TD : Réduction II

1.1

$\phi(f) = p \circ f \quad \phi \circ \phi = \phi \Rightarrow DZ$

$\psi(f) = f \circ p \quad \psi \circ \psi = \psi \Rightarrow DZ$

et $\phi \circ \psi = \psi \circ \phi$

Soit (e) $\quad [p] = \left(\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \quad [f]_{(e)} = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right)$

$\frac{1}{2}[p \circ f + f \circ p]_{(e)} = \begin{pmatrix} A & B/2 \\ C/2 & 0 \end{pmatrix} \quad (E_{ij})$ base de $\vec{vp}$

1.2

$B(X) = \prod_{i=1}^{n+1} (X - \lambda_i) \quad \lambda_i$ 2 à 2 $\neq$

$P_k = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \frac{X - \lambda_i}{\lambda_k - \lambda_i} \qquad AP_k = BQ_k + \underbrace{R_k}_{\text{image}}$

Si B possède une racine double ⇒ non DZ (?)

$A(\lambda_i)\underbrace{P_k(\lambda_i)}_{\delta_{ki}} = R_k(\lambda_i)$

$R_k(\lambda_i) = 0$ si $i \neq k$ $\qquad R_k = A(\lambda_k) P_k$

$= A(\lambda_i)$ si $i = k$

1.3 Soit $u \in A$

$\mu_u(X) = \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ (2 à 2 $\neq$)

$P(X) = \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i)$

$P(u)^{\max(\alpha_i)} = 0$ car $\mu_u \mid P^{\max(\alpha_i)}$

$\Rightarrow P(u)$ est nilpotent

$\Rightarrow P(u) = 0$ Or P est dissocié ⇒ u est DZ

$e^k = e$

$e^2 = e$

$(ea - eae)^2 = eaea - eaeae - eae^2a + eae^2ae = 0$

$\underset{\text{hyp}}{\Rightarrow}$ $ea - eae = 0 \Rightarrow ea = eae$

$(ae - eae)^2 = 0 \Rightarrow ae = eae = ea$

Ainsi, $e \in Z(A)$

Rappel $\quad \mu_u = (X-\lambda_1)\cdots(X-\lambda_r) \quad \lambda_i$ 2 à 2 $\neq$

$$P_k = \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{r} \frac{(X-\lambda_i)}{\lambda_k - \lambda_i}$$

Si $k \neq l$, $\quad \mu_u \mid P_k P_l \Rightarrow P_k(u) \circ P_l(u) = 0$

$$\sum_{k=1}^{r} P_k = 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{r} P_k(u) = Id$$

$(X-\lambda_k) P_k = \alpha\, \mu_u \qquad (u - \lambda_k I) \circ P_k(u) = 0$

$\operatorname{Im} P_k \subset E_{\lambda_k, u}$

$$\boxed{u = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \underbrace{P_k(u)}_{\text{idempotent}}} \qquad u \in Z(A)$$

1.4

$\underbrace{A}_{DZ} \approx B$ alors $\chi_B = \chi_A$.

Si, de plus, B est DZ, $\chi_B = \chi_A \Rightarrow A \approx B$

Si $A \approx B$ avec $B \in M_n(\mathbb{Q})$, il vient $\chi_A \in \mathbb{Q}[X]$

Réciproque ?

premier cas $\quad A$ est à spectre simple

$$\chi_A = X^n - a_{n-1}X^{n-1} - \cdots - a_1 X - a_0 \qquad a_i \in \mathbb{Q}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & & & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & 0 & \\ & & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix} \qquad \chi_B = \chi_A \text{ dissocié}$$

Dans $M_n(\mathbb{C})$, $\quad A \approx B$.

deuxième cas

On écrit $\chi_A = P_1 \dots P_s$ (P_i irréductibles)

$P_i \wedge P_i' = 1 \Rightarrow$ Bezout $UP_i + VP_i' = 1$

$\Rightarrow P_i$ dissocié dans $\mathbb{C}$

$\Rightarrow C_{P_i}$ DZ

$$B = \begin{pmatrix} C_{P_1} & & \\ & \ddots & \\ & & C_{P_s} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Q})$$ est DZ et $\chi_A = \chi_B$.

2.1 Puissances bornées

$A \in SL_2(\mathbb{R})$.

Idée = $\overline{vp}$ dans $\mathbb{C}$.

$$\chi_A = X^2 - Tr(A)X + 1$$

$\underbrace{AX}_{\text{dans } \mathbb{C}^2,\ X \neq 0} = \lambda X \Rightarrow A^k X = \lambda^k X$ Or A^k bornée, $|\lambda| \leq 1$.

premier cas

$\lambda \notin \mathbb{R}$, l'autre vp est $\bar{\lambda}$ et $\lambda\bar{\lambda} = 1$

$|\lambda| = 1$

$$A \approx \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$$

deuxième cas

$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ alors $\lambda\mu = 1$ $\lambda = \mu = 1$ ou $\lambda = \mu = -1$

Si $A \neq -I_2$ ou I_2, $A \approx \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$A^{2k} \approx \begin{pmatrix} 1 & -2k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$ non borné

Conclusion : celles qui sont semblables à $\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$ dans $\mathbb{M}_2(\mathbb{C})$.

2.2

Soit $A \in G$, A^k bornée $|vp| \leq 1$
A^{-k} bornée $|vp|^{-1} \leq 1$

$$\forall \lambda \in Spec(A) \quad |\lambda| = 1.$$

Montrons que $\lambda \in Spec(A) \Rightarrow \lambda = 1$

Soit X, $\|X\| = 1$ t.q. $AX = \lambda X$

$$|||A^k - I||| \overset{hyp}{<} \sqrt{2}$$

$$\sqrt{2} > |||A^k - I||| \geq \|(\lambda^k - 1)X\| = |\lambda^k - 1| = 2\left|\sin\frac{k\theta}{2}\right|$$

$\lambda = e^{i\theta}$ par ex $0 < \theta \leq \pi$

$\theta/_2 \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $\forall k$, $\left|\sin\frac{k\theta}{2}\right| < \frac{\sqrt{2}}{2}$ NON !

