TD: Méthodes de la réduction

1.1.2

Soit $k \in [\![2, n]\!]$, $P = X^k$

$$(X^2-1)\,k(k-1)X^{k-2} + (2X+1)\,k\,X^{k-1}$$
$$= k(k-1)\left(X^k - X^{k-2}\right) + k\left(2X^k + X^{k-1}\right)$$
$$= \left(k^2 - k + 2k\right)X^k + k\,X^{k-1} + k(k-1) - X^{k-2}$$

$k(k+1)$

$P = X$

$$(X^2-1)\times 0 + (2X+1)\times 1 = 2X+1$$

$P = 1$

$$\Rightarrow 0$$

Donc, dans la base canonique $\mathcal{B}$,

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(\phi) = \begin{pmatrix} 0 & * & & & \\ 0 & 2 & & * & \\ \vdots & & 6 & & \\ \vdots & 0 & & \ddots & \\ \vdots & & & & n(n+1) \end{pmatrix}$$ de taille $n+1$

$$\chi(\phi) = \prod_{k=0}^{n} \left(X - k(k+1)\right)$$

Donc, possède $k(k+1)$ pour $k \in [\![0, n]\!]$ comme v.p

1.1

$$\mathrm{rg}(A - \lambda I_n) = n - 1$$

$$(A-\lambda I)\underbrace{(\widetilde{A-\lambda I})}_{\text{rang } 1} = 0$$

Soit C une colonne $\neq 0$ de $\widetilde{A-\lambda I}$

Alors, $AC = \lambda C$

1.1.1.

a) $[u]_{\underbrace{(e_1, \dots, e_{n-1}}_{\text{noyaux}}, e_n)} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}$

Image $\to X$

L'image est stable $u(X) = \mu X$.

$\mu \neq 0$, Alors, $\operatorname{Ker} u \oplus \mathbb{K}X = E$: DZ

$\mu = 0$, 0 est vp.

Precisément, $u(X) = a_n X = \operatorname{Tr}(u) X$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Bilan} & \\ \operatorname{Tr}(u) \neq 0, & u \text{ DZ} \\ \operatorname{Tr}(u) = 0, & u^2 = 0 \quad \text{non DZ} \end{array} \right.$$

b) Ecriture matricielle

Soit X une base de l'image :

$$A = [y_1 X, \dots, y_n X] = X {}^tY \quad \text{où} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$AZ = (X {}^tY) Z = X \underbrace{({}^tYZ)}_{\text{de taille } 1,1} = {}^tYZ \underbrace{X}_{\text{engendre } \operatorname{Im} f_A}$$

$$\operatorname{Ker} f_A = \{ Z \mid {}^tYZ = 0 \}$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i z_i = 0$$

Seul vecteur propre possible : (X) :

$$AX = ({}^tYX) X = \operatorname{Tr}(A) X$$

1.2

$$\Phi(f)(x) = x \int_0^x f(t)\, dt + \int_x^1 t f(t)\, dt$$

$$\exists\ \Phi(f)'(x) = \int_0^x f(t)\, dt + x f(x) - x f(x) = \int_0^x f$$

$$\phi(f)'' = f$$

$$K(x,t) = \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{(x-t)^n}{n!} & x \geq t \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right.$$

$$\phi(f)(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f(t)\, dt$$

Soit F t.q. $F^{(n+1)} = f$, $F(0) = \dots = F^{(n)}(0) = 0$

Taylor reste intégrale : $F = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f(t)\, dt$

V.p. $\phi(f) = \lambda f$ $\quad \lambda = 0$ $\quad \phi(f)'' = 0 \Rightarrow f = 0.$

$\lambda \neq 0$ $\quad f \; \mathcal{C}^2$ $\quad f'' - \frac{1}{\lambda} f = 0$

$$r^2 - \frac{1}{\lambda} = 0 \Rightarrow r^2 = \frac{1}{\lambda}$$

<u>2 cas:</u> * $\lambda > 0$, $\quad r = \pm\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ $\quad$ d'où, $f(x) = Ae^{\sqrt{\frac{1}{\lambda}}x} + Be^{-\frac{x}{\sqrt{\lambda}}}$

* $\lambda < 0$ $\quad r = \pm i\sqrt{\frac{1}{|\lambda|}}$ $\quad f(x) = A\cos\left(\frac{x}{\sqrt{|\lambda|}}\right) + B\sin\left(\frac{x}{\sqrt{|\lambda|}}\right)$

* $\lambda > 0$, $\quad \phi(f)(x) = x\int_0^x e^{\frac{t}{\sqrt{\lambda}}}dt + \int_x^1 t e^{\frac{t}{\sqrt{\lambda}}}dt$

