Exercices : Matrices

1.1

Mq : $Z(\mathbb{M}_n(\mathbb{K})) = \{\lambda I_n, \lambda \in \mathbb{K}\}$

($\supset$) clair.

($\subset$) Si $M = \sum \lambda_{i,j} E_{i,j} \in Z(\mathbb{M}_n(\mathbb{K}))$

$M \times E_{i_0,j_0} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{i,i_0} E_{i,j_0}$

$E_{i_0,j_0} \times M = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{j_0,j} E_{i_0,j}$ donc $i \neq j$, $\lambda_{i,j} = 0$

$\lambda_{i_0,i_0} = \lambda_{j_0,j_0}$ $\quad M = \begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}$

1.2

Soit $A \in I$, $A = [a_{ij}]$, $a_{kl} \neq 0$

$E_{k,k} A E_{l,l} = a_{k,l} E_{k,k} E_{k,l} = a_{k,l} E_{k,l}$

Si $A \neq 0_n$, $E_{k,l} \in I$, $E_{ij} = E_{i,k} E_{k,l} E_{l,j} \in I$

1.3 Ker φ est un idéal bilatère.

Ker $\varphi = 0 \Rightarrow \varphi$ injective $\Rightarrow \varphi$ automorphisme

Ker $\varphi = \mathbb{M}_n(\mathbb{K}) \Rightarrow \varphi = 0$.

1.4 <u>Injectif</u> : Ker $\phi = \{0\}$ on $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$, $\varphi(I_n) = I_n$.

<u>$\mathbb{K}=\mathbb{R}$</u> Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est un morphisme de corps, c'est Id.

$\forall r \in \mathbb{Q}$, $f(r) = r$ .....

Si f est un monomorphisme et si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, f est linéaire. f isom.

En effet, A est dans le centre de $\mathbb{M}_n(\mathbb{K}) \Longleftrightarrow$

$f(A)$ est dans le centre de $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$

$A = \lambda I \Longleftrightarrow f(A) = \tilde{f}(\lambda) I$

alors $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est un morphisme de corps. $\tilde{f} = Id$.

1.5. $A = \frac{1}{2}(A + {}^tA) + \frac{1}{2}(A - {}^tA)$ écriture unique

$\triangle$ $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ antisymétrique = symétrique.

1.6. $S_n(\mathbb{R})$ ne contient aucune matrice antisymétrique $\neq 0$.

$\rightarrow \frac{n(n+1)}{2}$

Si $\dim F > \frac{n(n+1)}{2}$, il vient $\dim F + \dim A_n(\mathbb{R}) > n^2$

donc $F \cap A_n(\mathbb{R}) \neq \{0\}$.

1.7 Soit $u = f_A$

$(e_1, \dots, e_n)$ base canonique de $\mathbb{K}^n$

$$A \text{ T.S.} \Leftrightarrow \forall i,\ u(\overbrace{\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_i)}^{F_i}) \subset F_i$$

stable par composition,

Si, de plus, A est inversible, $u(F_i) = F_i$, $i = 1, \dots, n$

$F_i = u^{-1}(F_i)$ $i = 1, \dots, n$

Or $u^{-1} = f_{A^{-1}}$, A^{-1} est TS.

Enfin, si $A = \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$ on a $u(F_i) \subset F_{i-1}$ $i = 1, \dots, n$

$u^n(F_n) \subset F_0 = \{0\}$

$u^n = 0$, $A^n = 0$

1.8 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} = I + N + \dots + N^{n-1}$ où $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$

$(I - N)(I + N + \dots + N^{n-1}) = I - N^n = I$ car $[I, N] = 0$

$A^{-1} = I - N$

$\cancel{p \geq 1}$, $A^{-p} = (I - N)^p = I - \binom{p}{1} N + \dots + (-1)^p \binom{p}{p} N^p$

$A = I + M$ $\qquad M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$

Soit $q \geq 1$ $\qquad A^q = (I - N)^{-q}$

$(1 - x)^{-q} = 1 + qx + \frac{q(q+1)}{2} x^2 + \dots$ pour $|x| < 1$

On remplace formellement

$$(I - N)^{-q} = I + qN + \frac{q(q+1)}{2} N^2 + \dots + \frac{q(q+1) \cdots (q+n-2)}{(n-1)!} N^{n-1}$$

$q \geq n$

On va mq :

$$(1-x)^q\left(1+qx+\cdots+\frac{q(q+1)\cdots(q+n-2)}{(n-1)!}x^{n-1}\right)$$
$$= 1+x^n\underbrace{Q(x)}_{\text{polynôme}}$$

En effet, $1=(1-x)^q(1-x)^{-q} = (1-x)^q((1+\cdots)+O(x^n))$

$$\underbrace{1-O(x^n)}_{\text{polynôme}} = (1-x)^q\left(1+qx+\cdots-nx^{n-1}\right)$$

On remplace x par N

$$(I-N)^q\underbrace{\left(I+qN+\cdots+\frac{q(q+1)\cdots(q+n-2)}{(n-1)!}N^{n-1}\right)}_{(I-N)^{-q}=A^q} = I+\underbrace{0\,Q(N)}_{=0}$$

2.1 $\quad X = PX' = PQX''$

3.1

3) $\Rightarrow$ 4) Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ régulière à gauche.

Soit $\varphi : \begin{cases}\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})\\ B \mapsto AB\end{cases}$

φ morphisme, $\varphi(B)=0 \Rightarrow AB=0 \Rightarrow B=0$

φ est injectif.

Par égalité des dimensions, φ est bijectif

$\Rightarrow \exists B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ I_n = AB$

$\Rightarrow A$ inversible à droite.

