Base $(e_i)_{i\in I}$
I totalement ordonnée.
partie-base pas de l'ordre

TD cours : algèbre linéaire

1.1.

(Hyp) E possède une partie génératrice finie B.

B contient un système libre de cardinal max. Soit L

Si $b \in B \setminus L$, $L \cup \{b\}$ est lié, L libre

$\Rightarrow b \in Vect(L)$. $\lambda_b b + \sum_{x \in L} \lambda_x x = 0$ $(\lambda_x) \cup (\lambda_b) \neq 0$

$\lambda_b = 0 \Rightarrow L$ lié non !

donc $\lambda_b \neq 0$ et $b = -\frac{1}{\lambda_b} \sum_{x \in L} \lambda_x x$

Ainsi, L est une base de E.

Si E possède une base $(e_1, \dots, e_p)$, et si L' est libre, L' est fini de card $\leq p$

D/ $(y_1, \dots, y_{p+1})$ toujours lié : par récurrence sur p

$a_{11} \neq 0$ par ex.

$y_j = \sum_{i=1}^{p} a_{ij} e_i$ $j = 1, \dots, p+1$

$\underbrace{y_j - \frac{a_{1j}}{a_{11}} y_1}_{z_j} \in Vect(e_2, \dots, e_p)$ $j = 2, \dots, p+1$

donc $(z_2, \dots, z_{p+1})$ est lié (HR)

$\lambda_2 z_2 + \dots + \lambda_{p+1} z_{p+1} = 0$

D'où, $\sum_{2}^{p+1} \lambda_j y_j - \left(\sum_{j=2}^{p+1} \lambda_j \frac{a_{1j}}{a_{11}}\right) y_1 = 0$

Soit L' une partie libre de cardi max $\subset A$

(possible : les parties libres ont un cardinal $\leq p$).

L' est une base car $Vect(L') \supset Vect(A)$

1.2

(i) Soit $\sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda_k P_k = 0$ $(\lambda_k) \in \underbrace{\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}}_{\text{presque nulle}}$

CL : toujours finie

une CL des P_k ; le nombre de k t.q. $\lambda_k \neq 0$ est fini.
On se ramène à $\lambda_0 P_{k_0} + \dots + \lambda_n P_{k_n} = 0$ $k_0 < \dots < k_n$
On regarde le coeff dom : c'est celui de P_{k_n} donc $\lambda_n = 0$. ETC ..

(ii) $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$.
La base canonique est $(X_1^{\alpha_1} \dots X_n^{\alpha_n})$ $\alpha_i \in \mathbb{N}$, $i = 1..n$

(iii) $\mathbb{K}[[X]] = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ ($\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ muni de lois convenables, produit de Cauchy)
(X^n) n'est pas une base car $\mathbb{K}[[X]]$ est de dimension non dénombrable.

(une base non dénombrable)

Cas de $\mathbb{C}$: $\frac{1}{a-X} \underset{\text{dans } \mathbb{K}[[X]]}{=} \frac{1}{a} \frac{1}{1-\frac{X}{a}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{X^n}{a^{n+1}} = S_a$

Si $a_1, \dots, a_p$ sont 2 à 2 $\neq$ la famille est libre

$\lambda_1 S_{a_1} + \dots + \lambda_p S_{a_p} \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} & \frac{1}{a_2} & \dots & \frac{1}{a_p} \\ \frac{1}{a_1^2} & \frac{1}{a_2^2} & & \frac{1}{a_p^2} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{1}{a_1^p} & & \dots & \frac{1}{a_p^p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

Le déterminant de la matrice est un Vandermonde $\neq 0$.
$\lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$
Comme $\mathbb{C}^*$ est non dénombrable, $\mathbb{C}[[X]]$ n'est pas de dimension dénombrable.

(iv) Base de $\mathbb{R}(X)$

$$\underset{\text{partie entière}}{(X^n)} \cup \left(\frac{1}{(X-a)^\alpha}\right) \cup \left(\frac{1}{(X^2+bX+c)^\beta}\right) \cup \left(\frac{X}{(X^2+bX+c)^\beta}\right)$$

$a \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{N}^*$; $\beta \in \mathbb{N}^*$, $b^2-4c<0$; $\beta \in \mathbb{N}^*$, $b^2-4c<0$

1.3

Soit $P_1 \in E$ de degré max que l'on complète en une base $(P_1, \dots, P_m)$ de E.
Alors $(P_1, P_2+\lambda_2 P_1, \dots, P_m+\lambda_m P_1)$ est, quelque soit le choix de $\lambda_2, \dots, \lambda_m$, une base

Passage $\begin{pmatrix} 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_m \\ & \ddots & & \vdots \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ On choisit λ_k $\deg(P_k+\lambda_k P_1) < \deg P_1$, $k=2, \dots, m$

degrés échelonnés

Par récurrence sur $\dim E$. $\widetilde{P}_k$ $\hat{P}_k$

On choisit les λ_i de sorte que $\deg(\underbrace{P_k+\lambda_k P_1}_{\hat{P}_k}) < \deg P_1$

puis on utilise (HR) pour $\mathrm{Vect}(\hat{P}_2, \dots, \hat{P}_m)$

1.4 On a : $\forall p \in \mathbb{N}$
$f^{\circ p+1} = o\,(f^p)$

En effet, $f^{\circ p+1} = f \circ f^p$, $f^{\circ p} \nearrow +\infty$, $f(y) = o(y)$

si $\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_p f_p = 0$. On divise par f_1, au $V(+\infty)$

$\lambda_1 + \lambda_2 \frac{f_2}{f_1} + \dots + \lambda_p \frac{f_p}{f_1} = 0$ $x \to +\infty$ $\lambda_1 = 0$

M

X

$MX = \lambda X$

$D = \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix}$

1.5 $\dim \mathbb{D}_n(\mathbb{K}) = n$ $\quad (\mathbb{D}_n(\mathbb{K}) \cong \mathbb{K}^n)$

Si $\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k D^k = 0$ il vient : $\begin{cases} \lambda_0 + \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_1 a_1^{n-1} = 0 \\ \vdots \\ \lambda_0 + \lambda_1 a_n + \dots + \lambda_n a_n^{n-1} = 0 \end{cases}$

VDM $(\lambda_n) = (0)$

1.6 $\mathrm{Val}(X^k(1-X)^{n-k}) = k \quad k = 0, \dots, n$

$\lambda_0 P_0 + \dots + \lambda_n P_n = 0$

On regarde les terme :

si $\lambda_0 = \dots = \lambda_{p-1} = 0$

il reste $\lambda_p P_p + \dots + \lambda_n P_n = 0$

Coeff de X^p, $\lambda_p = 0$ ....