$\theta = 0$. $\lambda = 1$

$A = I + N$, N nilpotent

Si $N \neq 0$, $Ker\, N \subsetneq Ker\, N^2$

on choisit X : $NX \neq 0$

$N^2 X = 0$

$$\underbrace{A^k X}_{\text{bornée}} \overset{\text{binôme}}{=} \underbrace{X}_{\text{bornée}} + \underbrace{kNX}_{\text{non bornée !}}$$

↯

$G = \{I\}$

2.3

(Refaits)

1.2
$$B(X) = \prod_{i=1}^{n+1} (X-\lambda_i) \quad , \quad \lambda_i \text{ 2 à 2 } \neq$$

Pour $i \in [\![1, n+1]\!]$,

soit $L_i(X) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} \frac{(X-\lambda_j)}{(\lambda_i - \lambda_j)} \in \mathbb{C}_n[X]$

$$AL_i = BQ_i + R_i \quad , \quad R_i \in \mathbb{C}_n[X]$$

$\forall j \in [\![1, n+1]\!] \setminus \{i\}$,

$$A(\lambda_j) L_i(\lambda_j) = 0 \quad , \quad B(\lambda_j) = 0$$

$$\Rightarrow R_i(\lambda_j) = 0$$

$$\Rightarrow R_i(X) = \eta_i L_i = A(\lambda_i) L_i$$

$$u(L_i) = \eta_i L_i$$

On a trouvé $(n+1)$ $\vec{v}_p$ de u, $\dim \mathbb{C}_n[X] = n+1$, donc u est diagonalisable.

1.3

Soit $M \in A$.

Par C-H, $\chi_M(M) = 0$.

On écrit $\chi_M(X) = \prod_{i=1}^{r} (X-\lambda_i)^{\alpha_i}$, $\alpha_i \geq 1$, λ_i 2 à 2 $\neq$

Soit $P(X) = \prod_{i=1}^{r} (X-\lambda_i)$, $\alpha = \max(\alpha_i)$

$$P(M)^\alpha = 0 \quad \text{car} \quad P(X)^\alpha \mid \chi_M$$

$P(M)$ est nilpotent, donc $P(M) = 0$, P étant S.A.R.S., M est DZ.

Soit e un idempotent de $M_n(\mathbb{C})$, $a \in A$,

$$(ea - eae)^2 = eaea - eaeae - eaeea + eaeae = 0$$

$ea - eae$ est donc nilpotent, $ea = eae$

De même, $(ae - eae)^2 = aeae - aeae - eaeae + eaeae$

Donc, $ea = eae = ae$, e commute avec tout élément de A, $e \in Z(A)$.

Soit $a \in A$, il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ S.A.R.S. t.q. $P(a) = 0$.

On écrit: $P(X) = \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)$

Pour $i \in [\![1, r]\!]$, soit $L_i(X) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{r} \frac{(X - \lambda_j)}{(\lambda_i - \lambda_j)}$

si $k \neq l$, $P \mid L_k L_l \Rightarrow L_k(a) \circ L_l(a) = 0$

$\sum_{i=1}^{r} L_i(X) = 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^{r} L_i(a) = Id$

$(L_1(a), \dots, L_r(a))$ est une famille de projecteurs

$(X - \lambda_i) L_i(X) = \alpha_i P(X)$, $(a - \lambda_i Id) \circ L_i(a) = 0$

Donc $Im\, L_i(a) \subset E_{\lambda_i, u}$.

Par dimension, $Im\, L_i(a) = E_{\lambda_i, u}$,

$$a = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \underbrace{L_i(a)}_{\text{idempotent}}$$

Par CL, $a \in Z(A)$, $A \subset Z(A)$.

A est donc commutatif.

1.4

Soit A une matrice diagonale de $M_n(\mathbb{C})$.

Si $A \approx B$, $B \in M_n(\mathbb{Q})$, $\chi_A = \chi_B \in \mathbb{Q}[X]$.

Réciproque?

Si $\chi_A \in \mathbb{Q}[X]$

$\chi_A(X) = X^n - a_{n-1} X^{n-1} - \dots - a_1 X - a_0$, $a_i \in \mathbb{Q}$

premier cas : A est à spectre simple.

Soit $B = \begin{pmatrix} 0 & & & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ & & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$ $\quad \chi_B = \chi_A$

De plus, χ_B dissocié, donc B DZ.

$B \approx \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \approx A$ dans $M_n(\mathbb{C})$.

deuxième cas :

On écrit $\chi_A = P_1 \dots P_s$ (P_i irréductibles)

$P_i \wedge P_i' = 1$ dans $\mathbb{Q}[X]$

$\Rightarrow$ Bézout : $UP_i + VP_i' = 1 \quad U, V \in \mathbb{Q}[X]$

$\Rightarrow P_i \wedge P_i' = 1$ dans $\mathbb{C}[X]$.

$\Rightarrow P_i$ dissocié dans $\mathbb{C}[X]$.

$\Rightarrow C_{P_i}$ DZ

Soit $B = \begin{pmatrix} C_{P_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & C_{P_s} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{Q})$

$\chi_B = P_1 \dots P_s = \chi_A$, et B est DZ dans $\mathbb{C}[X]$

$B \approx A$

Donc, CNS : $\chi_A \in \mathbb{Q}[X]$.