TD : Probabilités

1.1

Pour $i \in F$, $X_i : \begin{cases} \Omega \to \{0,1\} \\ f \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } i \in f(E) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$

$X : \begin{cases} \Omega \to \mathbb{N} \\ f \mapsto |f(E)| \end{cases}$

$X(f) = \sum_{i \in F} X_i(f)$, $E(X) = \sum_{i \in F} E(X_i) = |F| \times E(X_1)$

$$E(X_i) = P(i \in f(E))$$
$$= 1 - P(i \notin f(E)) = 1 - \frac{|\{f : E \to F \setminus \{i\}\}|}{|\{f : E \to F\}|}$$
$$= 1 - \frac{(|F|-1)^{|E|}}{|F|^{|E|}}$$

$$E(X) = |F| \times \left(1 - \frac{(|F|-1)^{|E|}}{|F|^{|E|}}\right)$$

$Cov(X_i, X_j) = E(X_i X_j) - E(X_i)E(X_j)$

$P(i \in) + P(j \in)$
$+ P(i \notin, j \notin) - 1$

$E(X_i X_j) = P(i, j \in f(E)) = \cancel{\frac{n(n-1)m^{n-2}}{m^n}} = 2 \times \left(1 - \frac{(|F|-1)^{|E|}}{|F|^{|E|}}\right) + \frac{(|F|-2)^{|E|}}{|F|^{|E|}} - 1$

1.2 U_k : k bleues, $(m-k)$ rouges

On définit : $A_i \equiv$ " On choisit U_i "

$i \in [\![1, n]\!]$ $X_i \equiv$ " le $i^{\text{ème}}$ tirage : bleu "

Modélisation : Choix urne = uniforme

$$P(X_n) = \sum_{i=0}^{m} P(X_n | A_i) P(A_i)$$
$$= \frac{1}{m+1} \sum_{i=0}^{m} \left(\frac{i}{m}\right)^n$$

$$P(X_{n+1} | X_n) = \frac{P(X_{n+1})}{P(X_n)} = \frac{\sum_{i=0}^{m} \left(\frac{i}{m}\right)^{n+1}}{\sum_{i=0}^{m} \left(\frac{i}{m}\right)^n} = \frac{1}{m} \frac{\sum_{i=0}^{m} i^n}{\sum_{i=0}^{m} i^{n+1}}$$

$$\frac{1}{m} \times \frac{\sum_{i=0}^{m} i^{n+1}}{\sum_{i=0}^{m} i^n}$$

$S_n = \sum_{i=1}^{m} i^n$ | équivalent de S_n lorsque $n \to +\infty$

$$= m^n \left(1 + \underbrace{\left(\frac{m-1}{n}\right)^n + \dots + \frac{1}{m^n}}_{\text{nombre fini de termes}}\right)$$

$$\sim m^n$$

Weierstrass : $0 \le \underbrace{\left(1 - \frac{l}{n}\right)^n}_{u_{n,l}} \le \underbrace{e^{-l}}_{\text{série CV}}$

$$u_{n,l} \longrightarrow e^{-l}$$

$$\sum_{l=0}^{n-1} \left(1 - \frac{l}{n}\right)^n \longrightarrow \sum_{l=0}^{+\infty} e^{-l} = \frac{e}{e-1}$$

1.3

PP — A gagne

PF → P : B gagne ; → F

FP → B gagne

FF → P ; → F : B gagne

B gagnera forcément

2.1 a) Loi géométrique de paramètre $\frac{1}{3}$

b) X VA qui donne la probabilité de correction de toutes les fautes à l'instant n.

$$g_X(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n)\, x^n = g_{X_1}^{\,4} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} x^n\right)^4$$

$$= \frac{1}{16}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n x^n\right)^4 = \frac{1}{16}\,\frac{1}{\left(1 - \frac{2}{3}x\right)^4}$$

$$g_X = \frac{1}{16}\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+3}{n}\left(\frac{2}{3}\right)^n x^n$$

$n \simeq 10$ $\quad \Rightarrow P(X=n) = \frac{1}{16}\left(\frac{2}{3}\right)^n \binom{n+3}{n}$

$$\mathbb{P}(X_1 \leq n, \ldots, X_4 \leq n) = \left(1 - \mathbb{P}(X_i > n)\right)^4$$
$$= \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)^4$$

2.2 Loi binomiale négative

premier instant avec r succès :

$\mathbb{P}(X = n) = 0$ si $n < r$ ok.