<u>C.S.</u> $\quad \phi(f)(0) = \lambda f(0) = 2A$

$\phi(f')(0) = 0 = \underset{\neq 0}{\lambda} f'(0) \Rightarrow A = B$

On prend $A = B = 1$, $\quad \phi(f)(0) = 2\lambda A = 2\lambda$

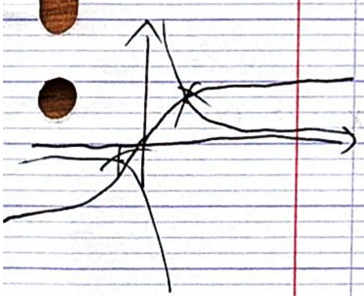
$\mu = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$

$$\int_0^1 t(e^{\mu t} + e^{-\mu t})dt = \left[t\left(\frac{e^{\mu t}}{\mu} - \frac{e^{-\mu t}}{\mu}\right)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{e^{\mu t} - e^{-\mu t}}{\mu}dt$$

$$= \frac{e^{\mu} - e^{-\mu}}{\mu} - \frac{1}{\mu^2}\left[e^{\mu t} + e^{-\mu t}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{\mu}(e^{\mu} - e^{-\mu}) - \frac{1}{\mu^2}(e^{\mu} + e^{-\mu} - 2)$$

$$= \frac{\mu e^{\mu} - \mu e^{-\mu} - e^{\mu} - e^{-\mu} + 2}{\mu^2} = \frac{2}{\mu^2}$$



$$\mu e^{\mu} - \mu e^{-\mu} = e^{\mu} + e^{-\mu} \Rightarrow \operatorname{th} \mu = \frac{1}{\mu}$$

* $\lambda < 0$, $\quad \omega = \frac{1}{\sqrt{-\lambda}}$ $\quad f'(0) = 0$ donc $B = 0$

$\lambda = -\frac{1}{\omega^2}$ $\quad A\left(\int_0^1 t\cos\omega t\,dt + \frac{1}{\omega^2}\right) = 0$

~~$\lambda < 0$.~~

$\cancel{\begin{cases} \operatorname{cotg} \omega = -\omega \\ \omega_n = -n\pi + o(1) \end{cases}}$

$$\phi(f)(0) = \int_0^1 t(A\cos\omega t)\,dt = \lambda f(0) = -\frac{A}{\omega^2}$$

$$\int_0^1 t\cos\omega t\, dt + \frac{1}{\omega^2} = 0 \quad (?)$$

IPP $$\left[t\frac{\sin\omega t}{\omega}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{\sin\omega t}{\omega}dt + \frac{1}{\omega^2}$$

$$= \frac{\sin\omega}{\omega} + \frac{1}{\omega^2}(\cos\omega - 1) + \frac{1}{\omega^2}$$

$$= \frac{\omega\sin\omega + \cos\omega}{\omega^2} = 0.$$

Il faut $\omega\sin\omega + \cos\omega = 0 \Rightarrow \boxed{-\omega = \cotg\,\omega}$

$$\omega_n = n\pi + O(1)$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\omega_n^2} + \frac{1}{4^2} = \int_0^1\int_0^1 \max(x,t)^2\,dt\,dx$$

1.3

Si $|\lambda|>2$, $A-\lambda I$ est inversible par Hadamard

On pose $\lambda = 2\cos\theta$ $\quad 0<\theta\ \pi$

Soit $\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix} \neq (0)$ un $\vec{v}p$ pour λ

On pose : $x_0 = 0 = x_{n+1}$ conditions aux limites

alors $\forall k\in[\![1,n]\!]$, $\quad x_{k+1} - 2\cos\theta\, x_k + x_{k-1} = 0$

E.C. : $X^2 - 2\cos\theta X + 1 = 0$

racines : $e^{i\theta}, e^{-i\theta}$ distincts car $\theta\in]0,\pi[$

$x_k = \alpha e^{ik\theta} + \beta e^{-ik\theta}$ $\quad \begin{cases} x_0 = 0 & \beta = -\alpha \neq 0 \\ x_{n+1} = 0 & 2i\alpha\sin(n+1)\theta = 0\end{cases}$

$(\alpha,\beta)\neq 0$

$e^{ik\theta} - e^{-ik\theta}$
$= 2i\sin k\theta$

$\theta = \frac{l\pi}{n+1}$ $\quad l\in[\![1,n]\!]$ $\quad \alpha = \frac{1}{2i}$

On remonte les calculs OK.

$$\lambda_\ell = 2\cos\frac{\ell\pi}{n+1} \qquad \ell \in [\![1,n]\!]$$

$$\vec{v}_p \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\frac{\ell\pi}{n+1} \\ \sin\frac{2\ell\pi}{n+1} \\ \vdots \\ \sin\frac{n\ell\pi}{n+1} \end{pmatrix}$$

