TD : Familles sommables

1.2 $c = a * b$, ie $\forall n,\ c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$

$$C_n = c_0 + \dots + c_n = \sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{k=0}^{i} a_k b_{i-k}\right) = \sum_{i+j\leq n} a_i b_j$$

$$\| \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{k} a_i\right)\left(\sum_{j=0}^{n-k} b_j\right) = C_0 + C_1 + \dots + C_n$$

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} X^k\right) = \sum_{p=0}^{+\infty} A_p X^p$$

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n X^n\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} X^k\right) = \sum_{q=0}^{+\infty} B_q X^q$$

$$\left(\sum_{p=0}^{+\infty} A_p X^p\right)\left(\sum_{q=0}^{+\infty} B_q X^q\right) = \sum\left(\sum_{p+q=n} A_p B_q\right) X^n$$

et $\underbrace{\left(\sum a_n X^n\right)\left(\sum b_m X^m\right)}_{\sum c_n X^n}\left(\sum X^k\right)^2 = \left(\sum C_n X^n\right)\left(\sum X^k\right)$

$$= \sum (C_0 + \dots + C_n) X^n$$

$$A * B = (a) * (1) * (b) * (1)$$
$$= (a * b) * (1) * (1)$$
$$= c * (1) * (1) = C * (1) = (C_0 + \dots + C_n)$$

Si $\sum a_k$ et $\sum b_k$ et $\sum c_k$ CV,

$$\frac{1}{n+1}(C_0 + \dots + C_n) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} A_k B_{n-k}$$

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} A_k B_{n-k} = \underbrace{\sum_{k=0}^{n}\frac{A_k}{n+1}(B_{n-k} - B)} + B\underbrace{\sum_{k=0}^{n}\frac{A_k}{n+1}}_{\to A}$$

$$|\,''\,| \leq \max_{0\leq k\leq n} |A_k| \sum_{k=0}^{n}\frac{|B_{n-k} - B|}{n+1} \to 0$$

Donc, $C = AB$.

1.1 $a_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ $\quad a * a \not\to 0$ car $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} \geq \frac{n-1}{\frac{n}{2}} \not\to 0$

$\sqrt{k(n-k)} \leq \dfrac{k+n-k}{2} = \dfrac{n}{2}$

convolution : commutative, associative

1.3

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k , \quad B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$$

$$(c_0 + \dots + c_n) = (c_n) * (1)$$
$$= (a_n) * (b_n) * (1)$$
$$= (a_n) * (B_n)$$

On écrit $B_k = B + \varepsilon(k)$, $\varepsilon(k) \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$

$$\sum_{k=0}^{n} a_{n-k} B_k = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} a_{n-k} B}_{\to BA} + \sum_{k=0}^{n} \varepsilon(k) a_{n-k}$$

Soit $\varepsilon > 0$, $M \in \mathbb{N}^*$, $\forall k \geq M$, $|\varepsilon(k)| \leq \varepsilon$

$$\left| \sum_{k=0}^{N} \varepsilon(k) a_{n-k} \right| \leq \left| \sum_{k=0}^{M} \varepsilon(k) a_{N-k} \right| + \left| \sum_{k=M+1}^{N} \varepsilon(k) a_{N-k} \right|$$
$$\leq \max |\varepsilon(k)| \underbrace{\sum_{k=N-M}^{N} |a_k|}_{\xrightarrow[N \to +\infty]{} 0} + \varepsilon \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k|$$

1.4

$$\sum (-1)^n u_n \quad \sum (-1)^n v_n$$

$$2U = u_0 + (u_0 - u_1) - (u_1 - u_2) + (u_2 - u_3) - (u_3 - u_4) + \dots$$

série ACV car $u_n \searrow 0$

Le produit de cette série et de $\sum (-1)^n v_n$ CV avec 1.3. ,

TG : $a_n = (-1)^n u_0 v_n + (-1)^{n-1} v_{n-1} (u_0 - u_1) + (-1)^{n-1} v_{n-2} ((u_1 - u_2))$
$+ \dots + v_0 (-1)^{n-1} (u_{n-1} - u_n)$

$$a_n = (-1)^n (\underbrace{u_0 v_n + \dots + u_n v_0}_{w_n}) + (-1)^{n-1} w_{n-1}$$

$$a_n = (-1)^n w_n + (-1)^{n-1} w_{n-1}$$

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{n} a_k}_{CV} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k w_k + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} w_{k-1}$$

$$= 2\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k w_k + (-1)^n w_n$$

Si $(w_n) \to 0$, $\sum (-1)^{n-1} w_n$ CV.