$\mathbb{P}(X = r) = p^r$ par indépendance

$\mathbb{P}(X = n)$ $\begin{cases} r-1 \text{ choix de } 1 \text{ parmi } n-1 & \binom{n-1}{r-1} \\ \text{équiprobable.} & p^{r-1}(1-p)^{n-r} \\ \text{choix } X > n & p \times \binom{n-1}{r-1} p^{r-1} (1-p)^{n-r} \end{cases}$

$$\sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n-1}{r-1} p^r (1-p)^{n-r} \qquad m = n - r$$

$$= p^r \sum_{m=0}^{+\infty} \binom{m+r-1}{r-1} (1-p)^m = \frac{p^r}{(1-(1-p))^r} = 1$$

Dérivée de $\frac{1}{1-X}$

2.3 Modélisation par la loi binômiale négative de paramètre $\frac{1}{2}$

succès = choix de $G_{X(n+1)}$

en général $\quad P(X = N) = \binom{N-1}{n} \frac{1}{2^N}$

$a = 0 \qquad \mathbb{P}(X = 2n+1) = \binom{2n}{n} \frac{1}{2^{2n+1}}$

$a > 0 \qquad \mathbb{P}(X = 2n-a+1) = \binom{2n-a}{n} \frac{1}{2^{2n-a+1}}$

$Z_n = \frac{X_n}{\log n}$

2.4 $(Y \geq \alpha) = \bigcap_{p=1}^{+\infty} \left(Z_n \geq \alpha - \frac{1}{p} \text{ I.S.} \right)$

En effet, on regarde $Z_n(\omega)$

$\lim Z_n(\omega) \geq \alpha$, si $\forall p \geq 1$ $\{n \mid Z_n(\omega) \geq \alpha - \frac{1}{p}\}$ est infini.

Or $(Z_n \geq \alpha - \frac{1}{p} \text{ IS}) = \bigcap_{q=1}^{+\infty} \left(\bigcup_{n \geq q} Z_n \geq \alpha - \frac{1}{p} \right)$

a) $(Y > \alpha) \subset$

Soit ω, $\underbrace{\limsup \frac{X_n(\omega)}{\log n}}_{\text{plus grand valeur d'adhérence}} > \alpha$

alors, a fortiori : $X_n > \alpha \log n$ IS.

donc $\omega \in \bigcap_{k=1}^{+\infty} \left(\bigcup_{n \geq k} X_n \geq \alpha \log n \right)$

puis : $\frac{X_n}{\log n} \geq \alpha$ I.S. $\Rightarrow$ $Y \geq \alpha$ O.K.

$\alpha = \frac{1}{\lambda}$, $P(X_n \geq \alpha \ln n)$

$P(X_n \geq N) = \sum_{n=N}^{+\infty} p(1-p)^{n-1} = (1-p)^{N-1}$

$N = \lfloor \alpha \log n \rfloor$

$U_n \approx V_n$ $\exists a, b > 0$
$aV_n \leq U_n \leq bV_n$

$\mathbb{P}(X \geq \lfloor \log n^{\alpha} \rfloor) = (1 - (1 - e^{-\lambda}))^{[\log n^{\alpha}]}$

$\approx e^{-\lambda \alpha \log n} \approx \frac{1}{n^{\lambda \alpha}}$

$\alpha = \frac{1}{\lambda}$, $\sum P(X_n \geq \alpha \log n)$ diverge

Boreil - Cantelli

$\rightarrow$ $P(Y \geq \alpha) = 1$ $\Rightarrow$ $\boxed{\mathbb{P}(Y \geq \frac{1}{\lambda}) = 1}$

b) On va mq $\mathbb{P}(Y > \frac{1}{\lambda}) = 0$.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{Q} \cap]0, +\infty[$

$P(Y > \frac{1}{\lambda} + \varepsilon) \leq P\Big(\underbrace{\bigcap_{k=0}^{+\infty} \Big(\bigcup_{n \geq k} X_n \geq (\tfrac{1}{\lambda} + \varepsilon) \log n \Big)}_{E_\varepsilon} \Big)$

mais $\mathbb{P}\left(Y_n \geq \left(\frac{1}{\lambda}+\varepsilon\right) \log n\right) \approx \frac{1}{n^{\lambda(\frac{1}{\lambda}+\varepsilon)}}$ série CV

donc $\mathbb{P}(E_\varepsilon) = 0 \Rightarrow \mathbb{P}(Y > \frac{1}{\lambda})$

$$= \mathbb{P}\left(\bigcup_{\varepsilon \in \mathbb{Q}^*} \left(Y > \frac{1}{\lambda}+\varepsilon\right)\right) = 0$$

$$\mathbb{P}\left(Y = \frac{1}{\lambda}\right) = 1.$$

3.1

$\omega \in \limsup A_n \iff \{n \mid X_n(\omega) > n\}$ est infini!