1.4

I On décompose w / rang. $w = PJ_rQ$, $P,Q \in GL_n(\mathbb{C})$, $r \geq 1$

$$u PJ_rQ = PJ_rQ v$$

$$\underbrace{(P^{-1}uP)}_{u'}J_r = J_r\underbrace{QvQ^{-1}}_{v'} \qquad u' = \left(\begin{array}{c|c} U_1 & U_2 \\ \hline U_3 & U_4 \end{array}\right)\}r$$

$$v' = \left(\begin{array}{c|c} V_1 & V_2 \\ \hline V_3 & V_4 \end{array}\right)\}r$$

$$u'J_r = \left(\begin{array}{c|c} U_1 & 0 \\ \hline U_3 & 0 \end{array}\right) \qquad J_rv' = \left(\begin{array}{c|c} V_1 & V_2 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$u' = \left(\begin{array}{c|c} M & * \\ \hline 0 & * \end{array}\right) \qquad v' = \left(\begin{array}{c|c} M & 0 \\ \hline * & * \end{array}\right)$$

Il suffit de prendre λ racine de χ_M.

II $u \circ w = w \circ v$

$u^2 \circ w = u \circ u \circ w = u \circ w \circ v = w \circ v^2$

$u^k \circ w = w \circ v^k$

Par CL, $\forall P \in \mathbb{K}[X]$, $P(u) \circ w = w \circ P(v)$

$P = \chi_u$ $\qquad 0 \circ w = w \circ \chi_u(v) \qquad \operatorname{Im} \chi_u(v) \subsetneq E$

$$\det\left(\prod_{i=1}^{n}(v - \lambda_i I)\right) = 0$$

$\exists \lambda \in \operatorname{Spec}(u)$, $\det(V - \lambda I) = 0$.

2.0 $\boxed{\Rightarrow}$

$v = u|_F^F \qquad \mu_u = \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i) \quad \lambda_i$ 2 à 2 $\neq$

$\mu_u(v) = 0 \underset{D.N.}{\Rightarrow} \bigoplus_{i=1}^{n} \underbrace{Ker(v - \lambda_i I_F)}_{F \cap E_{\lambda_i, u}} = F$

Soit G_i sev, $(F \cap E_{\lambda_i,u}) \oplus G_i = E_{\lambda_i,u}$ $\quad i = 1, \dots, n$

$G = \bigoplus_{i=1}^{n} G_i$ convient.

$\boxed{\Leftarrow}$

Soit $F = \underbrace{\bigoplus_{\lambda \in Spec(u)} E_{\lambda,u}}$ stable

HYP: $\exists G$ stable par u, $F \oplus G = E$.

Si $G \neq \{0\}$, comme $K = \mathbb{C}$, $u|_G$ possède un $\vec{vp}\ X \neq 0$ qui devrait déjà être dans F.

2.1

(a, b, c) 2 à 2 $\neq$ O.K.

M DZ $\Leftrightarrow \exists P$ scindé à racines simples t.q. $P(M) = 0$

$\chi_M = (X-a)(X-b)(X-c) \qquad \mu_M \mid \chi_M$

premier cas $a = b = c \Rightarrow \mu_M$ divise $(X-a)^2$

Or $M - aI \neq 0$.

2ème cas: $|\{a, b, c\}| = 2$

$M^2 = \begin{pmatrix} a^2 & a+b & 1 \\ 0 & b^2 & b+c \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix}$ Il n'y a pas de polynôme de degré 2 annulant M $\quad (M^2 + \alpha M + I \neq 0)$

$\Rightarrow \deg \mu_M = 3$

$\Rightarrow \mu_M$ dont les racines sont a, b, c ne peut être scindé à racine simples.

Donc, C.N.S. : (a, b, c) 2 à 2 $\neq$.

$M_{u|\mathrm{Vect}(\varepsilon_1,\varepsilon_2)}$

$a = b$ $\quad \left(\begin{array}{cc|c} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ \hline 0 & 0 & c \end{array}\right)$ non DZ

$a \neq c$ $\quad$ VP double $\quad$ EP de dim 1

$b = c$, $a \neq c$ $\quad \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ $\quad M - bI_3 \quad \begin{pmatrix} a-b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad rg = 2$

$\dim E_{M,b} = 1$

non DZ

$a = b = c$ $\quad \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = aI + \underbrace{N}_{\text{nilpotent} \neq 0}$ $\quad$ non DZ

2.2

$$\begin{cases} P(1) = 1 \\ P(4) = 2 \\ P(9) = 3 \end{cases}$$

On applique à A, $P(A) = M$ t.q. $M^2 = A$

Si $A = Q \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} Q^{-1}$

$P(A) = Q \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} Q^{-1}$

$P(A)^2 = Q \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} Q^{-1} = A$

2.3 $\quad \underbrace{X^m - 1}$ annule A

Scindé à racines complexes simples.