<u>Variante</u>

Si $u\in\mathcal{L}(E)$ n'est pas inversible, on a $\mathrm{Ker}(u)\neq\{0\}$

Soit v un projecteur d'image $\mathrm{Ker}(u)$, il vient $u\circ v=0$ et $v\neq 0$

3.1. cours :

$M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Soit $u : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ associé à M.

Soit β une base de $\mathrm{Ker}\, u$ et β' t.q. $u(\beta')$ est une base de $\mathrm{Im}\, u$ → on complète avec β''.

$$[u]_{\beta' \cup \beta}^{u(\beta') \cup \beta''} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \qquad Q^{-1}AP = \begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} 1 & \\ & 1 \end{matrix}}_{r} & \\ & 0 \end{pmatrix}$$

$$Y = AX \qquad Y' = (Q^{-1}AP)X'$$

$$QY' = APX'$$

3.2 $\quad rg\, A = rg\, {}^tA$ (?)

$$A = PJ_rQ$$

$${}^tA = {}^tQ\, {}^tJ_r\, {}^tP \qquad rg({}^tA) = rg\, {}^tJ_r = r.$$

SL

$$(S) \Leftrightarrow \underbrace{\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{s1}x_1 + \dots + a_{sn}x_n = 0 \end{cases}}_{\cap\ s \text{ hyperplans}}$$

où, quitte à permuter, s est le rang des lignes

la dimension de l'espace des solutions est $n-s$

$$n-s \leq n-r, \quad s \geq r.$$

3.3. $\quad A + B = AB$

$$(A-I)(B-I) = I \xRightarrow{DF\ (3.1)} (B-I)(A-I) = I$$

3.4 On passe sa matrice dans une base donnée.

$A = PJ_rQ$, $\quad AQ^{-1}P^{-1} = PJ_rP^{-1}$

$$PJ_rP^{-1}PJ_rP^{-1} = PJ_rP^{-1}$$

3.5 Soit $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix} \Big\} r = rg(A)$

alors, $N \sim J_r \sim A$

De là $\exists P, Q \in GL_n(\mathbb{K})$, $PAQ = N$
d'où, $A = P^{-1} N Q^{-1}$

3.6 Par récurrence sur $n \geq 1$.
$u_k = f_{N_k}$ dans $\mathbb{C}^n$.
Soit $F = \operatorname{Im} u_1$
De $[u_1, u_i] = 0$, $i = 2, \dots, n$, on déduit que
$u_2, \dots, u_n$ laissent stable F.
le $u_i' = u_i|_F^F$ sont alors nilpotents $i = 2, \dots, n$
(HR) $u_2' \circ \dots \circ u_n' = 0$
Donc, $u_2 \circ \dots \circ u_n \circ u_1 = 0$

4.1
On a $f(I^2) = f(I)^2 = f(I)$, $f(I) \in \{0, 1\}$
Si $f(I) = 0$, il vient $\forall A$, $f(A) = f(AI) = f(A)f(I) = 0$ NON!
$f(0)^2 = f(0)$, si $f(0) = 1$, $\forall A$, $1 = f(0) = f(0A) = f(0)f(A)$ NON!
$(\Rightarrow)$ Si A est inversible, $AA^{-1} = I$
$f(A)f(A^{-1}) = 1 \therefore f(A) \neq 0$.

$(\Leftarrow)$ Si A n'est pas inversible (HYP: $f(A) \neq 0$)
1) $A = N$ nilpotent
$0 = f(0) = f(N^n) = f(N)^n \therefore f(N) = 0$ ↯
2) Cas général
$rg(A) < n \Rightarrow A = PNQ$ N nilpotent
$f(A) = f(P)f(0)f(Q) = 0$ ↯
~~d'où $A = P^{-1} N Q^{-1}$~~
Donc, A est inversible.

4.2 Sans perte de généralité : a_i, b_i 2 à 2 $\neq$

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_1+b_n} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix}$$

Obs :

$$G(x) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\lambda_k}{x+b_k} + \frac{1}{x+b_n}$$

$$L_n \leftarrow L_n + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k L_k$$

$$(G(a_1), G(a_2), \dots, G(a_n))$$

Pour $i \in [\![2, n]\!]$,

$$F_i(x) = \left(\prod_{j=1}^{i-1} \frac{X-a_j}{X+b_j}\right) \times \frac{c_i}{X+b_i} = G \text{ pour } (\lambda_k) \text{ bien choisi}$$

$$c_i = \prod_{j=1}^{i-1} \frac{-b_i+b_j}{-b_i-a_j}$$

On fait pour i allant de n à 2 : $L_i \leftarrow L_i + \sum_{k=1}^{i-1} \lambda_k L_k$

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & & * \\ & \ddots & \\ & & F_{n-1}(a_{n-1}) & \\ 0 & & & F_n(a_n) \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad F_i(a_i) = \left(\prod_{j=1}^{i-1} \frac{a_i-a_j}{a_i+a_j}\right) \times \left(\prod_{j=1}^{i-1} \frac{b_j-b_i}{b_i+a_j}\right) \times \frac{1}{a_i+b_i}$$

4.3

On pose $\Delta(x) = \begin{vmatrix} x_1+x & & b+x \\ & \ddots & \\ a+x & & x_n+x \end{vmatrix}$

Avec $L_i \leftarrow L_i - L_1 \quad i = 2, \dots, n$

On obtient $\Delta(x) = \begin{vmatrix} x_1+x & & & \\ a-x_1 & x_2-b & & * \\ \vdots & & \ddots & \\ a-x_1 & & a-b & x_n-b \end{vmatrix}$

Donc Δ est affine

Si $b \neq a$

en $-a$, $\Delta(-a) = \begin{vmatrix} x_1-a & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & x_n-a \end{vmatrix}$

$-b$, $\Delta(-b) = \begin{vmatrix} x_1-b & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & x_n-b \end{vmatrix}$.