Si $\sum (-1)^{n-1} w_n$ CV, $(-1)^n w_n \to l$ qui doit être 0.

2.1

Idée = regroupement

$\underline{p \geq 2}$ $\quad \underbrace{\sum_{m+n=p}}_{\text{partition}} \frac{1}{(m+n)^\alpha} = \frac{p-1}{p^\alpha}$ il y a CV ssi $\alpha > 2$

$\frac{1}{(m^2-mn+n^2)^\alpha}$ encadrement $\quad |mn| \leq \frac{1}{2}(m^2+n^2)$

$$\frac{1}{4}\underbrace{(m+n)^2}_{} \leq m^2+n^2-mn \leq (m+n)^2$$

De là : $\frac{1}{(m^2+n^2-mn)^\alpha} \in \left[\frac{1}{(m+n)^{2\alpha}}, \frac{4^\alpha}{(m+n)^{2\alpha}}\right]$

CV ssi $\alpha > 1$.

2.2 $\quad D(z_m, \frac{1}{2}) \cap D(z_n, \frac{1}{2}) = \emptyset$ dès que $m \neq n$

On compte le nombre de n t.q. $p \leq |z_n| \leq p+1$

$D(z_n, \frac{1}{2})$ extérieur à $\overline{D}(0, p-\frac{1}{2})$

intérieur à $\overline{D}(0, p+\frac{3}{2})$

Aire $(D(z_n, \frac{1}{2})) = \frac{\pi}{4}$

$(2p+1)2$ $\quad$ Aire $(\overline{D}(0, p+\frac{3}{2}) \setminus \overline{D}(0, p-\frac{1}{2})) = \pi\left((p+\frac{3}{2})^2 - (p-\frac{1}{2})^2\right)$

$$= \pi(4p+2)$$

$$\underbrace{|\{n \mid p < |z_n| \leq p+1\}|}_{A_p} \leq \frac{\pi(4p+2)}{\frac{\pi}{4}} = O(p)$$

$$\sum_{n\in A_p} \frac{1}{|z_n|^\alpha} \leq \frac{O(p)}{p^\alpha} \quad \text{CV si } \alpha > 2$$

(C.C.) $\frac{1}{|z_n|^\alpha}$ sommable $\Leftarrow \sum_{p\geq 1} \frac{|A_n|}{p^\alpha}$ sommable

vrai dès que $\alpha > 2$

2.3

1) Equivalence des normes

$$\lambda \| \ \|_\infty \leq \| \ \| \leq \mu \| . \|_\infty , \quad \lambda, \mu > 0$$

2) On envisage $A_N : \{ a \in \mathbb{Z}^n \mid \max_{1\leq k\leq n} |a_k| = N \}$

Par ex, $\underbrace{|a_1| = N}$, $|a_2|, \dots, |a_n| \leq N$

cardinal $\leq 2 \times (2N+1)^{n-1}$

$$N^{n-1} \leq |A_N| \leq \underbrace{(2n)}_{\text{fixe}} \times (2N+1)^{n-1}$$

$$|A_N| \approx N^{n-1}$$

$$\sum_{a\in A_N} \frac{1}{\|a\|_\infty^\alpha} = \frac{|A_N|}{N^\alpha} \approx \frac{N^{n-1}}{N^\alpha}$$

CV ssi $\alpha - n + 1 > 1$, ou bien $\alpha > n$

3.1

$$\sum_{n\geq 2} \zeta(n) - 1$$

$$= \sum_{n\geq 2} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^n} - 1 \right) = \sum_{n\geq 2}^{+\infty} \left(\sum_{k\geq 2}^{+\infty} \frac{1}{k^n} \right)$$

$$= \sum_{k=2}^{+\infty} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{k^n} = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \times \frac{1}{1-\frac{1}{k}}$$

$$= \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = 1$$

La famille est positive, les sommes sont positives dans $[0, +\infty]$.

$\Rightarrow$ Interversion valable dans $\bar{R} = [0, +\infty]$

Comme la somme est finie, la famille est sommable.

3.2.