$\Rightarrow A$ DZ $\qquad A = P \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \bar\lambda \end{pmatrix} P^{-1}$ si $\lambda \notin \mathbb{R}$

$= P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}$ si $\lambda \in \mathbb{R}$

i) $\lambda \notin \mathbb{R}$

$\mathrm{Tr}(A) \in \mathbb{Z} \Rightarrow \lambda + \bar\lambda = 2\cos\theta \in \mathbb{Z}$ $\quad \cos\theta \in \{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\}$

$\theta \in]0, \pi[$, $\quad \theta = \{\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\}$ $\quad$ Ordre 6, 4, 3.

$A^3 = P \begin{pmatrix} \lambda^3 & 0 \\ 0 & \bar\lambda^3 \end{pmatrix} P^{-1} = I$

ii) $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda, \mu \in \{-1, 1\}$

$A = I, -I$ ou $A = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}P^{-1}$

1 2 $A^2 = I$ $\omega(A) = 2$

<u>Existence</u>

i) $\chi_A = X^2 - Tr(A)X + 1$

$\begin{cases} X^2 - X + 1 & \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ X^2 + 1 & \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ X^2 + X + 1 & \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \end{cases}$

ii) Trivial

2.4

$M - \lambda I = \begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & (\mu - \lambda)I_n \end{pmatrix}$ $M - \mu I = \begin{pmatrix} (\lambda - \mu)I & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$(M - \lambda I)(M - \mu I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

premier cas : $\lambda \neq \mu$ trivial

$2^{ème}$ cas $\lambda = \mu$, $M = \lambda I + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{nilpot}}$ CNS : $B = 0$

2.5

Récurrence : $\forall k \in \mathbb{N}$, $M^k = \begin{pmatrix} A^k & kA^k \\ 0 & A^k \end{pmatrix}$

$P \in \mathbb{C}[X]$ $P(M) = \begin{pmatrix} P(A) & AP'(A) \\ 0 & P(A) \end{pmatrix}$

<u>Analyse S</u> :

M est diagonalisable, μ_M est scindé à racines simples

$\mu_M(M) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_M(A) & A\mu_M'(A) \\ 0 & \mu_M(A) \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \mu_M(A) = 0$ et $(X\mu_M')(A) = 0$.

D'où $\mu_A \mid \mu_M$, et $\mu_A \mid X\mu_M'$

$\mu_M \wedge \mu_M' = 1 \Rightarrow$

i) $\mu_M \wedge X = 1 \quad \mu_A \mid 1$ Abs.

ii) $\mu_M \wedge X = X \Rightarrow \mu_A \mid X \quad \mu_A = X \quad A = 0$

<u>Synthèse</u> $A = 0$ convient.

Si M est DZ

Par restriction à $Vect(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$

A est DZ

$D = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$ est DZ $\qquad \underbrace{M}_{DZ} = \underbrace{D}_{DZ} + \underbrace{N}_{nilp} \quad [D, N] = 0$

$N = \begin{pmatrix} 0 & A \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est nilp. $\quad M - D$ est DZ car $[M, D] = 0$

$\Rightarrow N$ DZ $\Rightarrow N = 0$

2.6

Soit $B \in GL_2(\mathbb{K})$ t.q. $B \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} B^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a'I_n & b'I_n \\ c'I_n & d'I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} aA & cA \\ bA & dA \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a''I_n & b''I_n \\ c''I_n & d''I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha A & 0 \\ 0 & \beta A \end{pmatrix}$$

Soit P t.q. $PAP^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha A & 0 \\ 0 & \beta A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & \beta A \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \ddots \; \lambda_n \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & \beta \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

2.7. $\chi_A = X^n - 1$ scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$

$$= \prod_{k=1}^{n} (X - \zeta_k)$$

$$A = P \underbrace{\begin{pmatrix} \zeta_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \zeta_n \end{pmatrix}}_{\Delta} P^{-1}$$

$$M = \sum_{k=0}^{n} a_k A^k = P \sum_{k=0}^{n-1} a_k \Delta^k P^{-1}$$

$$\det M = \prod_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k \zeta_i^k \right)$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ \zeta \\ \vdots \\ \zeta^{n-1} \end{pmatrix} \qquad AX = \begin{pmatrix} \zeta^{n-1} \\ 1 \\ \vdots \\ \zeta^{n-2} \end{pmatrix} = \zeta^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ \zeta \\ \vdots \\ \zeta^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\zeta = \exp\left(\frac{2i\pi k}{n}\right)$$