$\Delta(x) = cx+d$, $\Delta(-a) = -ac+d$. $\Delta(-b) = -bc+d$.

$b\Delta(-a) = -abc+bd$

$a\Delta(-b) = -abc+ad$.

$$\frac{b\Delta(-a) - a\Delta(-b)}{b-a} = d.$$

$$d = \frac{b\prod(x_i-a) - a\prod(x_i-b)}{b-a}$$

Si $a=b$, $\det A = \prod_{i=1}^{n}(x_i-b) + \sum_{i=1}^{n}\prod_{j\neq i}(x_j-b)$.

$$\begin{vmatrix} x_1 & & a \\ & \ddots & \\ a & & x_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1-a & \cdots & a-x_n \\ \vdots & & \\ & 0 & \\ \vdots & & \\ a & & \end{vmatrix}.$$

$$= (x_1-a)\Delta_{n-1} + aD_{n-1}$$

4.4

1) Zéros des polynômes dans $\mathbb{K}^{n^2}$ (Ici det).

2) $\det(A+\varepsilon I) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)(a_{\sigma(1)1} + \delta_{\sigma(1)1}\varepsilon)\cdots(a_{\sigma(n)n} + \delta_{\sigma(n)n}\varepsilon)$

$\sigma = Id$ donne le degré maximum et c'est la seule, donc le terme dominant de $\det(A+\varepsilon I)$ est ε^n

$\exists \varepsilon_0 > 0$ $\forall \varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$ $\det(A+\varepsilon I) \neq 0$. O.K.

3) $A = P\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & 0 \\ & & \varepsilon & \\ 0 & & & \varepsilon \end{pmatrix} Q$

4.5

premier cas : D inversible, Pivot de Gauss

$$\begin{pmatrix} I & -BD^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A-BD^{-1}C & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(A-BD^{-1}C)\det D \underset{[C,D]=0}{=} \det(AD-BC$$

deuxième cas : cas général.

On remplace D par $D+\varepsilon I$, $\varepsilon \in]0,\varepsilon_0[$

$[C, D+\varepsilon I]=0$, donc $\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D+\varepsilon I \end{pmatrix}$

$$= \det(A(D+\varepsilon I)-BC)$$

$\varepsilon \to 0^+$ + $\mathcal{C}^0$ du déterminant.

4.6

premier cas : A inversible

$$\det(A+B) = \det(A)\det(I+\underbrace{A^{-1}B}_{N})$$

$N^n=0$ car $[A,B]=0$ donc $\exists\,\beta$, $[f_N]_\beta = \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$

de là, $\det(I+N)=1$.

On remplace A par $A+\varepsilon I$ qui commute avec B.

$\mathbb{K}=\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ $[A,B]=0 \Rightarrow B$ laisse stable $\operatorname{Ker} A$

$B' = B|_{\operatorname{Ker} A}$ reste nilpotent.

$\Rightarrow \exists\, x \in \operatorname{Ker} A \setminus \{0\}$, $B'x=0$

de là : $\left.\begin{array}{l} (A+B)x = 0 \\ x \neq 0 \end{array}\right\}$ $\det(A+B)=0$

$\det A = 0$ par HYP

4.7

$$B = P\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & \ddots \\ & & & 0\end{pmatrix}Q \quad , \quad A' = P^{-1}AQ^{-1} \quad , \quad A = PA'Q$$

$$A+B = P\left(A' + \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & \ddots \\ & & & 0\end{pmatrix}\right)Q$$

$$A-B = P\left(A' - \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & \ddots \\ & & & 0\end{pmatrix}\right)Q$$

$$\det\left(A' + \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & \ddots \\ & & & 0\end{pmatrix}\right) = \begin{vmatrix} a_{11}+1 & & a_{1,n} \\ & \ddots & \\ a_{n,1} & & a_{n,n}\end{vmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n}\end{vmatrix}}_{\delta} + \det A'$$

$$\det\left(A' - \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & \ddots \\ & & & 0\end{pmatrix}\right) = \det A' - \delta$$

$$\det(A+B)\det(A-B) = (\det PQ)^2 \underbrace{\det\left(A' - \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 0\end{pmatrix}\right)\det\left(A' + \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 0\end{pmatrix}\right)}$$

$$(\det A' - \delta)(\det A' + \delta) = (\det A')^2 - \delta^2 \leq (\det A')$$

5.4

Schur $\Rightarrow \exists x \in E, \ (x, u(x))$ est libre.

$\Rightarrow \ \beta = (x, u(x), e_3, \dots, e_n)$ base de E

$$\mathrm{Mat}_\beta(u) = \begin{pmatrix} 0 & \\ 1 & \\ 0 & * \\ \vdots & \\ 0 & \end{pmatrix}$$

5.5 Récurrence sur $n \geq 1$

$n = 1, \ u = 0$

$n \to n+1$

D'après 5.4, il existe (e) base de $\mathbb{K}^{n+1}$ t.q.

$$M = \mathrm{mat}_e(u) = \begin{pmatrix} 0 & * \\ 1 & \\ 0 & A' \\ \vdots & \\ 0 & \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Tr}(M) = \mathrm{Tr}(A') = 0$$

Par (HR) il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ t.q. $A' = PBP^{-1}$ où
$B = \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ * & & 0 \end{pmatrix}$

$\tilde{P}^{-1}M = \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & BP^{-1} \end{pmatrix}$

$M = \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & \\ \vdots & PBP^{-1} \\ 0 & \end{pmatrix}$ $\tilde{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \cdots 0 \\ \vdots & P \\ 0 & \end{pmatrix}$ $\tilde{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \cdots 0 \\ \vdots & P^{-1} \\ 0 & \end{pmatrix}$

$\tilde{P}^{-1}M\tilde{P} = \begin{pmatrix} 0 & * \\ * & B \end{pmatrix}$ donc M semblable à une matrice diagonale nulle.