2.1

u est alors nul sur $\mathrm{Vect}(E \setminus F)$ car $\mathrm{Vect}(E \setminus F) = E$

car si $x \in F$ et $y \notin F$ (Hyp), $x = \underbrace{x+y}_{\text{dans } E \setminus F} - \underbrace{y}_{\text{dans } E \setminus F}$

Alors $u = 0_{\mathcal{L}(E)}$

2.2. Si $F \not\subset G$ et $G \not\subset F$, on trouve :

$x \in F \setminus G$ et $y \in G \setminus F$

Soit $z = x + y$.

$F \cup G$ étant un $\mathbb{K}$-ev (H) $z \in F \cup G$

De là $\begin{cases} z \in F & z - x = y \in F \quad \text{NON!} \\ z \in G & z - y = x \in G \quad \text{NON!} \end{cases}$

RM] Soit $(G,\cdot)$ un groupe, $f : G \xrightarrow{Hom} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$

$H = \{(\bar{0},\bar{0}), (\bar{1},\bar{1})\}$

$H' = \{(\bar{0},\bar{0}), (\bar{0},\bar{1})\}$

$H'' = \{(\bar{0},\bar{0}), (\bar{1},\bar{0})\}$

Si f est surjectif, G est réunion de sg 2 à 2 $\neq$ $f^{-1}(H)$, $f^{-1}(H')$, $f^{-1}(H'')$

2.3 a) $f \in E$ possède une primitive dans E
$\iff \int_0^{2\pi} f = 0$

$\delta_0(f) = f(0)$

b) $F = \{ f \in E \mid f(0) - f(\pi) = 0 \} = \operatorname{Ker}\delta_0 \cap \operatorname{Ker}\delta_\pi$

(δ_0, δ_π) libre, donc F est de codim 2.

$G = \operatorname{Vect}(1, \cos)$

Si $g = \lambda \mathbb{1}_{\mathbb{R}} + \mu \cos \in G \cap F$, il vient :

$g(0) = g(\pi) = 0 \quad \lambda + \mu = 0 \quad \lambda - \mu = 0 \Rightarrow \lambda = \mu = 0$

Soit $f \in E$. Soit λ, μ $\begin{cases} \lambda + \mu = f(0) \\ \lambda - \mu = f(\pi) \end{cases}$

$h = f - \lambda \mathbb{1}_{\mathbb{R}} - \mu \cos \in F$ donc $F + G = E$

$F \oplus G = F \oplus G' = E$

$p : E \to G$

$p|_{G'}^{G}$ isom.

2.4 $F \neq \{0\}$ et $F \neq E$, on traite la DF

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E t.q.
$(e_1, \dots, e_p)$ soit une base de F. $p < n$ ici.

On note $G_\lambda = \operatorname{Vect}(e_{p+1} + \lambda e_1, e_{p+2}, \dots, e_n)$

2 à 2 $\neq$, si $\begin{cases} G_\lambda = G_{\lambda'} = G \\ \lambda \neq \lambda' \end{cases}$ $\quad e_{p+1} + \lambda e_1 \in G$, $\quad e_{p+1} + \lambda' e_1 \in G$

par différence, $(\lambda' - \lambda) e_1 \in G$, $e_1 \in G$.

Mais $G_\lambda \cap F = \{0\}$.

Sinon $\mu_1 (e_{p+1} + \lambda e_1) + \mu_2 e_{p+2} + \dots + \mu_{n-p} e_n = \sum_1^p \lambda_i e_i$

$\mu_i e_{p+1} + \dots + \mu_{n-p} e_n \in F$

donc $\mu_1 = 0$

Bilan $\begin{cases} e_1 \in G \text{ est exclu donc } G_\lambda \neq G_{\lambda'} \\ \forall \lambda,\ G_\lambda \cap F = \{0\} \text{ et } \dim F + \dim G_\lambda = n \end{cases}$

2.5 Par récurrence sur la codimension.

<u>premier cas</u>: F et G sont des hyperplans

$F \subset G$
$\dim F = \dim G$
alors $F = G$

Si $F = G$ O.K.

Sinon $F \not\subset G$ et $G \not\subset F$

Alors par 2.2 $F \cup G \neq E$

Soit $a \in E \setminus (F \cup G)$

$a \notin F$: $F \cap \mathbb{K}a = \{0\}$

$a \notin G$: $G \cap \mathbb{K}a = \{0\}$

$F \oplus \mathbb{K}a = G \oplus \mathbb{K}a = E$

<u>Cas général</u>: $\dim F \leq \dim E - 2$

On choisit $a \notin F \cup G$ (2.2)

$F' = F \oplus \mathbb{K}a \quad G' = G \oplus \mathbb{K}a \qquad \operatorname{codim} F' = \operatorname{codim} F - 1$

(HR): $F' \oplus H = G' \oplus H = E$

alors $\mathbb{K}a \oplus H$ convient.

2.6

$\mathbb{K}$ est un e-v sur son sous-corps.

(i) $|E|$? Si E est de dimension $n \in \mathbb{N}$, E est isomorphe à $\mathbb{K}^n$, donc $|E| = q^n$.

(ii) Systèmes libres:

<u>$m = 1$</u> : $q^n - 1$

<u>$m = 2$</u> On choisit $x_1 \in E \setminus \{0\}$

(x_1, x_2) libre $\Leftrightarrow x_2 \notin \mathbb{K}x_1$

$\longrightarrow q^n - q$ choix

Au total, $(q^n - 1)(q^n - q)$

$(x_1, \dots, x_{m-1})$ choisis

$x_m \notin \underbrace{\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_{m-1})}_{\text{card } q^{m-1}}$

Total : $\prod_{k=0}^{m-1} (q^n - q^k)$

(iii) Bases : $(q^n - 1) \dots (q^n - q^{n-1})$

(iv) nombre d'hyperplans :

H possède une équation $a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0$

Une deuxième équation $b_1 x_1 + \dots + b_n x_n = 0$ donne le même H ssi $(b_i) \in \mathbb{K}^* (a_i)$. On trouve

$\mathbb{K}^n / \{(0, 0 \dots, 0)\}$ $\qquad \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$ $\begin{cases} a \sim b \iff \exists \lambda \in \mathbb{K}^*, \ b = \lambda a \\ \text{chaque classe possède } (q-1) \text{ éléments} \end{cases}$

3.1.

* C.N. S'il existe, $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0 \Rightarrow u\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) = 0$

linéarité de $u \Rightarrow \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i = 0$

C.S. Soit $F = \mathrm{Vect}(x_i)$, G s.e.v., $F \oplus G = E$.