$$U = [\underbrace{e^{\frac{2ik l\pi}{n}}}_{\zeta^l}]_{0 \leq k, l \leq n-1} \qquad U^* = {}^t\overline{U} = [e^{-\frac{2ikl\pi}{n}}]_{0 \leq l, k \leq n-1}$$

$$UU^* = nI_n \quad \text{car si } \zeta \neq 1 \quad \sum_{k=0}^{n-1} \zeta^k = 0$$

$$(1 \ \zeta \ \dots \ \zeta^{n-1}) \begin{pmatrix} 1 \\ \overline{\eta} \\ \vdots \\ \overline{\eta}^{n-1} \end{pmatrix} = \sum_{k=0}^{n-1} (\zeta \overline{\eta})^k$$

$$\underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{n}} U\right)}_{P} \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{n}} U^*\right)}_{P^{-1}} = I_n \qquad P^{-1} M P = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & e^{2i\frac{\pi}{n}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{2i\frac{\pi(n-1)}{n}} \end{pmatrix}$$

2.8

<u>Rappel</u> Réstriction d'un endomorphisme à $\begin{cases} \text{un noyau} \\ \text{une image} \end{cases}$

<u>Ex:</u> $rg(g \circ f)$?

C'est $rg(g_{|Im f}) = rg(f) - \dim(\mathrm{Ker}\, g \cap \mathrm{Im} f)$

$u = f_A$ on suppose que $(a_1, \dots, a_{n-1}) \neq (0)$.

Alors $rg(u) = 2$.

$$\mathrm{Im}\, u = \mathrm{Vect}\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{e_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}}_{e_2} \right)$$

$$u_{|Im f} \xrightarrow[(e_1, e_2)]{} \begin{pmatrix} 0 & \sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 \\ 1 & a_n \end{pmatrix} = M$$

$$\chi_M = X^2 - a_n X - \sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 \quad \text{compagnon.}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & & & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \quad rg \geq n-1 \quad \dim E_\lambda \leq 1$$

$$\Delta = a_n^2 + 4 \sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 \ (> 0 \text{ si } A \text{ réelle})$$

<u>premier cas</u> $\Delta = 0$ 1 vp double

M non DZ $\Rightarrow$ u non DZ

<u>deuxième cas</u>

$\Delta \neq 0$ Alors M est DZ

$\mathrm{Ker}\, u \neq \mathrm{Ker}\, u^2$

i) $\det M = 0 = \sum_{i=1}^{n-1} a_i^2$ il y a une VP nulle dans $\mathrm{Im}\, u$, $\mathrm{Im}\, u \cap \mathrm{Ker}\, u \neq \{0\}$,

u non DZ.

ii) $\sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 \neq 0$ Alors, $\mathrm{Im}\, u \cap \mathrm{Ker}\, u = \{0\}$

u est DZ par recollement.

2.9

a) $P(X) = X^3 + X = X(X-i)(X+i)$ scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$, annule A.

Donc A est DZ dans $M_n(\mathbb{C})$.

b) $\chi_A = X^\alpha (X-i)^\beta (X+i)^\gamma \in \mathbb{R}[X]$

$\beta = \gamma$

à cause de rang, $\alpha = 3n - 2n = n$.

Donc, $\beta = \gamma = n$.

c) Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de $\operatorname{Ker}(A - iI_n)$

Si $e_k = x + iy$, $u(e_k) = ix - y$

$\Rightarrow u(x) = -y$, $u(y) = x$.

Mq: $(y_1, \dots, y_n, x_1, \dots, x_n)$ est libre avec

$x_i = \operatorname{Re}(e_i)$, $y_i = \operatorname{Im}(e_i)$

Soit $(\lambda_k), (\mu_k)$ t.q. $\sum_{k=1}^{n} (\lambda_k x_k + \mu_k y_k) = 0$

$u \Big\downarrow \sum_{k=1}^{n} (-\lambda_k y_k + \mu_k x_k) = 0$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k - \mu_k) \underbrace{(x_k + iy_k)}_{e_k} = 0$

$\Rightarrow \lambda_k = \mu_k = 0$

Soit $(z_1, \dots, z_n)$ une base de $\operatorname{Ker} u$

Dans la base, $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_n)$

$$[u]_\beta = \begin{pmatrix} 0 & I_n & 0 \\ -I_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$x_k = \dfrac{e_k + \overline{e_k}}{2}$

$y_k = \dfrac{e_k - \overline{e_k}}{2}$

(Refait)

2.2

$\chi_A = (X-1)(X-4)(X-9)$

Par C-H, $\chi_A(A)=0$, et χ_A est SARS, donc A est diagonalisable.