$\iff \omega \in F$

On regarde $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k\geq 1}\left(\bigcup_{n \geq k} X_n > n\right)\right)$, $\mathbb{P}(X_n > n) = \mathbb{P}(X_1 > n)$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X_1 > n) = E(X_1)$$

premier cas $E(X_1) < +\infty$ BCI $\longrightarrow$ $\mathbb{P}(F) = 0$

deuxième cas : $E(X_1) = +\infty$ BCII $\rightarrow$ par indépendance $\mathbb{P}(F) = 1$.

3.2 f convexe donc $f = \sup_{t \in \mathbb{R}} \varphi_t$ où $\varphi_t(x) = f_d'(t)(x-t) + f(t)$

Car $\varphi_x(x) = f(x)$ d'où $\sup_{t\in\mathbb{R}} \varphi_t(x) \geq f(x)$

Par convexité, $\forall t$, $f(x) \geq \varphi_t(x)$

$f(x) \geq \sup_{t \in \mathbb{R}} \varphi_t(x)$

$\Big\}$ $f(x) = \sup_{t\in\mathbb{R}} \varphi_t(x)$

Pour $t \in \mathbb{R}$, par linéarité,

$$\varphi_t(\mathbb{E}(X)) = \mathbb{E}(\varphi_t(X))$$
$$\leq \mathbb{E}\left(\sup_{t\in\mathbb{R}} \varphi_t(X)\right) = \mathbb{E}(f(X))$$

D'où, $f(E(X)) \leq \mathbb{E}(f(X))$

On pose $a = E(X)$ $\varphi_a(E(X)) = f(E(X))$ s'il y a égalité

il vient : $\varphi_a(E(X)) = E(f \circ X)$ $E(\underbrace{(f - \varphi_a)}_{>0 \text{ sauf en } a} \circ X) = 0$

$E(\varphi_a \circ X) = E(f \circ X)$

$X = a$ ps.

X est p.s. constante

3.3. On pose $A = (Y>0)$ HYP: $P(A)>0$

$$E(Y)^2 = E(Y \cdot \mathbb{1}_A)^2 \underset{C-S}{\leq} E(Y^2)\underbrace{E(\mathbb{1}_A^2)}_{P(\mathbb{1}_A)}$$

$$\frac{E(Y)^2}{E(Y^2)} \leq \mathbb{P}(Y>0)$$

4.2

1. $\mathbb{P}(X_n = 1) = n\frac{1}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$

$\mathbb{P}(X_n = k) = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{4}\right)^k\left(\frac{3}{4}\right)^{n-k}$ $\quad k \in [\![0, n]\!]$

$X_n = \underbrace{Y_1 + \cdots + Y_n}_{\mathcal{B}(n, \frac{1}{4})}$ $\quad Y_i$ de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{4}$ indép.

$\mathbb{E}(F_n) = \frac{1}{4}$

$V(F_n) = \frac{3}{16n}$

$\mathbb{E}(X_n) = np = \frac{n}{4}$ $\quad V(X_n) = np(1-p) = \frac{3}{16}n$

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{n} - \frac{1}{4}\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{V(X_n)}{n^2\varepsilon^2} = \frac{3}{16n\varepsilon^2}$$

$n = 10^4$ $\quad \varepsilon = \frac{1}{100}$ $\quad \cancel{\mathbb{P} \geq 1 - \frac{1}{4}}$

$\mathbb{P}(F_n \in]0{,}22, 0{,}26[) \geq 1 - \frac{3}{16}$

5.1

$$g_X = (g_Z)^r = \left(px + p(1-p)x^2 + p(1-p)^2x^3 + \cdots\right)^r$$

$$= p^r \times \left(\frac{(1-p)x}{(1-p)(1-(1-p)x)}\right)^r$$

$$= \frac{p^r x^r}{(1-(1-p)x)^r}$$

$$= p^r x^r \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+r-1}{r-1}(1-p)^n x^n$$

$$= \sum_{m=r}^{+\infty} \binom{m-1}{r-1} p^r (1-p)^{m-r} x^m$$

$\mathbb{E}(X) = g_X'(1) = \frac{r}{p}$ $\quad V(X) = r \times V(Z) = \frac{r(1-p)}{p^2}$

4.5 $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ $X_i \sim \mathcal{P}(\lambda_i)$ $\lambda_i \to 0$

$\lambda_1 + \cdots + \lambda_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$

$E(S_n) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$ $V(S_n) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{E(S_n)} - 1\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{V(S_n)}{\varepsilon^2 E(S_n)^2} = \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{1}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n}$$

On choisit $n_k \in \mathbb{N}^*$. $k^2 \leq E(S_{n_k}) \leq k^2 + 1$

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_{n_k}}{E(S_{n_k})} - 1\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2 k^2} \quad \text{CV}$$

donc, $\frac{S_{n_k}}{E(S_{n_k})} \xrightarrow[k \to +\infty]{p.s.} 1$.