On pose, à priori, pour $(\mu_i) \in \mathbb{K}^n$, $u\left(\sum_{i=1}^n \mu_i x_i\right) = \sum_{i=1}^n \mu_i y_i$

Correct : Si $\sum_{i=1}^n \mu_i x_i = \sum_{i=1}^n \mu_i' x_i$, il vient $\sum_{i=1}^n (\mu_i - \mu_i') x_i = 0$

donc, (hyp) $\sum_{i=1}^n (\mu_i - \mu_i') y_i = 0$, u est correctement définie.

$\sum_{i=1}^n \mu_i y_i = \sum_{i=1}^n \mu_i' y_i$

On pose enfin $u = 0$ sur G, u est linéaire par définition (Si $z \in E$, $z = x + x'$, $u(z) = u(x)$.)

théorème du rang

3.2 Soient E et F deux $\mathbb{K}$e.v, avec E DF
$u \in \mathcal{L}(E,F)$
Soit G $\operatorname{Ker} u \oplus G = E$.
On regarde $v = u_{|G}^{|\operatorname{Im} u}$, v est injective : si
$v(x) = 0$, $x \in G \cap \operatorname{Ker} u$ donc $x = 0$
v est surjective : si $y = u(x') \in \operatorname{Im} u$, $x' = \underbrace{x_0'}_{\in \operatorname{Ker} u} + \underbrace{x_1'}_{\in G}$
$y = u(x') = u(x_1')$.
v est un isomorphisme, donc conserve les bases :
D'où, $\dim \operatorname{Im} u = \dim G = \dim E - \dim \operatorname{Ker} u$

$\dim(F+G)$
$= \dim F + \dim G$
$- \dim(F \cap G)$

3.3
$$\operatorname{Im}(u+v) \subset \operatorname{Im}(u) + \operatorname{Im}(v)$$
$$rg(u+v) \leq rg(u) + rg(v)$$
De là, $rg(u) \leq rg(u-v) + rg(v)$
$$rg(u) - rg(v) \leq rg(u-v).$$
Conclusion par symétrie.

3.4 Soit $a \in A \setminus \{0\}$, $\varphi_a : \begin{cases} A \to A \\ b \mapsto ab \end{cases}$

Comme A est intègre, $\operatorname{Ker} \varphi_a = \{0\}$.
Or A est de dimension finie, donc φ_a est bijective (théorème du rang).
$$\left.\begin{array}{ll} \exists b \in A & ab = 1_A \\ \exists b' \in A & b'a = 1_A \end{array}\right\} b' = b'1 = b'(ab) = (b'a)b = b$$
Donc, si A est de dimension finie, A est un corps
⚠ Dimension infinie : $A = \mathbb{R}[X]$ par ex :
$$u : \begin{cases} A \to A \\ P \mapsto P' \end{cases} \qquad v \begin{cases} A \to A \\ P \mapsto (x \mapsto \int_0^x P) \end{cases}$$
$u \circ v = Id$, u est surjectif non injectif
v est injectif non surjectif

3.5

On fixe une base $(e) = (e_1, \dots, e_n)$ de E.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$

$u \in GL(E) \iff (u(e_1), \dots, u(e_n))$ est une base,

et la donnée de $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ détermine u.

$$|GL(E)| = \text{nombre de bases de } E$$

$$= (q^n - 1) \cdots (q^n - q^{n-1})$$

3.6.

($\Rightarrow$) Soit $y \in \operatorname{Im} u \cap \operatorname{Ker} v$, écrivons $y = u(x)$

on a $v(y) = 0$ donc $v \circ u(x) = 0$, donc

$x \in \operatorname{Ker}(v \circ u) = \operatorname{Ker} u$, $y = u(x) = 0$.

($\Leftarrow$) Soit $x \in \operatorname{Ker}(v \circ u)$, il vient $v(u(x)) = 0$,

donc $u(x) \in \operatorname{Im} u \cap \operatorname{Ker} v = \{0\}$. $u(x) = 0$

$\operatorname{Ker}(v \circ u) \subset \operatorname{Ker} u$.

$\operatorname{Ker} u \subset \operatorname{Ker}(v \circ u)$: clair.

On a toujours $\operatorname{Im} v \circ u \subset \operatorname{Im} v$

l'hyp importante : $\operatorname{Im} v \subset \operatorname{Im} v \circ u$

($\Rightarrow$) Soit $x \in E$, il existe $x' \in E$ t.q.

$$v \circ u(x') = v(x)$$

ie $v(u(x') - x) = 0$, donc $\underbrace{u(x') - x}_{z} \in \operatorname{Ker} v$

$$x = \underbrace{u(x')}_{\in \operatorname{Im} u} - \underbrace{z}_{\in \operatorname{Ker} v}$$

($\Leftarrow$) $\operatorname{Im} v \circ u \subset \operatorname{Im} v$: clair

Soit $y \in \operatorname{Im} v$, il existe $x \in E$, $v(x) = y$

On écrit $x = \underbrace{x_1}_{\in \operatorname{Im} u} + \underbrace{x_2}_{\in \operatorname{Ker} v}$, $x_1 = u(x')$

$$y = v(x_1 + x_2) = v \circ u(x') \in \operatorname{Im}(v \circ u)$$

th du rang 3.7. $\mathrm{Ker}\, u = \mathrm{Ker}\, u^2 \Rightarrow \dim \mathrm{Im}\, u = \dim \mathrm{Im}\, u^2$

Or $\mathrm{Im}\, u^2 \subset \mathrm{Im}\, u$, donc $\mathrm{Im}\, u = \mathrm{Im}\, u^2$

3.8.

$\dim(\mathrm{Ker}\, u \cap \mathrm{Ker}\, v) + \dim(\mathrm{Ker}\, u + \mathrm{Ker}\, v)$
$= \dim \mathrm{Ker}\, u + \dim \mathrm{Ker}\, v$

$\dim(\mathrm{Im}\, u \cap \mathrm{Im}\, v) = \mathrm{rg}\, u + \mathrm{rg}\, v - \dim(\mathrm{Im}\, u + \mathrm{Im}\, v)$

$\dim(\mathrm{Ker}\, u \cap \mathrm{Ker}\, v) + \dim(\mathrm{Im}\, u \cap \mathrm{Im}\, v)$
$= 2 \dim E - \dim(\mathrm{Ker}\, u + \mathrm{Ker}\, v) - \dim(\mathrm{Im}\, u + \mathrm{Im}\, v)$

Soit $F = \mathrm{Ker}(u+v)$. On regarde $v|_F = w$

$x \in \mathrm{Ker}\, w \Rightarrow u(x) = 0$ et $v(x) = 0$

$\Rightarrow x \in \mathrm{Ker}\, u \cap \mathrm{Ker}\, v$

$\dim F = \underbrace{\dim(\mathrm{Ker}\, u \cap \mathrm{Ker}\, v)}_{\mathrm{Ker}\, w} + \dim \mathrm{Im}\, w$