Soit $Q \in GL_3(\mathbb{R})$ t.q. $QAQ^{-1} = \begin{pmatrix} 1&0&0\\0&4&0\\0&0&9\end{pmatrix}$

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ t.q. $P(1)=1$, $P(4)=2$, $P(9)=3$.

$$P(A) = P\left(Q^{-1}\begin{pmatrix} 1&0&0\\0&4&0\\0&0&9\end{pmatrix}Q\right)$$

$$= Q^{-1}\begin{pmatrix} P(1)&0&0\\0&P(4)&0\\0&0&P(9)\end{pmatrix}Q = Q^{-1}\begin{pmatrix} 1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}Q = M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

$M^2 = Q^{-1}\begin{pmatrix} 1&0&0\\0&4&0\\0&0&9\end{pmatrix}Q = A$. D'où, M convient.

2.3

X^m-1 annule A, et X^m-1 est scindé à racines complexes simples. $\Rightarrow$ A DZ dans $\mathbb{C}$.

$$\chi_A = X^2 - \mathrm{Tr}(A)X + \underbrace{\det A}_{=1} = X^2 - \mathrm{Tr}(A)X + 1$$

* Si une v.p. λ de A est non réel, $\bar{\lambda}$ est aussi une autre v.p. de A, il existe $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ t.q.

$$A = P\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \bar{\lambda}\end{pmatrix}P^{-1}$$

$\lambda + \bar{\lambda} = \mathrm{Tr}(A) \in \mathbb{Z}$, $\lambda\bar{\lambda} = 1$, $\lambda = e^{i\theta}$ $\bar{\lambda} = e^{-i\theta}$

$\lambda + \bar{\lambda} = 2\cos\theta \in \mathbb{Z}$, $\cos\theta \in \{-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\}$

$\cos\theta = -1$ ou 1, $\lambda \in \mathbb{R}$ ↯

Donc, $\theta \in \{\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\}$, ordre 6, 4, 3.

** Si une v.p. λ de A est réel.

→ Si λ est la v.p. double, $\lambda^2 = 1$, $\lambda = 1$ ou -1

$A = I$ $\omega(A) = 1$, $A = -I$ $\omega(A) = 2$.

→ Sinon, $\lambda\mu = 1$, $\lambda + \mu \in \mathbb{Z}$

$$\lambda + \frac{1}{\lambda} = k \in \mathbb{Z}, \quad \lambda^2 - k\lambda + 1 = 0, \quad \lambda = \frac{k \pm \sqrt{k^2-4}}{2}$$

mais, $A = P\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} P^{-1}$

$$A^m = P^m \begin{pmatrix} \lambda^m & 0 \\ 0 & \mu^m \end{pmatrix} P^{-1}$$

$|\lambda| = |\mu| = 1$, donc $\lambda, \mu \in \{-1, 1\}$

Finalement, $m = 1, 2, 3, 4, 6$.

<u>Existence</u>

$m = 1 : I_2$ $\quad m = 3, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad m = 6, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$m = 2 : -I_2$ $\quad m = 4, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

2.4

premier cas : $\lambda = \mu$.

Si M est DZ, il existe un $P \in \mathbb{C}[X]$ SARS t.q. $P(M) = 0$.

Le seul candidat : $X - \lambda$.

$$M - \lambda I = \begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow B = 0$$

C.N.S. : $B = 0$.

deuxième cas : $\lambda \neq \mu$

$P(X) = (X - \lambda)(X - \mu)$

$$P(M) = \begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & (\mu - \lambda) I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\lambda - \mu) I_n & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

M est DZ.

2.5

$$M^2 = \begin{pmatrix} A^2 & 2A^2 \\ 0 & A^2 \end{pmatrix} \qquad M^3 = \begin{pmatrix} A^3 & 3A^3 \\ 0 & A^3 \end{pmatrix}$$

Par récurrence, pour $k \in \mathbb{N}$, $M^k = \begin{pmatrix} A^k & kA^k \\ 0 & A^k \end{pmatrix}$

$$P(M) = \begin{pmatrix} P(A) & AP'(A) \\ 0 & P(A) \end{pmatrix}$$

On suppose que M est DZ, il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ S.A.R.S. t.q. $P(M)=0$.

$P(A)=0$, $AP'(A)=0$.

$P(X)$, $XP'(X)$ annulent A, mais $P(X) \wedge P'(X)=1$

$\mu_A \mid P(X) \wedge X$.

Si $P(X) \wedge X = 1$, alors $\mu_A = 1$, ABS.

Donc, $\mu_A = X$, alors $A=0$.

Si $A=0$, évidemment $M=0$, qui est DZ.