Dans $[0, +\infty[$, on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varphi(n)}{2^n - 1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varphi(n)}{2^n} \frac{1}{1 - \frac{1}{2^n}}$$

$$= \sum_{\substack{n \geqslant 1 \\ m \geqslant 0}} \frac{\varphi(n)}{2^{n(m+1)}} = \sum_{n, m \geqslant 1} \frac{\varphi(n)}{2^{mn}}$$

$$= \sum_{k \geqslant 1} \frac{1}{2^k} \underbrace{\underbrace{\sum_{\substack{n, m \geqslant 1 \\ nm = k}} \varphi(n)}_{\sum_{d|k} \varphi(d)}}_{k}$$

$$= \sum_{k \geqslant 1} \frac{k}{2^k} = \frac{1}{2} \underbrace{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{2^{k-1}}}_{\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} = 4} = 2$$

3.3

a) $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} = \log N + \gamma + o(1)$ $\quad \sum_{n=1}^{N} \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \log(N+1)$

$$\sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) = \gamma + o(1) + \log\left(\frac{N}{N+1}\right)$$

$$= \gamma - \underbrace{\log\left(1 + \frac{1}{N}\right)}_{o(1)} + o(1)$$

Donc, $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) = \gamma$.

b) pour $n = 1$, $\left(\frac{1}{k}\right)$ série harmonique $\Rightarrow$ non sommable

$$\frac{1}{1-x}\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)x^n$$

$n \geq 2$, n fixé

$$\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{kn^k} = \sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^k = \underbrace{-\log\left(1-\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n}}_{O\left(\frac{1}{n^2}\right)}$$

$\to$ sommable

La famille est sommable.

1)
$$\sum_{\substack{k\geq 2\\ n\geq 2}}\frac{(-1)^k}{kn^k} = \sum_{k\geq 2}\frac{(-1)^k}{k}\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n^k} = \sum_{k\geq 2}\frac{(-1)^k}{k}(\zeta(k)-1)$$

$$= \sum_{k\geq 2}\left(\frac{(-1)^k}{k}\zeta(k) + \underbrace{\frac{(-1)^{k+1}}{k}}_{\ln 2 - 1}\right)$$

$$\sum_{\substack{k\geq 2\\ n\geq 2}}\frac{(-1)^k}{kn^k} = \sum_{n\geq 2}\sum_{k\geq 2}\frac{(-1)^k}{kn^k}$$

$$= \sum_{n\geq 2}\left(\frac{1}{n} - \log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$= \gamma - (1-\log 2) = \gamma + \log 2 - 1$$

Donc, $\gamma = \sum_{k\geq 2}\frac{(-1)^k}{k}\zeta(k)$

4. a) $\mathbb{Q} = \{a_n, n\in\mathbb{N}\}$

Soit $\varepsilon > 0$.

Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $I_n = \left]a_n - \frac{\varepsilon}{2^n}, a_n + \frac{\varepsilon}{2^n}\right[$

$$\mathbb{Q} \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n, \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} l(I_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{2\varepsilon}{2^n} = 4\varepsilon$$

b) $\forall p$, $A_p \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n^p$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} l(I_n^p) \leq \frac{\varepsilon}{2^p}$

$$\bigcup_{p\in\mathbb{N}} A_p \subset \bigcup_{p\in\mathbb{N}}\bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_n^p$$

$$\sum_{n,p\in\mathbb{N}} l(I_n^p) = \sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{p\in\mathbb{N}} l(I_n^p) = \sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{\varepsilon}{2^n} = 2\varepsilon$$

c) Si $[a,b] \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \underbrace{I_\lambda}_{\text{intervalle ouvert}}$

Par compacité, on extrait un sous-recouvrement fini, $[a,b] \subset I_1 \cup \dots \cup I_N = I$

$$[a,b] \subset \underbrace{]a_1, b_1[}_{a\in} \cup \dots \cup \underbrace{]a_N, b_N[}_{b\in}$$

MQ : $\sum_{i=1}^{N} (b_i - a_i) \geq b-a > 0$

Récurrence sur N

$N=1$ O.K.