$y \in \mathrm{Im}\, w$, $y = v(x)$ avec $u(x) + v(x) = 0$

donc $y = -u(x) \in \mathrm{Im}\, u \cap \mathrm{Im}\, v$

3.9. On étudie les conditions données.

$$\begin{cases} u \circ v = 0 \iff \mathrm{Im}\, v \subset \mathrm{Ker}\, u \\ v \circ u = 0 \iff \mathrm{Im}\, u \subset \mathrm{Ker}\, v \end{cases}$$

Idée: Si F et G sont deux s.e.v. de E, la CNS pour qu'il existe $v \in \mathcal{L}(E)$ t.q. $\mathrm{Ker}\, v = F$ et $\mathrm{Im}\, v = G$ est $\dim F + \dim G = \dim E$

D/ $(\Rightarrow)$ clair

$(\Leftarrow)$ Soit F', $F \oplus F' = E$, soit w un isom. $F' \to G$

On pose $\begin{cases} u|_F = \{0\} \\ u|_{F'} = w \end{cases}$

De là si $\dim F + \dim G = \dim E$ et $G \subset \operatorname{Ker} u$
alors $\operatorname{Im} u \subset F$.

$$\begin{cases} u = 0 \text{ . O.K.} \\ u \text{ isomorphisme O.K.} \end{cases}$$

Si $0 < \dim \operatorname{Ker} u < \dim E$ avec $G = \operatorname{Ker} u$, ($\operatorname{Im} v$)
il vient : $\forall F$ sev de E de dim $rg(u)$, $\operatorname{Im} u \subset F$
NON ! $\operatorname{Ker} v$ $\operatorname{Ker} v$

3.10

On suppose $\begin{cases} \exists v \in \mathcal{L}(E) \\ u \circ v = 0, \text{ et } u+v \text{ inversible} \end{cases}$

Soit $x \in \operatorname{Ker} u^2$.

$$u \circ (u+v)(x) = 0 \text{ , donc } \underbrace{(u+v)}_{w}(x) \in \operatorname{Ker} u$$

$$x \in w^{-1}(\operatorname{Ker} u)$$

Or $\dim w^{-1}(\operatorname{Ker} u) = \dim \operatorname{Ker} u$, $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} u^2$

Soit $y = u(x) \in \operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Im} u$, il vient $u^2(x) = 0$
donc $x \in \operatorname{Ker} u$, donc $y = 0$

Bref : $\operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u = E$.

Si $\operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u = E$, on choisit une base (e) de $\operatorname{Ker} u$, (e') de $\operatorname{Im} u$

$B = (e) \cup (e')$ $\quad [u]_B = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & A \end{array}\right)$ avec $rg(A) = rg(u)$, A inversible

$[v]_B = \left(\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$ convient.

4. Interpolation <u>Généralisation</u>

4.1 $\begin{cases} x_1, \dots, x_n \text{ fixé} \\ y_i^k \ , \quad i=1,\dots,n \ , \quad 0 \leq k \leq \alpha_i - 1 \end{cases}$

$\mathbb{C}[X] / \prod_i^n (X - x_i)^{\alpha_i} \simeq \prod_i^n \mathbb{C}[X] / (X - x_i)^{\alpha_i}$

Soit $\alpha_i \geq 1, \dots, \alpha_n \geq 1$, $m = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$,

MQ : $\exists ! \ P \in \mathbb{C}_{m-1}[X]$.

$\forall i, \ \forall k \in [\![0, \alpha_i - 1]\!], \quad P^{(k)}(x_i) = y_i^k$

D/ Soit $\varphi : \begin{cases} \mathbb{C}_{m-1}[X] \longrightarrow \mathbb{C}^n \\ P \mapsto (P(x_1), \dots, P^{(\alpha_1 - 1)}(x_1), \dots, P(x_n), \dots, P^{(\alpha_n - 1)}(x_n)) \end{cases}$

φ est linéaire. O.K.

Soit $P \in \operatorname{Ker} \varphi$

$\varphi(P) = 0 \iff \prod_{k=1}^{n} (X - x_k)^{\alpha_k} \mid P \iff P = 0$ car $P \in \mathbb{C}_{m-1}[X]$

Or $\dim \mathbb{C}_{m-1}[X] = \dim(\mathbb{C}^m) = m$.

Ainsi, φ est un isomorphisme.

4.2

$$M = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{avec } x_i \neq x_j \text{ dès que } i \neq j$$

$$M \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{pmatrix} \iff \sum_{k=0}^{n-1} a_k x_i^k = b_i \quad i = 1 \dots n$$

$$\iff \begin{cases} P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \text{ est l'un de Lagrange} \\ x_i \longrightarrow b_i \quad , i = 0, \dots, n-1 \end{cases}$$

<u>Sol</u> $P(X) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i \dfrac{\prod_{j \neq i} (X - x_j)}{\prod_{i \neq j} (x_j - x_i)} = \sum_{i=0}^{n-1} b_i \left(\sum_{j=0}^{n-1} y_{i,j} X^j \right)$

$M^{-1} = {}^t[y_{i,j}]$ décalée de 1

5.1

($\Rightarrow$) clair

($\Leftarrow$) $\forall x \in E \setminus \{0\}, \exists \lambda_x \in \mathbb{K}, u(x) = \lambda_x x$.

On va mq λ_x est fixe. Fixons a.

Soit $y \in F \setminus \{0\}$, $y = \mu a$

$$u(y) = \lambda_y y = \lambda_y \mu a = \mu u(a) = \mu \lambda_a a$$

(a, y) est libre. $\lambda_y = \lambda_a$

$u(a+y) = \lambda_{a+y}(a+y) = u(a) + u(y) = \lambda_a a + \lambda_y y$

il existe $\lambda_a = \lambda_y = \lambda_{a+y}$

5.2

u laisse stable $F \in \mathcal{G}_p$

Lemme

Soit G un sev de E. Si $\dim G = p-1$, il existe F et F' dans $\mathcal{G}_p$ t.q. $F \cap F' = G$.

D/ On sait que $p \leq n-1$ donc $\dim G \leq n-2$

On peut donc trouver a et a' t.q. (a, a') libre et $\mathrm{Vect}(a, a') \cap G = \{0\}$

Soient $F = G \oplus \mathbb{K} a$ et $F' = G \oplus \mathbb{K} a'$.

si $h \in F \cap F'$, on a : $h = \underbrace{x}_{\in G} + \lambda a = \underbrace{x'}_{\in G} + \lambda' a'$

donc $\lambda a - \lambda' a' \in G$, $\lambda a - \lambda' a' = 0$

puis, (a, a') étant libre, $\lambda = \lambda' = 0$

On raisonne par récurrence sur p. $p \in [\![1, n-1]\!]$.