5.6

a) Soit $\Pi = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g$

$\begin{pmatrix} G \to G \\ g' \mapsto gg' \end{pmatrix}$ est bijective

On évalue $\Pi^2 = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\left(\frac{1}{|G|}\sum_{g'\in G} gg'\right)$

$= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\Pi = \Pi$

$Tr(\Pi) = \underbrace{rg(\Pi)}_{\in\mathbb{N}} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} Tr(g)$

b) Soit $F = \{x \in E \mid \forall g\in G,\ g(x) = x\}$

Ecrivons $x = \Pi(y)$.

Soit $g_0 \in G$,

$\begin{cases} G \to G \\ g \mapsto g_0 \circ g \end{cases}$ est bijective.

$g_0(x) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g_0 \circ g(y)$

$= \frac{1}{|G|}\sum_{h\in G} h(y) = \Pi(y) = x$

$\begin{cases} \text{Si } x \in F,\ \Pi(x) = x \\ \text{Soit } x \in \operatorname{Im}\Pi,\ \text{MQ} : x \in F\ (?) \end{cases}$

c) I Soit F un s.e.v. de $\mathbb{C}^n$ stable par G.

Soit u un projecteur de $\mathbb{C}^n$ sur F.

On pose $v = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g \circ u \circ g^{-1}$

Soit $x \in F$, $v(x) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \circ u \circ \underbrace{g^{-1}(x)}_{\in F}$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \circ g^{-1}(x) = x$$

Soit $x' \in E$ $\quad v(x) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g\left(\underbrace{u(g^{-1}(x'))}_{\text{dans } F}\right) \in F$ $\quad$ F stable par G

<u>Bilan</u> $\begin{cases} \mathrm{Im}\, v \subset F \\ \forall x \in F,\ v(x) = x \end{cases}$ v est un projecteur d'image F

<u>Conclusion</u> :

On a : $\forall h \in G \quad h \circ v \circ h^{-1} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} h \circ g \circ u \circ (g^{-1} \circ h^{-1})$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{g' \in G} g' \circ u \circ g'^{-1} = v \Big\} \ h \circ v = v \circ h$$

$g \to h \circ g$ bij

$(h \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ h^{-1}$

h laisse stable Ker v

$\mathrm{Ker}\, v \oplus F = \mathbb{C}^n$.

<u>Calcul du rang</u>

Soit $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ de rang r.

i) Soient $I \subset [\![1, m]\!]$, $J \subset [\![1, n]\!]$, $|I| = |J| = s > r$

Si $\Delta_{I,J} \neq 0$ $\quad \begin{pmatrix} C_{j_1} & \cdots & C_{j_s} \\ & & \end{pmatrix}$ $J = \{j_1, \dots, j_s\}$

$(C_{j_1}, \dots, C_{j_s})$ est libre.

(sinon, $\det(A_{I,J}) = 0$)

Or $s > r$, $\Delta_{IJ} = 0$.

ii) De même, si $\Delta_{IJ} \neq 0$ et $|I| = |J| = m$, $r \geq m$.

iii) $\exists I, J$, $|I| = |J| = r$ et $\Delta_{I,J} \neq 0$

On extrait $j_1, \dots, j_r$ colonnes libres de A.

Soit $B = [C_{j_1}, \dots, C_{j_r}]$

$rg\, B = r \Rightarrow rg\, {}^tB = r$ $\quad \begin{bmatrix} {}^tC_{j_1} \\ \vdots \\ {}^tC_{j_r} \end{bmatrix}$ On extrait r colonnes de ${}^tB$ libres.

6.2

$\operatorname{rg} A = \max \{ s \mid \exists\, |I| = |J| = s,\ \det A_{IJ} \neq 0 \}$

6.3

Soit $\begin{cases} \mu_{\mathbb{K},A} \text{ le polynôme minimal de } A \text{ sur } \mathbb{K} \\ \mu_{\mathbb{C},A} \quad \text{"} \quad \text{sur } \mathbb{C}. \end{cases}$

$\mathbb{K} \subseteq \mathbb{C} \Rightarrow \mu_{\mathbb{C},A} \mid \mu_{\mathbb{K},A}$

Lemme $\deg \mu_{\mathbb{C},A} = \operatorname{rg}(A^k)_{k=0}^{n^2-1}$ (dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$)

D/ Si $d = \deg \mu_{\mathbb{C},A}$, la famille $(I_n, A, \dots, A^{d-1})$ est une base de $\mathbb{C}[A]$

$\Rightarrow \operatorname{rg}(A^k)_{k=0}^{n^2-1} = \operatorname{rg}(I_n, A, \dots, A^{d-1}) = d$

Ainsi, d'après 6.2, $\deg \mu_{A,\mathbb{C}} = \deg \mu_{A,\mathbb{K}} = \operatorname{rg}(A^k)_{k=0}^{n^2-1}$

$\Rightarrow \mu_{\mathbb{C},A} = \mu_{\mathbb{K},A}$

7.1 $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ M^t\operatorname{Com}(M) = (\det M) I_n$

(i) si $\operatorname{rg} M = n$ Com M est inversible donc $\operatorname{rg} \operatorname{Com} M = \operatorname{rg} M$

si $\operatorname{rg} M = n-1$ $M^t\operatorname{com}(M) = 0$
donc

$\operatorname{rg} \operatorname{Com} M = 1$

si $\operatorname{rg} M \leq n-2$

$\operatorname{rg} \operatorname{Com} M = 0$

(ii) Densité A, B inversible

$\widetilde{AB} = \frac{1}{\det AB} B^{-1}A^{-1} = \tilde{B}\tilde{A}$

Si $K \subset \mathbb{C}$, les inversibles sont denses et $A \to \tilde{A}$ est $\mathcal{C}^0$

