_{n \geq N}$ est une suite décroissante. Le critère de Leibniz s'applique. Donc f est définie sur $\mathbb{R}$.

Il s'agit d'une série entière, on peut donc la dériver terme à terme.

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \times 2n x^{2n-1}}{2^{2n} \; n!^2}$$

$$f''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \; 2n(2n-1) \; x^{2n-2}}{2^{2n} \quad n!^2}$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n (2n)^2 x^{2n-2}}{2^{2n} \quad n!^2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n(-1)^n x^{2n-2}}{2^{2n} \quad n!^2}$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \quad x^{2(n-1)}}{2^{2(n-1)} (n-1)!^2} - \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n(-1)^n x^{2n-1}}{2^{2n} \quad n!^2}$$

$$= (-1) \quad f(x) \qquad - \frac{f'(x)}{x}$$

$$f''(x) + \frac{f'(x)}{x} + f(x) = 0$$

ou bien $\quad x f''(x) + f'(x) + x f(x) = 0$

b) À x fixé, étudions :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (x \sin y)^{2n}}{(2n)!}$$

$$\left\| \frac{(x \sin y)^{2n}}{(2n)!} \right\|_\infty \leq \frac{x^{2n}}{(2n)!} \text{ t.g. d'une série CV.}$$

Donc, par Beppo-Levi,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x \sin y) \, dy = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin y)^{2n} \, dy$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \frac{\pi}{2} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}$$

$$= \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}} \frac{x^{2n}}{n!^2} = \frac{\pi}{2} f(x)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x \sin y)\, dy = \frac{\pi}{2} f(x)$$

c) $f(x)$ est continue bornée

Donc pour $s > 0$, par la transformée de Laplace,

$F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt$ est définie.

On regarde $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left| e^{-st} \frac{(-1)^n t^{2n}}{2^{2n} n!^2} \right| dt$

$$= \frac{1}{2^{2n} n!^2} \int_0^{+\infty} e^{-st} t^{2n}\, dt$$

$u = st$

$$= \frac{1}{2^{2n} n!^2} \int_0^{+\infty} e^{-u} \left(\frac{u}{s}\right)^{2n} \frac{du}{s}$$

$$= \frac{1}{2^{2n} n!^2} \times \frac{1}{s^{2n+1}} \int_0^{+\infty} u^{2n+1} e^{-u} \frac{du}{u}$$

$$= \frac{1}{2^{2n} n!^2 s^{2n+1}} \Gamma(2n+1)$$

$$= \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2 s^{2n+1}} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}\, s^{2n+1}}$$

pour $s > 1$, $\sum \frac{1}{s^{2n+1}}$ CV donc par Beppo-Levi,

$$F(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-st} \frac{(-1)^n t^{2n}}{2^{2n} n!^2} dt$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n} n!^2} \times \frac{1}{s^{2n+1}} \times (2n)!$$

5.3 $$\frac{1}{k}\left(\frac{n-1}{n}\right)^k = \int_0^{\frac{n-1}{n}} t^{k-1}\,dt$$

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\left(\frac{n-1}{n}\right)^k$$

$$= \int_0^{\frac{n-1}{n}} (1+t+\dots t^{n-1})\,dt$$

$$= \int_0^{\frac{n-1}{n}} \frac{1-t^n}{1-t}\,dt$$

$$= \int_0^{\frac{n-1}{n}} \frac{1}{1-t}\,dt - \int_0^{\frac{n-1}{n}} \frac{t^n}{1-t}\,dt$$

$$= \int_1^{\frac{1}{n}} \frac{-1}{u}\,du - \int_0^{1-\frac{1}{n}} \frac{t^n}{1-t}\,dt$$

$$= +\ln n - \int_0^{1-\frac{1}{n}} \frac{t^n}{1-t}\,dt$$

$$\int_0^{1-\frac{1}{n}} \frac{t^n}{1-t}\,dt$$

$u=1-t$ $$= -\int_1^{\frac{1}{n}} \frac{(1-u)^n}{u}\,du$$

$$= \int_{\frac{1}{n}}^{1} (1-u)^n \frac{du}{u}$$

$v=nu$ $$= \int_1^{n} \left(1-\frac{v}{n}\right)^n \frac{dv}{v}$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \forall v \in [1,n], \ \left(1-\frac{v}{n}\right)^n \leq e^{-v}$ intégrable

CVD, $$\int_1^{n}\left(1-\frac{v}{n}\right)^n \frac{dv}{v} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_1^{+\infty} e^{-v}\frac{1}{v}\,dv = -K$$

$$u_n = \ln n + K + o(1)$$

4.3

a) C.N.S. : $\int_0^{2\pi} f(t)\,dt = 0$

b) D'après a) $f(t) - c_0(f)$ admet une primitive 2π-périodique $F(t)$

$$\int_1^{+\infty} \frac{f(t)-c_0(f)}{t^b}\,dt$$

$$= \left[\frac{F(t)}{t^b}\right]_1^{+\infty} + b\int_1^{+\infty} \frac{F(t)}{t^{b+1}}\,dt$$

$$= -F(1) + \underbrace{b\int_1^{+\infty} \frac{F(t)}{t^{b+1}}\,dt}$$

$$|\ \text{"}\ | \leq b\int_1^{+\infty} \frac{M}{t^{b+1}}\,dt \leq bM\left[\frac{t^{-b}}{-b}\right]_1^{+\infty}$$

$$\leq M$$

Donc, $\int_1^{+\infty} \frac{f(t)-c_0(f)}{t^b}\,dt$ CV.

c)

$$\int_1^X \frac{f(t)}{t^b}\,dt$$

$$= \underbrace{\int_1^X \frac{f(t)-c_0(f)}{t^b}\,dt}_{\text{borné}} + c_0(f)\underbrace{\int_1^X \frac{1}{t^b}\,dt}_{\left[\frac{1}{-b+1}t^{1-b}\right]_1^X}$$

Donc, $\int_1^X \frac{f(t)}{t^b}\,dt \sim \frac{c_0(f)}{1-b} X^{1-b}$ pour $b < 1$

Si $b = 1$, $\int_1^X \frac{f(t)}{t}\,dt \sim c_0(f) \ln X$.