TD: EDL

1.2. On avait montré que $GL_n(\mathbb{C}) = \exp(\mathbb{M}_n(\mathbb{C}))$
Il existe $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ t.q. $\phi(1) = e^{A}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\phi(n) = e^{nA}$.

2.1.a) Sur $\mathbb{R}$, $y(x) = \sum a_n x^n$ une solution de (E).

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+2}(n+2)(n+1)x^n$$

$$y'' + \left(1 - \frac{2}{x^2}\right) y = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(a_{n+2}(n+2)(n+1) + a_n - 2a_{n+2}\right) x^n$$

$$- \frac{2}{x^2}(a_1 x + a_0) = 0$$

Par identification, $a_0 = 0$, $a_1 = 0$.

$$a_{n+2}\, n(n+3) + a_n = 0$$

On pose $a_2 = 1$,

$$4a_3 = 0 \Rightarrow a_3 = 0$$

$$a_4 = -\frac{a_2}{2 \times 5}$$

1.1 $\left(I + tX + \frac{t^2}{2}X^2 + o(t^2)\right)\left(I + tY + \frac{t^2}{2}Y^2 + o(t^2)\right)$

$= \left(I + tY + \frac{t^2}{2}Y^2 + o(t^2)\right)\left(I + tX + \frac{t^2}{2}X^2 + o(t^2)\right)$

coeff de t^2 : $XY + \frac{X^2}{2} + \frac{Y^2}{2} = YX + \frac{X^2}{2} + \frac{Y^2}{2}$

Donc, $XY = YX$

1.2

* On part de : $\forall (s,t) \in \mathbb{R}^2$, $\varphi(s+t) = \varphi(s)\varphi(t)$
On intègre sur $[0, a]$,

$$\underbrace{\int_0^a \varphi(x+t)\, dt}_{\int_t^{a+t} \varphi(z)\, dz \text{ est } \mathcal{C}^1} = \left(\int_0^a \varphi(s)\, ds\right) \varphi(x)$$

On écrit : $\varphi(s) = I + \underbrace{\varepsilon(s)}_{\xrightarrow[s\to 0^+]{} 0}$

$$\int_0^a \varphi = aI + \int_0^a \varepsilon = a\left(I + \frac{1}{a}\int_0^a \varepsilon\right)$$

Soit $\delta > 0$, il existe $a > 0$ t.q. $\forall s \in [0, a]$,

$\| \varepsilon(s) \| \leq \delta \qquad \| \frac{1}{a} \int_0^a \varepsilon \| \leq \delta$

$\det\left(I + \frac{1}{a}\int_0^a \varepsilon\right) \xrightarrow[a\to 0^+]{} 1$, pour a assez petit, $I + \frac{1}{a}\int_0^a \varepsilon$ est inversible.

d'où, $aI + \int_0^a \varepsilon = M$

** $\qquad \varphi(t) = M^{-1}\left(\int_t^{a+t} \varphi\right)$

φ est $\mathcal{C}^1$, $\quad \varphi(s+t) = \varphi(s)\varphi(t)$

$\frac{d}{ds} \qquad \varphi'(s+t) = \varphi'(s)\varphi(t)$

$s = 0 \qquad \varphi'(t) = A\,\varphi(t) \qquad A = \varphi'(0)$

$\varphi(t) = e^{tA}$

2. 1

a) $\qquad x^2 \underbrace{y''(x)}_{\text{si bornée au } V(0)} = \underbrace{(2 - x^2)}_{\sim 2} y(x)$

$y(x) = O(x^2) \quad \Rightarrow \quad y(0) = y'(0) = 0$

$a_0 = a_1 = 0, \quad a_{n+2}\, n(n+3) + a_n = 0$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{2n+1} = 0$

$a_4 = \dfrac{-a_2}{2 \times 5} \qquad a_6 = \dfrac{a_2}{2 \times 5 \times 4 \times 7}$

$\forall n \geq 2, \quad a_{2n} = \dfrac{(-1)^{n-1}\, a_2 \times 6n}{(2n+1)!}$

$a_{2n+2} = \dfrac{-1}{2n(2n+3)} \dfrac{(-1)^{n-1} a_2 \times 6n}{(2n+1)!}$

$= \dfrac{(-1)^n\, a_2 \times 6(n+1)}{(2n+3)!}$

$$\frac{1}{(2k)!} - \frac{1}{(2k+1)!} = \frac{2k}{(2k+1)!}$$

Si $a_2 = \frac{1}{3}$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{2n} = (-1)^{n-1}\left(\frac{1}{(2n)!} - \frac{1}{(2n+1)!}\right)$