$S_{n_{k+1}} \geq S_n \geq S_{n_k}$

$n_k \leq n \leq n_{k+1}$ $(k+1)^2 \geq E(S_n) \geq k^2$

$$\underbrace{\frac{k^2}{E(S_n)}}_{\to 1} \underbrace{\frac{S_{n_k}}{k^2}}_{\xrightarrow[p.s.]{} 1} = \frac{S_{n_k}}{E(S_n)} \leq \frac{S_n}{E(S_n)} \leq \frac{S_{n_{k+1}}}{k^2} \leq \underbrace{\frac{(k+1)^2}{k^2}}_{\to 1} \underbrace{\frac{S_{n_{k+1}}}{(k+1)^2}}_{\xrightarrow[p.s.]{} 1}$$

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{E(S_n)} - 1\right| \geq \varepsilon\right) = \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{E(S_n)} - 1\right|^2 \geq \varepsilon^2\right) \leq \frac{V\left(\frac{S_n}{E(S_n)}\right)}{\varepsilon^2}$$

$$\leq \frac{V(S_n)}{\varepsilon^2 E(S_n)^2} = \frac{1}{\varepsilon^2} \times \frac{1}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n}$$

(refaits)

2.1 a) $P(X_i \geq n) = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

$P(X_i = n) = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - \left(\frac{2}{3}\right)^{n} = \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

b) On veut $P(X_1 \leq N, X_2 \leq N, X_3 \leq N, X_4 \leq N) \geq 0{,}9$

Indépendance, $P(X_1 \leq N)^4 \geq 0{,}9$

$\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^N\right)^4 \geq 0{,}9$

$N \geq 9{,}002$, Donc $N = 10$.

2.2

Si $n < r$, $\mathbb{P}(X = n) = 0$

$n = r$, $\mathbb{P}(X = r) = p^r$

$n > r$, $\mathbb{P}(X = n) = \binom{n-1}{r-1} p^r (1-p)^{n-r}$

$$\mathbb{P}(X = +\infty) = \lim_{n \to +\infty} \binom{n-1}{r-1} p^r (1-p)^{n-r}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{(n-1)!}{(r-1)!\,(n-r)!} p^r (1-p)^{n-r}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{(n-1)!}{(n-r)!} \left(\frac{p}{(1-p)}\right)^r (1-p)^n \times \frac{1}{(r-1)!}$$

$\frac{(n-1)!}{(n-r)!} \leq n^r$, $n^r (1-p)^n = e^{\underbrace{r \ln n + n \ln(1-p)}_{\to -\infty}} \to 0$

Donc, $\mathbb{P}(X = +\infty) = 0$.

2.3

$a = 0$, par symétrie $\frac{1}{2}$

$a > 0$,

$Z_n = \frac{X_n}{\ln n}$

2.4 a) $(Y \geq \alpha) = \bigcap_{p=1}^{+\infty} \left(Z_n \geq \alpha - \frac{1}{p} \text{ I.S.} \right)$

Soit $\omega \in (Y > \alpha)$, $\limsup \frac{X_n(\omega)}{\log n} > \alpha$, alors $X_n > \alpha \log n$ I.S., donc $\omega \in \bigcap_{k=1} \left(\bigcup_{n \geq k} X_n \geq \alpha \log n \right)$

Donc, $(Y > \alpha) \subset \bigcap_{k=0}^{+\infty} \left(\bigcup_{n \geq k} (X_n \geq \alpha \ln n) \right)$

Soit $\omega \in \bigcap_{k=0}^{+\infty} \left(\bigcup_{n \geq k} (X_n \geq \alpha \ln n) \right)$, clairement, $Y(\omega) \geq \alpha$