C.N.S. : $A=0$.

2.6

Soit $B \in GL_2(\mathbb{K})$ t.q. $B\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}B^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$

Notons $B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ $B^{-1} = \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a'I & b'I \\ c'I & d'I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a''I & b''I \\ c''I & d''I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

Donc $B \otimes I_n \in GL_{2n}(\mathbb{K})$ d'inverse $B^{-1} \otimes I_n$.

$$\begin{pmatrix} a'I & b'I \\ c'I & d'I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} aA & bA \\ cA & dA \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a''I & b''I \\ c''I & d''I \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha A & 0 \\ 0 & \beta A \end{pmatrix}$$

Soit $C \in GL_n(\mathbb{K})$ t.q. CAC^{-1} soit diagonale

$$\begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C^{-1} & 0 \\ 0 & C^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha A & 0 \\ 0 & \beta A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C^{-1} & 0 \\ 0 & C^{-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha CA & 0 \\ 0 & \beta CA \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C^{-1} & 0 \\ 0 & C^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha CAC^{-1} & 0 \\ 0 & \beta CAC^{-1} \end{pmatrix}$$

Donc, $\begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}(B \otimes I_n)\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \otimes A\right)(B^{-1} \otimes I_n)\begin{pmatrix} C^{-1} & 0 \\ 0 & C^{-1} \end{pmatrix}$ diagonale diagonale

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \otimes A$ est DZ.

2.8

$*$ Si $(a_1, \dots, a_{n-1}) = (0)$, $rg(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } a_n = 0 \\ 1 & \text{si } a_n \neq 0 \end{cases}$

Si $a_n \neq 0$, alors $\text{Im} A = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique.

$e_1, \dots, e_{n-1}$ des $\vec{vp}$ de vp 0.

e_n la $\vec{vp}$ de vp a_n. A est DZ.

$**$ Si $(a_1, \dots, a_{n-1}) \neq (0)$, alors $rg\, A = 2$.

$\text{Im}(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}\right)$

Soit $u = f_A$ canoniquement associé à A.

Notons $e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$.

$$[u_{|\text{Im}\, u}]_{(e_1, e_2)} = \begin{pmatrix} 0 & \sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 \\ 1 & a_n \end{pmatrix} = M \qquad \Delta = a_n^2 + 4\sum_{i=1}^{n-1} a_i^2$$

$\rightarrow$ Si $\sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 \neq 0$, $\chi_M = X^2 - a_n X - \sum_{i=1}^{n-1} a_i^2$

Alors $\text{Im}\, u \cap \text{Ker}\, u = \{0\}$.

de plus, si $\Delta \neq 0$, M admet 2 vp distincts,

u est DZ.

$\rightarrow$ Si $\sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 = 0$, il y a une vp nulle dans $\text{Im}\, u$,

$\text{Im}\, u \cap \text{Ker}\, u \neq \{0\}$, $\text{Ker}\, u \neq \text{Ker}\, u^2$

Donc, u non DZ.

$\rightarrow$ Si $\Delta = 0$, 1 vp double pour M, λ.

Mais $M - \lambda I \neq 0$, donc M n'est pas DZ,

u non DZ.

2.9

a) X^3+X annule A. dans $\mathbb{C}[X]$, $X^3+X = X(X+i)(X-i)$

X^3+X est SARS dans $\mathbb{C}[X]$, donc A est DZ dans $\mathcal{M}_{3n}(\mathbb{C})$

b) vp : 0, i, $-i$.

pour 0, $\dim \operatorname{Ker} A = 3n - 2n = n$

$$\chi_A = X^n (X-i)^\beta (X+i)^\gamma \in \mathbb{R}[X] \Rightarrow \beta = \gamma$$

pour i, n ; pour $-i$, n.

c) Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de $\operatorname{Ker}(A - iI_n)$.

Notons $x_i = \operatorname{Re}(e_i)$, $y_i = \operatorname{Im}(e_i)$, ie $e_i = x + iy_i$

$u(e_i) = ie_i = ix - y \Rightarrow u(x_i) = -y_i$, $u(y_i) = x_i$

On veut mq $(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ est libre

Soit $\underbrace{(\lambda_k), (\mu_k)}_{\in \mathbb{R}}$ t.q. $\sum_{k=1}^n (\lambda_k x_k + \mu_k y_k) = 0$

$u \downarrow \sum_{k=1}^n (\mu_k x_k - \lambda_k y_k) = 0$

$$\sum_{k=1}^n (i\mu_k x_k - i\lambda_k y_k) = 0$$

$$\sum_{k=1}^n (\lambda_k - i\mu_k) x_k + (\mu_k + i\lambda_k) y_k = 0$$

$$\sum_{k=1}^n (\lambda_k - i\mu_k)\underbrace{(x_k + iy_k)}_{e_k} = 0 \Rightarrow \lambda_k - i\mu_k = 0$$