$N \geq 2$ On suppose $a_N > a$ (sinon $]a,b] \subset]a_N, b_N[$ fini !)

$$[a, a_N] \subset \bigcup_{i=1}^{N-1}]a_i, b_i[$$

$$a_N - a \leq \sum_{i=1}^{N-1} (b_i - a_i)$$

$$b - a_N + a_N - a \leq \sum_{i=1}^{N-1} (b_i - a_i) + b - a_N \leq \sum_{1}^{N} (b_i - a_i)$$

Donc, $[a,b]$ n'est pas de mesure nulle.

d) A_3 : Nombres 3-approchables, $x \in [0,1]$

x : 3-approchable

$$\exists (p_n, q_n) \begin{cases} q_n \nearrow +\infty \\ \frac{p_n}{q_n} \text{ irréd.} \end{cases} \quad \exists C \quad \left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| \leq \frac{C}{q_n^3}$$

$C \in \mathbb{N}^*$ fixé

$$A_{3,C} \subset \bigcup_{n=N}^{+\infty} B_n \ ; \ B_n = \bigcup_{k=0}^{n} \left[\frac{k}{n} - \frac{C}{n^3}, \frac{k}{n} + \frac{C}{n^3} \right]$$

$$l(B_n) \leq \frac{2C}{n^3}(n+1)$$

De là $A_{3,C} \subset \bigcup_{n=N}^{+\infty} \left(\bigcup_{k=0}^{n} I_{k,n} \right)$

$$\sum_{n=N}^{+\infty} \frac{2C}{n^3}(n+1) = 2C\, O\left(\frac{1}{N}\right) \to 0$$

$\bigcup_{C \in \mathbb{N}^*} A_{3,C}$ est aussi de mesure nulle

$$\sum_{\substack{n \geq N \\ k=0,\dots,n}} l(I_{k,n}) \leq 2C \sum_{n=N}^{+\infty} \frac{n+1}{n^3} \longrightarrow 0$$

1.2 $(c_n) = (a_n) * (b_n)$

$C_n = c_0 + c_1 + c_2 + \cdots + c_n$

$(C_n) = (c_n) * (1)$

$$(A_n) * (B_n) = (a_n) * (1) * (b_n) * (1)$$
$$= (a_n) * (b_n) * (1) * (1)$$
$$= (c_n) * (1) * (1)$$
$$= (C_n) * (1)$$
$$= (C_0 + C_1 + \cdots + C_n)$$

Donc, $C_0 + C_1 + \cdots + C_n = \sum_{k=0}^{n} A_k B_{n-k}$

$$C_0 + C_1 + \cdots + C_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} A_k B_{n+1-k}$$

$$C_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} A_k B_{n+1-k} - \sum_{k=0}^{n} A_k B_{n-k}$$
$$= A_{n+1} B_0 + \sum_{k=0}^{n} A_k (B_{n+1-k} - B_{n-k})$$

$$C_{n+1} - AB = A_{n+1} b_0 + \sum_{k=0}^{n} A_k b_{n+1-k} - AB$$
$$= \sum_{k=0}^{n} (A_k - A) b_{n+1-k} + A\left(\left(\sum_{k=0}^{n} b_{n+1-k}\right) - B\right)$$

Soit $\varepsilon > 0$

Il existe N t.q. $\forall n \geq N$, $|A_n - A| \leq \varepsilon$

$|b_n| \leq \varepsilon$

$|B_n - B| \leq \varepsilon$

pour n assez grand $(> 2N)$

$$\left|C_{n+1} - AB\right| \leq \left|\sum_{k=0}^{N-1} (A_k - A) b_{n+1-k}\right| + \left|\sum_{k=N}^{n} (A_k - A) b_{n+1-k}\right|$$

4. b) Soit $\varepsilon > 0$.

Pour chaque $p \in \mathbb{N}$, il existe $(I_\lambda)_{\lambda \in \Lambda_p}$ t.q.

$$A_p \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda_p} I_\lambda \quad \text{et} \quad \sum_{\lambda \in \Lambda_p} l(I_\lambda) \leq \frac{\varepsilon}{2^p}$$

$$\bigcup_{p \in \mathbb{N}} A_p \subset \bigcup_{p \in \mathbb{N}} \bigcup_{\lambda \in \Lambda_p} I_\lambda$$

$$\sum_{p \in \mathbb{N}} \sum_{\lambda \in \Lambda_\lambda} l(I_\lambda) \leq \sum_{p \in \mathbb{N}} \frac{\varepsilon}{2^p} \leq 2\varepsilon$$