D'où, $(Y > \alpha) \subset \bigcap_{k=0}^{+\infty} \left(\bigcup_{n \geq k} (X_n \geq \alpha \ln n) \right) \subset (Y \geq \alpha)$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_n \geq \alpha \ln n) &= \mathbb{P}(X_n \geq \lceil \alpha \ln n \rceil) \\ &= (1-p)^{\lceil \alpha \ln n \rceil - 1} \\ &= e^{-\lambda(\lceil \alpha \ln n \rceil - 1)} \approx e^{-\lambda \alpha \ln n} \approx \frac{1}{n^{\lambda \alpha}} \end{aligned}$$

Pour $\alpha = \frac{1}{\lambda}$ $\sum \mathbb{P}(X_n \geq \alpha \ln n)$ diverge

Borel-Cantelli, $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} \left(\bigcup_{n \geq k} (X_n \geq \alpha \ln n) \right) \right) = 1$

D'où, $\mathbb{P}(Y \geq \alpha) = 1$

On a presque sûrement $Y \geq \frac{1}{\lambda}$.

b) Soit $\varepsilon > 0$. $\alpha = \frac{1+\varepsilon}{\lambda}$.

$$\mathbb{P}(X_n \geq \alpha \ln n) \approx \frac{1}{n^{\lambda(\frac{1+\varepsilon}{\lambda})}} \approx \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}$$

$\sum \mathbb{P}(X_n \geq \alpha \ln n)$ converge

Borel-Cantelli, $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} \left(\bigcup_{n \geq k} (X_n \geq \alpha \ln n) \right) \right) = 0$

D'où, $\mathbb{P}\left(Y > \frac{1+\varepsilon}{\lambda}\right) = 0$.

$$\mathbb{P}\left(Y > \frac{1}{\lambda}\right) = \mathbb{P}\Big(\underbrace{\bigcup_{\varepsilon \in \mathbb{Q}^+} \left(Y > \frac{1+\varepsilon}{\lambda} \right)}_{\text{dénombrable}} \Big) = 0$$

Donc, $\mathbb{P}\left(Y = \frac{1}{\lambda}\right) = 1$.

4.3

$$\mathbb{E}(S_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(Y_k Y_{k+1})$$
$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(Y_k)\,\mathbb{E}(Y_{k+1}) = \frac{1}{n} \times n p^2 = p^2$$

$$\mathbb{V}(S_n) = \frac{1}{n^2}\left(\sum_{k=1}^{n} V(Y_k) + 2\sum_{1\le i<j\le n} Cov(Y_i, Y_j)\right)$$
$$= \frac{1}{n^2}\left(n\times(p-p^2) + 2\sum_{i=1}^{n-1} Cov(Y_i, Y_{i+1})\right)$$

$$Cov(Y_i, Y_{i+1}) = \mathbb{E}(Y_i)\mathbb{E}(Y_{i+1}) - \mathbb{E}(Y_i Y_{i+1})$$
$$= p^2 - p^3$$

$$V(S_n) = \frac{1}{n^2}\left(n(p-p^2) + 2(n-1)(p^2-p^3)\right)$$
$$= (1-p)\frac{1}{n^2}\left(np + 2(n-1)p^2\right)$$

$$\mathbb{P}(|S_n - p^2| \geq \varepsilon) = \mathbb{P}(|S_n - p^2|^2 \geq \varepsilon^2)$$
$$\leq \frac{\mathbb{E}(|S_n - p^2|^2)}{\varepsilon^2} = \frac{V(S_n)}{\varepsilon^2}$$
$$= \frac{1}{n}\frac{1}{\varepsilon^2}(1-p)\left(p + 2\left(\frac{n-1}{n}\right)p^2\right)$$
$$\leq \frac{1}{n}\frac{1}{\varepsilon^2}(1-p)(p+2p^2) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Donc S_n converge en probabilité vers p^2.

4.4 a) $\mathbb{E}(S_n) = 0$, $V(S_n) = n\sigma^2$

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n^\alpha} - 0\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{V\left(\frac{S_n}{n^\alpha}\right)}{\varepsilon^2} \leq \frac{n\sigma^2}{\varepsilon^2 n^{2\alpha}} = \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} n^{1-2\alpha}$$

pour $\alpha > \frac{1}{2}$, $1-2\alpha < 0$, $\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n^\alpha} - 0\right| \geq \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

b) Par l'absurde, $\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{\sqrt{n}} - X\right| \geq \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

$$\mathbb{E}(X) = 0 \quad V\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} - X\right) = V\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right) + V(-X) + 2\,Cov\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}, -X\right)$$
$$= \sigma^2 + V(X) + 2\,\underbrace{Cov\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}, -X\right)}_{\mathbb{E}\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}, -X\right)}$$