Qu Dans $M_n(\mathbb{K}(X))$, $\det(A-XI)$ est inversible

donc $\widetilde{(A-XI)(B-XI)} = (\widetilde{B-XI})\ (\widetilde{A-XI})$

$X=0$, $\widetilde{AB} = \tilde{B}\tilde{A}$

(iii) $(\widetilde{\lambda A^{-1}}) = \lambda^{n-1}\tilde{A}^{-1}$ et $\tilde{A}^{-1} = (\det A^{-1})\,A$

car $\tilde{A}^{-1}A^{-1} = \det A^{-1}\,I$

On choisit λ.

$$\lambda^{n-1}\tilde{A}^{-1} = \underbrace{\frac{\lambda^{n-1}}{\det A}}_{=1 \text{ si } \lambda^{n-1}=\det A} A = A$$

$$\{\tilde{A} \mid A\in M_n(\mathbb{C})\} = GL_n(\mathbb{C}) \cup \{B \mid rg\,B \leq 1\}$$

Soit B de rang 1, $B = PJ_1Q$ (P, Q inversibles)

Soient P_1, Q_1 dans $GL_n(\mathbb{C})$ t.q. $\tilde{P}_1 = P$, $\tilde{Q}_1 = Q$

$$B = \widetilde{Q_1 \underbrace{J_{n-1}}_{\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1\end{pmatrix}} P_1} = \tilde{P}_1\,\tilde{J}_{n-1}\,\tilde{Q}_1$$

TOPOLOGIE

8.1

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1\end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ & & & 0 \\ & 0 & & \vdots \\ & & & 0\end{pmatrix} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} n & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1\end{pmatrix}$$

$B = P^{-1}AP$, $N(B) = N(A) = nN(A) \Rightarrow N(A) = 0$ ↯

8.2

$(A^p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge $A^p \to B$, $\underbrace{A^{2p}}_{A^p \cdot A^p} \to B$

par $\mathcal{C}^0$, $B^2 = B$ projecteur.

8.3

$|\det(A_p)| \geq a$ à la limite par C^0 de det,
$|\det(A)| \geq a > 0$. Donc $\det A \neq 0$, $A \in GL_n$

8.4

i) Pour $\|.\|_\infty$

$$\|AX\|_\infty = \sup_{1\leq i\leq n} \left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right|$$

$$\leq \sup_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}||x_j|$$

$$\leq \|X\|_\infty \underbrace{\sup_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|}_{=C}$$

$C \geq |||A|||$ pour obtenir "=",

On choisit i_0 $\sum_{j=1}^{n} |a_{i_0 j}| = C$

On choisit x_j de module 1 t.q. $x_j a_{i_0 j} = |a_{i_0 j}|$

Donc, $|||A||| = \sup_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$

$$|||A||| \geq \|AX\|_\infty \geq \left|\sum_{j=1}^{m} a_{i_0 j} x_j\right| = \underbrace{\sum_{j=1}^{n} |a_{i_0 j}|}_{=C} \text{ ok!}$$

ii) $\|AX\|_1 = \|A\sum_{j=1}^{n} x_j \varepsilon_j\|_1$

$(X = \sum_{j=1}^{m} x_j \varepsilon_j \quad (\varepsilon_j) \text{ canonique})$

$$\leq \sum_{j=1}^{n} |x_j| \, \|A\varepsilon_j\|$$

$$\leq \underbrace{\max \|A\varepsilon_j\|}_{C \geq |||A|||} \overbrace{\sum_{j=1}^{m} |x_j|}^{\|X\|_1}$$

Soit j_0. $\|A\varepsilon_{j_0}\| = C$ $\quad C = \dfrac{\|A\varepsilon_{j_0}\|}{\|\varepsilon_{j_0}\|} \leq |||A|||$

Donc, $|||A||| = \max \|A\varepsilon_j\|$

8.6 $\begin{cases} \| \ \| \text{ d'algèbre} \\ \|AB\| \leq \|A\|.\|B\| \end{cases}$

$$(I-A)\underbrace{\left(\sum_{k=0}^{p} A^k\right)} = I - \underbrace{A^{p+1}}_{\to 0}$$

Série CV : $\|A^k\| \leq \|A\|^k$ car $\|A\|<1$.

Par $\mathcal{C}^0$ des opérations

$$(I-A)B = I \quad \text{avec} \quad B = \sum_{k=0}^{+\infty} A^k$$

8.7

(i) $rg A \leq r \iff \forall |I| = |J| = r+1 \quad \underbrace{\Delta_{IJ}(A) = \{0\}}_{\text{fermé}}$

intersection de fermés.

(ii) Soit B, $rg B \leq r$ $\quad B = P \begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1/n & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1/n \end{matrix}}_{r} & \\ & \begin{matrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{matrix} \end{pmatrix} Q$

$Y_r \subset X_r$, $\quad \overline{Y_r} \subset X_r$ car X_r fermé

Il faut montrer $X_r \subset \overline{Y_r}$.

Soit $A \in X_r$.

Trouvons une suite $(A_k)_{k\in\mathbb{N}^*} \in Y_r^{\mathbb{N}}$ t.q.

$A_k \to A$.

Si $rg(A) = r' \leq r$

$$A = P\begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix}}_{r'} & \\ & \begin{matrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{matrix} \end{pmatrix} Q \qquad A_k = P\begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix}}^{r'} & & \\ & \underbrace{\begin{matrix} \frac{1}{k} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{k} \end{matrix}}_{r-r'} & \\ & & \begin{matrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{matrix} \end{pmatrix} Q$$

Clairement, par $\mathcal{C}^0$, $A_k \to A$ et $A_k \in Y_r$.