$\forall x \neq 0$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n}}{(2n)!} - \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\boxed{f(x) = \frac{\sin x}{x} - \cos x}$$

b) $\frac{1}{t} + w(t)$ est solution de (E)

$$\Leftrightarrow \frac{2}{t^3} + w''(t) + \left(1 - \frac{2}{t^2}\right)\left(\frac{1}{t} + w(t)\right) = 0$$

$$w''(t) + \left(1 - \frac{2}{t^2}\right) w(t) + \frac{1}{t} = 0$$

$(*)$ $\quad t^2 w''(t) + (t^2 - 2) w(t) = -t$

Analyse $\quad w(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n t^n$

$(*) \Rightarrow \quad b_{n+2} = \frac{-b_n}{n(n+3)}$

On veut w impaire $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \ b_{2n} = 0$.

et on a : $-2 b_1 = -1 \Rightarrow b_1 = \frac{1}{2}$

$$b_3 = \frac{-b_1}{4} \qquad b_5 = \frac{-b_3}{3 \times 6} = \frac{b_1}{4 \times 5 \times 6}$$

$$b_{2n+1} = \frac{(-1)^n \times 2 \times b_1}{(2n)! \times (2n+2)} = \frac{(-1)^n \times \quad \times (2n+1)}{(2n+2)!}$$

$$b_{2n+3} = \frac{(-1)^{n+1} (2n+1)}{(2n+2)!\,(2n+1)(2n+4)} = \frac{(-1)^{n+1}(2n+3)}{(2n+4)!}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_{2n+1} = (-1)^n \left(\frac{1}{(2n+1)!} - \frac{1}{(2n+2)!}\right)$$

$$w(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} - \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

$$\boxed{w(x) = \sin x + \frac{1}{x}(\cos x - 1)}$$

c) f et $x \mapsto \frac{1}{x} + w(x)$ forment un SF sur $]0, +\infty[$

Soit y une solution bornée au voisinage de 0.

Sur $]0, +\infty[$, $y(x) = \lambda f(x) + \mu\left(\frac{1}{x} + w(x)\right)$

Or $f(x) = \frac{\sin x}{x} - \cos x \xrightarrow[x \to 0^+]{} -1$

$\frac{1}{x} + w(x) \underset{0^+}{\sim} \frac{1}{x}$ donc il faut que $\mu = 0$

<u>Conclusion</u> : Les solutions bornées sur $\mathbb{R}$ sont les λf, $\lambda \in \mathbb{R}$

2.2

$$\begin{cases} p(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n \\ y(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k \end{cases} \qquad (E) : y'' = py$$

<u>Analyse</u>

Si y est solution $(\rho(a_n) > 0)$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+2}(n+2)(n+1) x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) x^n$$

Donc, $\begin{cases} \forall n \geq 0, \quad a_{n+2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \\ a_0, a_1 \text{ libre} \end{cases}$

$\exists C > 0, \quad |b_n| = O(C^n)$

Soit r t.q. $0 < r < \rho(b_n)$, $0 < r < 1$

$|b_n r^n|$ bornée

Donc, $|b_n| \leq \frac{M}{r^n} \leq \frac{1}{r^{n+1}}$

$a_0, a_1 \in \mathbb{R}$ (HR) : $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $a_k \leq \frac{1}{r^{k+1}}$

$$|a_{n+2}| \leq \frac{1}{(n+2)(n+1)} \sum_{k=0}^{n} |a_k| |b_{n-k}|$$

$$\leq \frac{1}{(n+2)(n+1)} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{r^{k+1}} \frac{1}{r^{n-k+1}} \leq \frac{n+1}{(n+2)(n+1)} \frac{1}{r^{n+2}}$$

$$\leq \frac{1}{r^{n+2}} \leq \frac{1}{r^{n+3}}$$

a_0, a_1 : O.K.

D'où, $\rho(a_n) > 0$ et on a un SF de FSE donc toute solution est DSE.

3.1

$$f(x) = \pm\sqrt{\frac{1}{2B}}\left(\frac{x+1}{1-x}\right)^B, \quad B > 0$$

3.2

$$Y'' + 2Y' + Y = 0 \qquad SF : (e^{-t}, te^{-t})$$

$$f_n(t) = t^n \begin{cases} \text{borné pour } \|\cdot\|_\infty \\ \text{N.B. pour } N \end{cases}$$

On pose $g(t) = f''(t) + 2f'(t) + f(t)$

On calcule f à l'aide de g par la VDC

$$f(x) = \lambda(x)e^{-t} + \mu(t)\, t e^{-t}$$

$$\begin{pmatrix} e^{-t} & te^{-t} \\ -e^{-t} & e^{-t}(1-t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda'(x) \\ \mu'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ g(x) \end{pmatrix}$$

$$w(t) = e^{-t}\begin{pmatrix} 1 & t \\ -1 & 1-t \end{pmatrix}$$

$$w^{-1}(t) = e^{t}\begin{pmatrix} 1-t & -t \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda' \\ \mu' \end{pmatrix} = e^{t}\begin{pmatrix} 1-t & -t \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ g(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \lambda(x) = \int_0^x -se^{s} g(s)\, ds + \alpha \\ \mu(x) = \int_0^x e^{s} g(s)\, ds + \beta \end{cases}$$