$p = 1$: Schur.

$p \geq 2$. Soit $G \in \mathcal{G}_{p-1}$; il existe $F, F' \in \mathcal{G}_p$ t.q.

$G = F \cap F'$ $\quad u(G) \subset u(F) \cap u(F') \subset F \cap F'$

(cc) G est stable par u, u est une homothétie.

5.3 $p^2 = p$ $X(X-1)$ annule p avec $X \wedge (X-1) = 1$

Bézout $X + 1 - X = 1$

$p + (Id - p) = Id$

$\forall x \in E$, $\underbrace{p(x)}_{x'} + \underbrace{(x - p(x))}_{x''} = x$

$p(x') = x'$, $x' \in \operatorname{Im} p$

$p(x'') = p(x) - p^2(x) = 0$, $x'' \in \operatorname{Ker} p$

Donc, $E = \operatorname{Ker} p + \operatorname{Im} p$.

$\operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Im} p = \{0\}$?

Si $x \in \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Im} p$ $x = p(y)$

$p(x) = p^2(y) = p(y) = 0$

$\operatorname{Im} p = \{x \mid p(x) = x\}$

enfin, $p(x) = x = 0$.

Réciproque

$E = F \oplus G$. Si $x = \underbrace{x'}_{\in F} + \underbrace{x''}_{\in G}$ on pose $p(x) = x'$

5.4

Si $[u, v] = 0$

réciproque fausse

Si $x \in \operatorname{Ker} u$, $u(v(x)) = v(u(x)) = 0$

donc $v(x) \in \operatorname{Ker} u$

Si $x = u(y)$, $v(x) = v(u(y)) = u(v(y)) \in \operatorname{Im} u$

Ainsi, v laisse stable $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u$. $(*)$

* $u = p$ projecteur, si v vérifie $(*)$, on se donne $x \in F$ et on écrit $x = \underbrace{x'}_{\in \operatorname{Im} p} + \underbrace{x''}_{\operatorname{Ker} p}$

$v(p(x)) = v(x')$

$p(v(x)) = p(\underbrace{v(x')}_{\in \operatorname{Im} p} + \underbrace{v(x'')}_{\in \operatorname{Ker} p}) \overset{(*)}{=} p(v(x')) = v(x')$

5.5.

Si $p\circ q = q\circ p = 0$, il vient $(p+q)^2 = p^2 + p\circ q + q\circ p + q^2$
$= p + q$ O.K.

Réciproque : On a : $p\circ q + q\circ p = 0$

d'où, $p\circ q\circ p + p\circ q = 0$ et $q\circ p + p\circ q\circ p = 0$

Ainsi, $p\circ q = q\circ p = -p\circ q\circ p$

On reporte dans (1) $p\circ q = q\circ p = 0$.

5.6. $f+g = Id$ $rg(f+g) = n \leq rg(f) + rg(g) \leq n$

donc $rg(f) + rg(g) = n$.

Or $\underbrace{Im(f+g)}_{E} \subset Im f + Im g$

donc $E = Im f + Im g$

il vient : $Im f \cap Im g = \{0\}$: $Im f \oplus Im g = E$ (3)

Soit $x \in E$, $x = f(x) + g(x)$ est la décomposition de x sur (3)

$f(x)$ est la projection de x sur $Im f // Im g$.

Famille de projecteurs

$E = \bigoplus_{i\in[\![1,n]\!]} F_i$ $\quad x = \underbrace{x_1 + \cdots + x_n}_{\text{unique}}$ $\quad x_i \in F_i$ $\quad p_i(x) = x_i$

$p_i(x) = 0 \iff x \in \bigoplus_{j\neq i} F_j$

|| Si $p_1 + \cdots + p_n = Id$ et $\forall i \neq j$, $p_i \circ p_j = 0$ alors
|| $E = \bigoplus Im\, p_i$ et p_i est le projecteur de E sur $Im\, p_i // \bigoplus_{j\neq 1} Im\, p_j$

* Si $x \in E$, $x = p_1(x) + \cdots + p_n(x)$ (1) $E = \sum_{i=1}^{n} Im\, p_i$

De plus, $p_1(x) = p_1(p_1(x) + \cdots + p_n(x)) \overset{hyp}{=} p_1(p_1(x))$

$p_1^2 = p_1$

** Soit $y = p_2(x_2) + \cdots + p_n(x_n) \in \sum_{i=2}^{n} Im\, p_i$

il vient : $p_1(y) = 0$ donc $\underbrace{\sum_{i=2}^{n} Im\, p_i}_{F} \subset Ker\, p_1$

$F + Im\, p_1 = E$ (1) $F \subset Ker\, p_1$ donc $F = Ker\, p_1$.

*** Si $p_1(x_1) + \cdots + p_n(x_n) = 0$

On applique p_1 $\quad p_1 \circ p_1(x_1) = 0$ puis p_2 :

$p_1(x_1) = 0 \qquad p_2(x_2) = 0$

Donc, la somme des $\operatorname{Im} p_i$ est directe.

5.7

$u^2 = Id_E \qquad X^2 - 1$ annule u, car $-(X-1) + X + 1 = 2$

donc $-\left(\dfrac{u - Id_E}{2}\right) + \left(\dfrac{u + Id_E}{2}\right) = Id$

avec $\left(\dfrac{u - Id_E}{2}\right) \circ \left(\dfrac{u + Id_E}{2}\right) = 0$

On écrit, si $x \in E$, $x = \underbrace{-\left(\dfrac{u(x) - x}{2}\right)}_{x_1} + \underbrace{\dfrac{u(x) + x}{2}}_{x_2}$

$$u(x_1) = \frac{u^2(x) - u(x)}{2} = -x_1$$

et $u(x_2) = \dfrac{u^2(x) + u(x)}{2} = x_2$

$$x = \underbrace{(-x_1)}_{\in \operatorname{Ker}(u + Id)} + \underbrace{x_2}_{\in \operatorname{Ker}(u - Id)}$$

et si $x \in \operatorname{Ker}(u + Id) \cap \operatorname{Ker}(u - Id)$

$$u(x) = -x = x \qquad 2x = 0 \implies x = 0$$

$$E = \underbrace{F}_{u(x) = -x} \oplus \underbrace{G}_{u(x) = x}$$

Si p est le projecteur de E sur $F // G$

il vient : $u = Id - 2p$

Contre-exemple (si car $K = 2$)

dans $M_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$

$$\begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}$$

5.8

(5.4) Soit $v \in \mathcal{L}(E)$. v commute avec $u \iff [v,u]=0$

$\iff v$ laisse stable F et G

__Exo pers.__ le faire directement

5.9

$$v \in \mathcal{C}om(T) \iff v \text{ laisse stable } \overbrace{\mathrm{Ker}(T+Id)}^{F} \text{ et } \overbrace{\mathrm{Ker}(T-Id)}^{G}$$