Donc, $A \in \overline{Y_r}$.

Ainsi, $X_r = \overline{Y_r}$.

4.2

$$D = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \vdots & & \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{(a_n+b_1)\cdots(a_n+b_n)} \begin{vmatrix} \frac{a_n+b_1}{a_1+b_1} & \cdots & \frac{a_n+b_n}{a_1+b_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{a_n+b_1}{a_{n-1}+b_1} & \cdots & \frac{a_n+b_n}{a_{n-1}+b_n} \\ 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$\forall i \leq n-1$

$L_i \leftarrow L_i - L_n$
$$= \frac{1}{(a_n+b_1)\cdots(a_n+b_n)} \times \begin{vmatrix} \frac{a_n-a_1}{a_1+b_1} & \cdots & \frac{a_n-a_1}{a_1+b_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{a_n-a_{n-1}}{a_{n-1}+b_1} & & \frac{a_n-a_{n-1}}{a_{n-1}+b_n} \\ 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{(a_n-a_1)\cdots(a_n-a_{n-1})}{(a_n+b_1)\cdots(a_n+b_n)} \times \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}+b_n} \\ 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$\forall i \leq n-1$

$C_i \leftarrow C_i - C_n$
$$= \frac{(a_n-a_1)\cdots(a_n-a_{n-1})}{(a_n+b_1)\cdots(a_n+b_n)} \times \begin{vmatrix} \frac{b_n-b_1}{(a_1+b_1)(a_1+b_n)} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{b_n-b_1}{(a_{n-1}+b_1)(a_{n-1}+b_n)} & & \frac{1}{a_{n-1}+b_n} \\ 0 & \cdots \quad 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{(a_n-a_1)\cdots(a_n-a_{n-1})(b_n-b_1)\cdots(b_n-b_{n-1})}{(a_n+b_1)\cdots(a_n+b_n)(a_1+b_n)\cdots(a_{n-1}+b_n)} \cdot \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_{n-1}} & 1 \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-1}+b_{n-1}} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}+b_{n-1}} & 1 \\ & & & 1 \end{vmatrix}$$

(HR)
$$= \frac{(a_n-a_1)\cdots(a_n-a_{n-1})(b_n-b_1)\cdots(b_n-b_{n-1})}{(a_n+b_1)\cdots(a_n+b_n)(a_1+b_n)\cdots(a_{n-1}+b_n)} \times \frac{\prod_{1\leq i<j\leq n-1}(a_j-a_i)(b_j-b_i)}{\prod_{1\leq i,j\leq n-1}(a_i+b_j)}$$

$$= \frac{\prod_{1\leq i<j\leq n}(a_j-a_i)(b_j-b_i)}{\prod_{1\leq i,j\leq n}(a_i+b_j)}$$

43

Pour $n=2$: $\det A = x_1x_2 - ab$

$n=3$: $\begin{vmatrix} x_1 & b & b \\ a & x_2 & b \\ a & a & x_3 \end{vmatrix} = x_1x_2x_3 + a^2b + ab^2 - (x_1+x_2+x_3)ab$

Posons $\Delta(x) = \begin{pmatrix} x_1+x & b+x & \cdots & b+x \\ & x_2+x & & b+x \\ & & \ddots & \\ a+x & & & x_n+x \end{pmatrix}$

$$\Delta(-a) = \prod_{i=1}^{n} (x_i - a)$$

$$\Delta(-b) = \prod_{i=1}^{n} (x_i - b)$$

$$\Delta(x) = \begin{pmatrix} x_1+x & b-x_1 & b-x_1 & \cdots & b-x_1 \\ a+x & x_2-a & b-a & \cdots & - \\ \vdots & & x_3-a & & b-a \\ \vdots & & & \ddots & \\ a+x & & 0 & & x_n-a \end{pmatrix}$$

Par développement en première colonne, $\Delta(x)$ est linéaire

Donc, si $a \neq b$.

$\Delta(x) = cx + d$ $\qquad b\Delta(-a) - a\Delta(-b)$

$\Delta(-a) = -ac + d$ $\qquad = -abc + bd + abc - ad$

$\Delta(-b) = -bc + d$ $\qquad = (b-a)d$

$$\det A = \frac{b\prod_{i=1}^{n}(x_i - a) - a\prod_{i=1}^{n}(x_i - b)}{b-a}$$

si $a = b$

$$\begin{vmatrix} x_1 & & a \\ & \ddots & \\ a & & x_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1-a & 0 & \cdots & 0 & a-x_n \\ & x_2 & & a & \\ & & \ddots & & \\ a & & & & x_n \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x_1-a & 0 & \cdots & \cdots & 0 & a-x_n \\ 0 & x_2-a & 0 & \cdots & 0 & a-x_n \\ \vdots & 0 & x_3-a & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & & & x_{n-1}-a & a-x_n \\ a & a & \cdots & \cdots & a & x_n \end{vmatrix}$$

$$\det A = \lim_{h \to 0^+} \frac{(a+h)\prod_{i=1}^{n}(x_i-a) - a\prod_{i=1}^{n}(x_i-a-h)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{(a+h)\prod_{i=1}^{n}(x_i-a) - a\prod_{i=1}^{n}(x_i-a) + ah\sum_{i=1}^{n}\prod_{j \neq i}(x_j-a) + P(h)}{h}$$

avec $P(h) = \sim h^2 + \sim h^3 + \cdots + \sim h^n$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{h\prod_{i=1}^{n}(x_i-a) + ah\sum_{i=1}^{n}\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n}(x_j-a)}{h}$$

$$= \prod_{i=1}^{n}(x_i-a) + a\sum_{i=1}^{n}\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n}(x_j-a)$$