$\Rightarrow \lambda_k = \mu_k = 0$. Soit $(z_1, \dots, z_n)$ une base de $\operatorname{Ker}(A)$

Dans $(y_1, y_2, \dots, y_n, x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_n)$

$$[u] = \begin{pmatrix} 0 & -I_n & 0 \\ I_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1.4 Soit $\mathcal{B}$ la base canonique.

$$[w]_{\mathcal{B}} = P J_r Q \quad , \quad r \geq 1, \quad P, Q \in GL_n(\mathbb{C})$$

$$U = [u]_{\mathcal{B}}, \quad V = [v]_{\mathcal{B}}$$

$$U P J_r Q = P J_r Q V$$

$$\underbrace{P^{-1} U P}_{U'} J_r = J_r \underbrace{Q V Q^{-1}}_{V'}$$

$$U' = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} U_1 & U_2 \\ U_3 & U_4 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \}r \\ \}n-r \end{array} \\ \begin{array}{cc} \underbrace{\quad}_{r} & \underbrace{\quad}_{n-r} \end{array} & \end{array} \qquad V' = \begin{pmatrix} V_1 & V_2 \\ V_3 & V_4 \end{pmatrix}$$

$$U' J_r = \begin{pmatrix} U_1 & 0 \\ U_3 & 0 \end{pmatrix} \qquad J_r V' = \begin{pmatrix} V_1 & V_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow U_3 = 0, \quad V_2 = 0, \quad U_1 = V_1$$

$$U' = \begin{pmatrix} U_1 & U_2 \\ 0 & U_4 \end{pmatrix} \qquad V' = \begin{pmatrix} U_1 & 0 \\ V_3 & V_4 \end{pmatrix}$$

$$\chi_u = \chi_{U'} = \chi_{U_1} \chi_{U_4} = \chi_{U_1} \chi_{V_4} = \chi_{V'} = \chi_v$$

Donc, $\chi_{U_1} \mid \chi_u \wedge \chi_v$. avec $\deg \chi_{U_1} \geq 1$

Donc, χ_u et χ_v possède une racine commune, d'où une v.p. commune.

2.0

($\Rightarrow$) Soit F un sev de $\mathbb{C}^n$ stable par u.

Soit $v = u_{|F}^{|F}$, $\mu_u = \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)$

$$\mu_u(v) = 0 \Rightarrow F = \bigoplus_{i=1}^{r} \underbrace{\mathrm{Ker}(v - \lambda_i Id_F)}_{E_{\lambda_i, u} \cap F}$$

Soit G_i t.q. $(E_{\lambda_i,u} \cap F) \oplus G_i = E_{\lambda_i, u}$

$$G = \bigoplus_{i=1}^{r} G_i \text{ qui est stable par } u, \quad G \oplus F = \mathbb{C}^n$$

($\Leftarrow$) Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres de u.
Soit $F = \bigoplus_{i=1}^{r} E_{\lambda_i, u}$ qui est stable par u.

Par hypothèse, il existe G un s.e.v. de $\mathbb{C}^n$ t.q.
G est stable par u, et $F \oplus G = \mathbb{C}^n$.
Si $G \neq \{0\}$, soit $v = u_{|G}^{|G}$
v possède au moins une v.p. λ, soit $x \in G \setminus \{0\}$
associé, mais $u(x) = \lambda x$, $x \in F$. $\lightning$
Donc, $G = \{0\}$. $F = E$. Ainsi, u est DZ.

2.7

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{taille } n+1) \qquad \det \begin{pmatrix} X & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ -1 & X & & & 0 \\ & -1 & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & -1 & X \end{pmatrix} = X^{n+1} + (-1)^{n+3}(-1)^n$$
$$= X^{n+1} - 1$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & & & 1 & 0 \\ 0 & & & & 1 \\ 1 & \ddots & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{Donc, } M = \sum_{k=0}^{n} a_k A^k$$

$$A = P \underbrace{\begin{pmatrix} \zeta_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \zeta_{n+1} \end{pmatrix}}_{\Delta} P^{-1}, \quad P \in GL_{n+1}(\mathbb{C})$$

$$A^k = P \begin{pmatrix} \zeta_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \zeta_{n+1}^k \end{pmatrix} P^{-1}$$

Soit $Q(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, $\quad M = P \begin{pmatrix} Q(\zeta_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & Q(\zeta_{n+1}) \end{pmatrix} P^{-1}$

$$\det M = \prod_{i=1}^{n+1} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \zeta_i^k \right)$$