__Obs__ $[T,T']=0$

$\Rightarrow T'$ laisse stable F et G

$T'^2 = Id$

$$\begin{cases} T'_F = T'|_F^F \text{ est une involution de } F & F' = \mathrm{Ker}(T'+Id) \\ T'_G = T'|_G^G \text{ est une involution de } G & G' = \mathrm{Ker}(T'-Id) \end{cases}$$

v appartient de plus à $com(T')$, on a :

$$[v, T'_F] = [v, T'_G] = 0$$

donc v laisse stable noyaux et image de T'_F et T'_G

ie : $F\cap F'$, $F \cap G'$, $G \cap F'$, $G \cap G'$

La réciproque est vraie car $(F\cap F') \oplus (F \cap G') = F$

$(G \cap F') \oplus (G \cap G') = G$

Bicommutant : C'est $\{ w \in \mathcal{L}(E) \mid \forall v \in Com(T,T'),\ w \circ v = v \circ w \}$

base $\begin{pmatrix} \boxed{}^{F\cap F'} & & & \\ & \boxed{} & & \\ & & \boxed{} & \\ & & & \boxed{}_{G\cap G'} \end{pmatrix}$ bicommutant $\begin{pmatrix} \boxed{\lambda_1 Id} & & & \\ & \boxed{\lambda_2 Id} & & \\ & & \boxed{\lambda_3 Id} & \\ & & & \boxed{\lambda_4 Id} \end{pmatrix}$

6.1.

i) E de DF, $F_k \subset F_{k+1}$: clair

$G_{k+1} \subset G_k$: clair

Si $F_{k+1} = F_k$, comme $\begin{cases} G_{k+1} \subset G_k \\ \dim G_{k+1} = n - \dim F_{k+1} \\ \quad = n - \dim F_k = \dim G_k \end{cases}$ ($F_k \subset F_{k+1}$ aussi)

On a : $G_k = G_{k+1}$

ii) La suite $(\dim F_k)$ croît, et prend ses valeurs dans $[\![0, n]\!]$. Elle est donc stationnaire, soit $p = \min\{k \mid F_k = F_{k+1}\}$

Si $x \in F_{p+2}$, $u^{p+2}(x) = 0$

d'où : $u(x) \in F_{p+1}$ $u(x) \in F_p$

$u^{p+1}(x) = 0$ $F_{p+2} \subset F_{p+1}$, $F_{p+2} = F_{p+1}$ ETC

Si $G_{p+1} = G_p$, $y \in G_{p+2}$: $y = u^{p+2}(x) = u(u^{p+1}(x))$

$= u(u^p(x')) \in G_{p+1}$

$x \in F_p \cap G_p$

$\Rightarrow x = u^p(y)$ et $u^p(x) = 0$

$\Rightarrow u^{2p}(y) = 0$

$\Rightarrow y \in F_{2p}$

$\Rightarrow y \in F_p$

$\Rightarrow x = u^p(y) = 0$

6.2

a) On part d'une CL : $\lambda_0 x + \dots + \lambda_{p-1} u^{p-1}(x) = 0$

On applique u^{p-1} : $\lambda_0 \underbrace{u^{p-1}(x)}_{\neq 0} = 0$: $\lambda_0 = 0$

avec u^{p-2}, $\lambda_1 u^{p-1}(x) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$

ETC ...

nilpotent générique

b) Soit x, $(x, \dots, u^{n-1}(x))$ libre

C'est donc une base de E.

Soit $v \in \mathrm{Com}(u)$:

$\exists \lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}$ $v(x) = \lambda_0 x + \dots + \lambda_{n-1} u^{n-1}(x)$

On pose $w = u - (\lambda_0 I + \dots + \lambda_{n-1} u^{n-1})$

$w(x) = 0$ déf des (λ_i)

$w(u(x)) \overset{v \circ u = u \circ v}{=} u(w(x)) = 0$

$\vdots$

$w(u^k(x)) = u^k(w(x)) = 0$

(CC) v est nul sur une base.

$$u = \lambda_0 Id + \dots + \lambda_{n-1} u^{n-1} \in \mathbb{K}[u].$$

<u>Ex</u>

$$\left.\begin{array}{l} u : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X] \\ u \circ D = D \circ u \end{array}\right\} \quad u = \lambda_0 Id + \dots + \lambda_n D^n$$

$$x = X^n$$

6.3 $\quad E = S + Im(u)$

Soit $x \in E$. On veut mq $x \in S$.

$$\cancel{x = \underbrace{x'}_{\in S} + \underbrace{x''}_{\in Im(u)}}$$

$$\cancel{u^{p-1}(x) = \underbrace{u^{p-1}(x')}_{\in S}} \quad , \cancel{u^{p-1}(x - x') = 0}$$

$\exists (s_0, y_0) \in S \times E$ t.q. $\quad x = s_0 + u(y_0)$

$\exists (s_1, y_1) \in S \times E$ t.q. $\quad y_0 = s_1 + u(y_1)$

$\Rightarrow \quad x = s_0 + u(s_1) + u^2(y_1)$

etc : $\quad x = s_0 + u(s_1) + \dots + u^{p-1}(s_{p-1}) + \underbrace{u^p(y_{p-1})}_{=0} \in S$

par stabilité.

$\Rightarrow \quad E = S$.

<u>Ex</u> Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ t.q. $u \circ u = 0$ MQ : $\exists$ B base de E

$$Mat_B(u) = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}} & & & \\ & \boxed{\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}} & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

$Im\, u \subset Ker\, u$

$rg\, u = p \leq \frac{n}{2}$

Soit $(e_2, e_4, \dots, e_{2p})$ une base de $Im\, u$.