5.1

$\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Vect}(a)$

Soit $(e_1, \dots, e_{n-1})$ une base de $\mathrm{Ker}\, u$ et complétons-la en $(e_1, \dots, e_n) = \mathcal{B}$

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \varphi(e_n)a_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \varphi(e_n)a_n \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad a = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$$

Donc, $\mathrm{tr}(u) = \varphi(e_n)a_n = \varphi(a)$ car $\varphi(e_1) = 0 = \cdots = \varphi(e_{n-1})$

5.2 Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_r, \dots e_n)$ la base associée à $\mathrm{Im}\, p \oplus \mathrm{Ker}\, p$

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(p) = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 0 \ddots 0 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{Tr}(p) = r = \mathrm{rg}(p)$$

5.3

(i) Posons $\Phi : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^* \\ A \longmapsto (M \mapsto \mathrm{Tr}(AM)) \end{cases}$

→ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ t.q. $\Phi(A) = 0$

$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\mathrm{Tr}(AE_{ij}) = 0 \Rightarrow A_{j,i} = 0$

Donc, $A = 0$. Φ est injectif.

→ Bien sur, Φ est linéaire.

→ $\dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})) = \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})^*)$

Donc Φ est un isomorphisme.

Soit $\varphi \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^*$

$\exists !\ A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ t.q. $\Phi(A) = \varphi$

ie $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ $\varphi(M) = \mathrm{Tr}(AM)$

(ii) Pour $i \neq j$ $f(E_{ij}E_{jj}) = f(E_{jj}E_{ij}) = 0$

$f(E_{ij}) = 0$

Pour $i \neq j$ $f(E_{ii}) = f(E_{ij}E_{ji}) = f(E_{ji}E_{ij}) = f(E_{jj})$

Donc $f(M) = f(E_{11}) \sum_{i=1}^{n} m_{ii}$

(iii) Soit φ associé à H, ie $H = \mathrm{Ker}\,\varphi$.

$\exists !\ A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ t.q. $\Phi(A) = \varphi$.

Notons $A = PJ_rQ$ avec $P, Q \in GL_n(\mathbb{K})$.

$\mathrm{Tr}(AM) = \mathrm{Tr}(PJ_rQM)$

$= \mathrm{Tr}(J_rQMP)$

Choisissons $QMP \in GL_n(\mathbb{K})$ t.q. $\mathrm{Tr}(J_rQMP) = 0$

Par ex, $QMP = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$M = Q^{-1} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} \in GL_n(\mathbb{K})$

et $M \in H$. Donc $H \cap GL_n(\mathbb{K}) \neq \emptyset$

5.6

$G = \{A_1, \dots, A_p\}$ un s.g. de $(GL_n(\mathbb{C}), \times)$

a) Posons $\Pi = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} A_i$

$$\Pi \times \Pi = \frac{1}{p^2}\left(\sum_{i=1}^{p} A_i\right) \times \left(\sum_{j=1}^{p} A_j\right)$$
$$= \frac{1}{p^2}\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} A_i A_j$$
$$= \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p}\frac{1}{p}\sum_{j=1}^{p} A_i A_j$$
$$= \frac{1}{p}\sum_{j=1}^{p} \Pi = \Pi$$

Donc, Π est un projecteur.

$$\mathrm{Tr}(\Pi) = \underbrace{\mathrm{rg}(\Pi)}_{\in \mathbb{N}} = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p}\mathrm{Tr}(A_i) = \frac{1}{p}\mathrm{Tr}\left(\sum_{i=1}^{p} A_i\right)$$

Donc, $\mathrm{Tr}\left(\sum_{k=1}^{p} A_k\right)$ est divisible par p.

b) Soit $F = \{X \in M_{n,1}(\mathbb{C}),\ \forall A \in G,\ AX = X\}$.

Montrons que $F = \mathrm{Im}\,\Pi$.

Soit $X \in F$.

$\Pi X = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} A_i X = X \in \mathrm{Im}\,\Pi$. Donc, $F \subset \mathrm{Im}\,\Pi$.

Soit $X \in \mathrm{Im}\,\Pi$. Notons $X = \Pi Y$.

$\forall A \in G, \quad AX = A\Pi Y$
$$= \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} AA_i Y = \Pi Y = X$$

Donc, $X \in F$, $\mathrm{Im}\,\Pi \subset F$.

Ainsi, $F = \mathrm{Im}\,\Pi$. $\dim F = \mathrm{rg}(\Pi)$.

c) Soit F un s.e.v. de $\mathbb{C}^n$ stable par G.

ie $\forall A \in G, \quad A(F) \subset F$.

Soit P le projecteur de $\mathbb{C}^n$ sur F.

On pose $\quad V = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{p} A_i P A_i^{-1}$

Si $X \in F$, $\quad VX = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{p} A_i P(A_i^{-1} X)$

$$= \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{p} A_i (A_i^{-1} X) \quad \text{car } A_i^{-1} \in G, \ A_i^{-1} X \in F$$

$$= \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{p} X = X$$

Si $X \in \mathbb{C}^n$. $\quad VX = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{p} A_i \underbrace{P(A_i^{-1} X)}_{\in F} \in F$

Donc, $\begin{cases} \operatorname{Im} V \subset F \\ \forall X \in F, \ VX = X \end{cases}$ $\quad$ V est un projecteur d'image F.

$\mathbb{C}^n = F \oplus \operatorname{Ker} V$

On veut montrer que $\operatorname{Ker} V$ est stable par G.

~~Soit $X \in \operatorname{Ker} V$. $VX = 0_n$~~

~~Soit $A \in G$. $AX \in \operatorname{Ker} V$ (?)~~

~~$V(AX) = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{p} A_i P A_i^{-1} A X$~~

Soit $A \in G$. Il suffit de montrer que $AV = VA$.

$$AVA^{-1} = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{p} A A_i P A_i^{-1} A^{-1}$$

$$= \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{p} (AA_i) P (AA_i)^{-1} = V$$

D'où, $[A, V] = 0$.

A laisse stable $\operatorname{Ker} V$.

Ainsi, $\operatorname{Ker} V$ est stable par G.

5.7

$$E = \mathrm{Im}(p_1 + \dots + p_n) \subset \mathrm{Im}\, p_1 + \mathrm{Im}\, p_2 + \dots + \mathrm{Im}\, p_n \subset E$$

Donc, $\mathrm{Im}\, p_1 + \dots + \mathrm{Im}\, p_n = E$.

$$\mathrm{Tr}(p_1 + \dots + p_n) = \dim E$$

$$\mathrm{Tr}(p_1) + \dots + \mathrm{Tr}(p_n) = \dim E$$

$$\mathrm{rg}(p_1) + \dots + \mathrm{rg}(p_n) = \dim E$$

Donc, $E = \bigoplus_{1 \leq i \leq n} \mathrm{Im}(p_i)$

Soit $k \in [\![1, n]\!]$.

$$E = \mathrm{Im}\, p_k \oplus \underbrace{\left(\bigoplus_{i \neq k} \mathrm{Im}(p_i) \right)}_{F_k}$$

Il suffit de montrer que $F_k = \mathrm{Ker}\, p_k$.

$$x = p_1(x) + \dots + p_n(x)$$

Si $x \in \mathrm{Ker}\, p_k$, $p_k(x) = 0$

$$x = \sum_{i \neq k} p_i(x) \in F_k \qquad \mathrm{Ker}\, p_k \subset F_k.$$

Si $x \in F_k$. $x = \sum_{i \neq k} p_i(x_i)$

$$p_k(x) = \sum_{i \neq k} p_k \circ p_i(x_i)$$

$$p_i(x_i) = \sum_{j=1}^{n} p_j \circ p_i(x_i). \quad \text{par unicité et } p_i(x_i) = p_i^2(x_i)$$

$$0 = \sum_{j \neq i} p_j \circ p_i(x_i) \implies p_k \circ p_i(x_i) = 0$$

Donc, $p_k(x) = 0$ $\qquad F_k \subset \mathrm{Ker}\, p_k$.

Donc, p_k est le projecteur sur $\mathrm{Im}\, p_k \,//\, F_k$.

$7.1 \quad \forall M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K}), \quad M\,{}^t\mathrm{Com}(M) = {}^t\mathrm{Com}(M).M = (\det M) I_n$

(i) Si $rg\, M = n$, $\det M \neq 0$.

${}^t\mathrm{Com}(M)$ est inversible, donc $rg({}^t\mathrm{Com}(M)) = n$.

$rg(\mathrm{com}(M)) = n$.

Si $rg\, M \leq n-2$. $\mathrm{com}(M) = 0$ par définition.

Donc, $rg(\mathrm{com}(M)) = 0$.

Si $rg\, M = n-1$.

$$M\,{}^t\mathrm{Com}(M) = 0$$

$$\forall i, \quad M\, C_i({}^t\mathrm{Com}(M)) = 0$$

$$C_i({}^t\mathrm{Com}(M)) \in \mathrm{Ker}\, M$$

$\dim(\mathrm{Ker}\, M) = n-(n-1) = 1$.

donc $rg({}^t\mathrm{Com}(M)) \leq 1$.

De plus, ${}^t\mathrm{Com}(M)$ est non nulle.

Donc, $rg({}^t\mathrm{Com}(M)) = 1$, $rg(\mathrm{Com}(M)) = 1$.

(ii)

Si $A, B \in GL_n(\mathbb{K})$

$$\begin{aligned}\widetilde{AB} &= \det(AB)\,{}^t(AB)^{-1}\\ &= \det(AB)({}^tB\,{}^tA)^{-1}\\ &= \det A \det B\ {}^tA^{-1}\,{}^tB^{-1}\\ &= \widetilde{A}\,\widetilde{B}\end{aligned}$$

Par la densité de $GL_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ et la continuité de $\mathrm{com}(.)$, $\widetilde{AB} = \widetilde{A}\widetilde{B}$ dans $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$.

$${}^t(A^{-1})\mathrm{Com}(A^{-1}) = (\det A^{-1}) I_n$$
$$(\det A^{-1})({}^tA) = \widetilde{A^{-1}}$$

(iii)

a) Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$.

$$\widetilde{\lambda A^{-1}} = \lambda^{n-1}\widetilde{A^{-1}} = \lambda^{n-1}(\det A^{-1})({}^tA)$$

Prenons λ t.q. $\lambda^{n-1}\det A^{-1} = 1$

Alors, $\widetilde{\lambda A^{-1}} = {}^tA$

Donc, $GL_n(\mathbb{C}) = \{\widetilde{A} \mid A \in GL_n(\mathbb{C})\}$

b) $\{\tilde{A} \mid A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})\} = GL_n(\mathbb{C}) \sqcup \{B \mid \text{rg}\, B \leq 1\}$.

Si $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$: $\text{rg}\, B = 0$.

$B = 0$, $\tilde{0} = 0$ évident.

Si $\text{rg}\, B = 1$.

$B = PJ_1Q$ avec $P, Q \in GL_n(\mathbb{C})$

Soit $P_1, Q_1 \in GL_n(\mathbb{C})$ t.q. $\tilde{P_1} = P$ et $\tilde{Q_1} = Q$

$$\widetilde{P_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} Q_1}$$

$$= P \underbrace{\widetilde{\begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}}}_{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 \end{pmatrix}} Q = B$$

Donc, $B \in \{\tilde{A} \mid A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})\}$.