On pose $(e_1, e_3, \dots, e_{2p-1})$ t.q. $u(e_1) = e_2, \dots$

$e_i \in Im\, u \subset Ker\, u$, on complète avec $(e_{2p+1}, \dots, e_n)$

t.q. $(e_2, e_4, \dots, e_{2p}, e_{2p+1}, \dots, e_n)$ est une base de $Ker\, u$

Montrons que $(e_1, e_2, \dots, e_m)$ est libre.

$$\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_m e_m = 0$$

$p = rg\, u$

$$\Rightarrow \lambda_1 e_2 + \lambda_3 e_4 + \dots + \lambda_{2p-1} e_{2p} = 0$$

$m = p + \dim Ker\, u$

$$\Rightarrow \lambda_1, \lambda_3, \dots, \lambda_{2p-1} = 0$$

$= n$

reste : $\lambda_2 e_2 + \lambda_4 e_4 + \dots + \lambda_{2p} e_{2p} + \dots + \lambda_m e_m = 0$

base de noyau, donc, $\lambda_2, \lambda_4, \dots, \lambda_m = 0$

$\underbrace{rg\, u}_{p} + \underbrace{\dim Ker\, u}_{n-p} = n$

On utilise le théorème de rang $\Rightarrow m = n$

d'où $Mat_{(e_1, \dots, e_n)}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & & 0 & 0 & \\ & & 1 & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}$

8.1

$$\Phi(0) = 0, \quad \Phi(1) = 1$$

(i) $\Phi\left(\sum_{k=0}^{n} \lambda_k X^k + \sum_{k=0}^{n} \mu_k X^k\right)$ $\quad n \geq \max(\deg P, \deg Q)$

$$= \sum_{k=0}^{n} (\lambda_k + \mu_k) a^k$$

$$= \Phi\left(\sum_{k=0}^{n} \lambda_k X^k\right) + \Phi\left(\sum_{k=0}^{n} \mu_k X^k\right)$$

(ii) Soit $P(X) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k X^k \in I_a \setminus \{0\}$

alors $\mathbb{K}[a] = Vect(1, a, \dots, a^{n-1})$

* I_a non nul $\Rightarrow \mathbb{K}[a]$ de dimension finie $\quad P = \mu_a$

Soit $Q(X) = \sum_{k=0}^{d} \mu_k X^k \quad Q(a) \in \mathbb{K}[a]$

$(1, \dots, a^{n-1})$ est libre

$Q(X) = A(X)P(X) + B(X) \quad \deg B \leq n-1$

Sinon, $\exists (\lambda_n) \neq (0)$

$\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k a^k = 0$

en $x = a$, $\quad Q(a) = B(a) \in Vect(1, a, \dots, a^{n-1})$

$\Rightarrow \dim \mathbb{K}[a] \leq n$

$\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k X^k$ annule a NON !

$\mathbb{K}[a]$ de dimension finie $m \Rightarrow I_a \neq \{0\}$

$(1, \dots, a^m)$ est lié $\quad \exists (\lambda_k), \sum_{k=0}^{m} \lambda_k a^k = 0$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{m} \lambda_k X^k \in I_a$$

8.2

$(\Rightarrow)$ Si $\mu_a(X) = P(X)Q(X)$

alors, $\mu_a(a) = 0 = P(a)Q(a)$

$\Rightarrow$ par intégrité de $\mathbb{K}$, $P(a) = 0$ ou $Q(a) = 0$ NON.

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $P \neq 0$

alors, $P \wedge \mu_a = 1 \overset{\text{Bézout}}{\Longrightarrow} \exists (U, V) \in \mathbb{K}[X]^2$ t.q.

$$P(X)U(X) + \mu_a(X)V(X) = 1$$

$$P(a)U(a) = 1$$

$\Rightarrow$ tout élément non nul de $\mathbb{K}[a]$ est inversible

$\Rightarrow$ $\mathbb{K}[a]$ est un corps.

$\mu_a = 0$?

On suppose que $\mathbb{K}[a]$ corps

$\exists P \in \mathbb{K}[X]$, $P(a) = 1$

$\Rightarrow X P(X) - 1$ annule a

$\Rightarrow \mu_a \neq 0 \Rightarrow I_a \neq \{0\}$

8.3

Si $P = UV$ avec $\deg U = 1$ $\deg V = 2$

$U, V \in \mathbb{Q}[X]$ P admet une racine rationnelle.

Les seules possibilités : 1 ou (-1)

mais $P(1) \neq 0$, $P(-1) \neq 0$ $\lightning$

P est irréductible.

$P(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$ $P(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} -\infty$

$P' = 3X^2 + 1$, $P'(x) > 0$, $P \nearrow$

Donc P admet une seule racine β réelle.

$\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}[\beta] = 3$

Si $U(\beta) \in \mathbb{Q}[\beta]$, $U \in \mathbb{Q}[x]$

$U(X) = P(X)J(X) + R(X)$

$U(\beta) = R(\beta)$ $\deg R \leq 2$

$(1, \beta, \beta^2)$ libre

Soit $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{Q}^3 \setminus \{0\}$

$S(X) = \lambda_0 + \lambda_1 X + \lambda_2 X^2$

$S \wedge P = 1$ car P irréductible

Bezout : $U(X)S(X) + V(X)P(X) = 1$

$X = \beta$, $\underbrace{U(\beta)}_{\neq 0} S(\beta) = 1$.

$P = \mathcal{M}_\beta$ car si $P_0 = \mathcal{M}_\beta$, $P_0 \mid P$ et P est irréductible

8.4 $P = \mathcal{M}_\alpha = \mathcal{M}_\beta$, $P \in \mathbb{Q}[X]$, $\deg P = n$

Soit $Q \in \mathbb{Q}_{n-1}[X]$

On pose $\varphi(Q(\alpha)) = Q(\beta)$, ie $\varphi(\alpha^k) = \beta^k$ $k = 0, \dots, n-1$

clairement,

$\varphi(Q_1(\alpha) + Q_2(\alpha))$

$= (Q_1 + Q_2)(\beta) = Q_1(\beta) + Q_2(\beta)$

$\varphi(Q_1(\alpha) \times Q_2(\alpha)) = Q_1(\beta) Q_2(\beta)$

$(1, \alpha, \dots, \alpha^{n-1})$ et $(1, \dots, \beta^{n-1})$ sont des bases,

φ est bien défini et c'est un isom. linéaire

PIÈGE AC... On peut avoir $\deg Q_1 Q_2 > n-1$ ...

S/ Soit $Q_1 \in \mathbb{Q}[X]$

$Q_2 \in \mathbb{Q}[X]$

Si $Q_1(\alpha) = Q_2(\alpha)$ on a : $P \mid Q_1 - Q_2$

donc $Q_1(\beta) = Q_2(\beta)$

Donc, φ défini par $\forall Q \in \mathbb{Q}[X]$,

$\varphi(Q(\alpha)) = Q(\beta)$ est bien défini.

8.5

<u>Base télescopique</u>

$$\mathbb{K} \subset \mathbb{L} \subset \mathbb{M}$$

$(e_1, \dots, e_n)$ est une $\mathbb{K}$-base de $\mathbb{L}$

$(f_1, \dots, f_p)$ est une $\mathbb{L}$-base de $\mathbb{M}$

On va mq $(e_i f_j)$ est une $\mathbb{K}$-base de $\mathbb{M}$.

Génération :

Soit $x \in \mathbb{M}$ $\quad x = \sum_{j=1}^{p} \mu_j f_j \quad , \mu_j \in \mathbb{L}$

puis, $\mu_j = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{i,j} e_i \qquad x = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} \lambda_{i,j} e_i f_j$

Ex : $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}[\sqrt{2}] \subset \mathbb{Q}[i, \sqrt{2}]$

$(1, \sqrt{2})$

$(1, i)$

$(1, \sqrt{2}, i, i\sqrt{2})$

Liberté : Si $\sum_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}} \lambda_{i,j} e_i f_j = 0$ il vient $\sum_{j=1}^{p} \Big(\underbrace{\sum_{i=1}^{n} \lambda_{i,j} e_i}_{\mu_j \in \mathbb{L}} \Big) f_j = 0$

$(f_1, \dots, f_p)$ base de $\mathbb{M}$ sur $\mathbb{L}$: $\mu_j = 0 \quad j = 1, \dots, p$

de là : $\begin{cases} j \text{ donnée} \\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_{i,j} e_i = 0 \end{cases}$ Or $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de $\mathbb{L}$ sur $\mathbb{K}$, $\quad \lambda_{i,j} = 0$

8.6

Soit $\alpha, \beta \in A$ algébriques sur $\mathbb{K}$, non nuls.

$\mathbb{K}[\alpha]$ est un corps, α possède un inverse algébrique.

$\mathbb{L} = \mathbb{K}[\alpha]$ corps $\mathbb{K}$-ev DF

$\mathbb{M} = \mathbb{L}[\beta]$ β algébrique sur $\mathbb{K}$ donc, sur $\mathbb{L}$

$\rightarrow \mathbb{M}$ est un corps

Avec l'exo précédent, $\mathbb{M}$ est DF sur $\mathbb{K}$

Or $\alpha + \beta \in \mathbb{M}$

donc $\mathbb{K}[\alpha+\beta] \subset \mathbb{M}$, par suite $\mathbb{K}[\alpha+\beta]$ est DF sur $\mathbb{K}$, $\alpha + \beta$ est algébrique.

De même pour $\alpha\beta$.

7.0.1

$(1, i)$ est une base de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{R}$

Soit $u : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $\mathbb{R}$-ev

$u(1) = a_1 + b_1 i$

$u(i) = a_2 + b_2 i$

$$\varphi(x+iy) = x\varphi(1) + y\varphi(i)$$

$$= \frac{\varphi(1)+\varphi(i)}{2}(x+iy) + \frac{\varphi(1)-\varphi(i)}{2i}(x-iy)$$

$$= az + b\bar{z} \qquad \begin{cases} a = \frac{\varphi(1)+\varphi(i)}{2} \\ b = \frac{\varphi(1)-\varphi(i)}{2i} \end{cases}$$

7.1

E $\mathbb{C}$-ev

Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une $\mathbb{C}$-base de E.

$(e_1, \dots, e_n, ie_1, \dots, ie_n)$ est une $\mathbb{R}$-base

Réciproquement,

si $(e_1, \dots, e_n, e_{n+1}, \dots, e_{2n})$ est une $\mathbb{R}$-base de E, on pose $\begin{cases} u(e_k) = e_{n+k} & k = 1, \dots, n \\ u(e_{n+k}) = -e_k & k = 1, \dots, n \end{cases}$

$u^2 = -I$

$\lambda(\mu x)$
$= \lambda(\mu x)$
$= (\lambda\mu)x$

On pose : $(\lambda + i\mu) \cdot x = \lambda x + \mu u(x)$

$\to$ E devient un $\mathbb{C}$-ev

7.2

On pose $(\lambda + i\mu) \cdot x = \lambda x + \mu u(x)$

$\to$ E devient un $\mathbb{C}$-ev. de DF car une $\mathbb{R}$-base de E reste génératrice.

$(\lambda + i\mu)((\lambda' + i\mu')x)$

$= \lambda(\lambda' + \mu' u(x)) + \mu u(\lambda' + \mu' u(x))$

$= (\lambda\lambda' - \mu\mu')x + (\lambda\mu' + \lambda'\mu)u(x) = [(\lambda+i\mu)(\lambda'+i\mu')] \cdot x$

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une $\mathbb{C}$-base de E,

$(e_1, \underbrace{ie_1}_{u(e_1)}, \dots, e_n, ie_n)$ est alors une $\mathbb{R}$-base de $\bar{E}$

$$[u]_\beta = \begin{pmatrix} 0 & -1 & & & 0 \\ 1 & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ 0 & & & 0 & -1 \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{id avec} \quad \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$$

b) Il vient : $\left(u + \frac{a}{2} I\right)^2 + \underbrace{\frac{-a^2+4b}{4}}_{\delta^2} I = 0$ $\quad \delta > 0$

Si $v = \dfrac{u + \frac{a}{2} I}{\delta}$ il vient $v^2 = -I$

$$[v]_\beta = \begin{pmatrix} 0 & -1 & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & -1 \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix} = J_n$$

$$[u] \begin{pmatrix} -\frac{a}{2} & -\delta & & & \\ \delta & -\frac{a}{2} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & -\frac{a}{2} & -\delta \\ & & & \delta & -\frac{a}{2} \end{pmatrix}$$

7.3

$iH \neq H$ car $\dim_{\mathbb{R}} H = 2n-1$ n'est pas un $\mathbb{C}$-ev

$L = H \cap iH$ convient et si $\underset{\mathbb{C}\text{-ev}}{\underline{L'}} \subset H$ $\quad L' \subset iH$ donc $L' \subset L$

7.4

$u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ $\mathbb{C}$-linéaire $\beta = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ base canonique de $\mathbb{C}^n$

* Si u représente une transvection dans $\mathbb{C}^n$, notons $u = id_E + \lambda\, e_{ij}$ où $e_{ij}(k) = \delta_{jk} \varepsilon_i$

Alors, avec $\varepsilon_j' = i\varepsilon_j$ pour $j \in [\![1, n]\!]$

On a $B = (\varepsilon_1, \varepsilon_1', \dots, \varepsilon_n, \varepsilon_n')$ $\mathbb{R}$-base de $\mathbb{C}^n$

Soit $k \in [\![1,n]\!]$

On pose

$[u]_{\text{canonique}} = M = A + iB$ dans $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, i\varepsilon_1, \dots, i\varepsilon_n)$

$M\varepsilon_k = A\varepsilon_k + iB\varepsilon_k$ ETC . . .

$M' = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$ $\quad Tr(M') = 2\,Re(Tr(u))$

$$\det M' = \det \begin{pmatrix} A+iB & -B+iA \\ B & A \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} A+iB & 0 \\ B & A-iB \end{pmatrix}$$

$$= \det(A+iB)\det(A-iB) \quad A, B \text{ réels}$$

$$= |\det(A+iB)|^2$$