$$f(t) = \left(-\int_0^t se^{s} g(s)\, ds\right)e^{-t} + \left(\int_0^t e^{s} g(s)\, ds\right)te^{-t}$$

$$+ \alpha e^{-t} + \beta t e^{-t}$$

$f(0) = 0 \Rightarrow \alpha = 0$

$f'(0) = 0 \Rightarrow \beta = 0$

$$\|f\|_\infty \leq \|g\|_\infty \left[\left(\int_0^t s e^s ds\right) e^{-t} + \left(\int_0^t e^s g(s)\right) t e^{-t} \right]$$

$$\leq 2e \|g\|_\infty$$

3.3 $n = 1$ O.K.

$\lambda y_1^2 + \mu y_1 y_2 + \nu y_2^2 = 0$ $\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$ ne sont pas

$$2\lambda y_1 y_1' + \mu (y_1' y_2 + y_1 y_2') + 2\nu y_2 y_2' = 0$$

$$\begin{cases} y_1 \left(\lambda y_1 + \frac{\mu}{2} y_2\right) + y_2 \left(\frac{\mu}{2} y_1 + \nu y_2\right) = 0 \\ 2 y_1' \left(\lambda y_1 + \frac{\mu}{2} y_2\right) + 2 y_2' \left(\frac{\mu}{2} y_1 + \nu y_2\right) = 0 \end{cases}$$

$W \neq 0$, $\begin{cases} \lambda y_1 + \frac{\mu}{2} y_2 = 0 \\ \frac{\mu}{2} y_1 + \nu y_2 = 0 \end{cases}$ $\lambda = \mu = \nu = 0$

3.4

a) $\left(\frac{u'}{f}\right)' = \frac{u'' f - u' f'}{f^2} = \frac{f \cdot \frac{u}{f^2}}{f^2} = \frac{u}{f^3}$

$f' \xrightarrow[+\infty]{} a > 0$, $f(x) \underset{+\infty}{\sim} ax$ $f^3(x) \underset{+\infty}{\sim} a^3 x^3$

Or u est bornée, alors $\left(\frac{u'}{f}\right)' = O\left(\frac{1}{x^3}\right)$

$\frac{u'}{f}$ a une limite l en $+\infty$.

$l = 0$ sinon, $|u'| \sim |lf| \longrightarrow +\infty$, $u \to +\infty$

$$\int_x^{+\infty} \left(\frac{u'}{f}\right)' = \int_x^{+\infty} O\left(\frac{1}{t^3}\right) dt$$

il vient : $\frac{u'}{f} = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ $u' \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{x}\right)$

b) $u(x) \to 0$? $u' u'' - \frac{f'}{f} u'^2 - \frac{u u'}{f^2} = 0$

$$\frac{1}{2} u'^2 + C = \int_A^x \underbrace{\left(\frac{f'}{f}\right)}_{\sim \frac{1}{x}} u'^2 + \underbrace{\int_A^x \frac{u u'}{f^2}}_{\left[\frac{u^2}{2} \cdot \frac{1}{f^2}\right]_A^x + \int_A^x \frac{u^2}{f^3} f'}$$

$$\frac{1}{2}\left(u'^2 - u'^2(A)\right) = \int_A^x \frac{f'}{f}u'^2 + \frac{u^2}{2f^2}(x) + \int_A^x \frac{u^2 f'}{f^3} - \frac{u^2}{2f^2}(A)$$

<u>Variations</u> 1) $\exists A > 0$, u' ne s'annule pas sur $[A, +\infty[$

Quitte à $u \to -u$, on suppose u' négative donc $u \searrow l$. On veut $l = 0$ (?)

Supposons $l \neq 0$, il vient $\left(\frac{u'}{f}\right)' = \frac{u}{f^3} \underset{+\infty}{\sim} \frac{l}{a^3 x^3}$

$\underbrace{\text{On intègre}}_{\text{signe constant}}$ sur $\underbrace{[x, +\infty[}_{\text{reste}}$ $\quad \frac{u'}{f} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2a^3x^2} \quad \Big| \quad u' \sim \frac{1}{2a^2 x}$

$u \to +\infty$

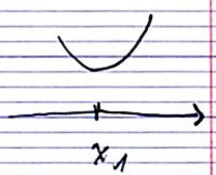
2) $\forall A > 0 \quad \exists x > A, \quad u'(x) = 0$

Soit x_1 t.q. $u'(x_1) = 0$ alors $u(x_1) \neq 0$

(sinon $\to 0$)

par ex $u(x_1) > 0$,

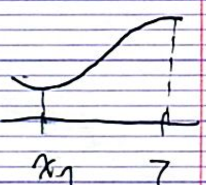
$$u''(x_1) = \underbrace{\frac{f'}{f}u'(x_1)}_{=0} + \frac{u(x_1)}{f^2} > 0$$



$T = \sup\{\tau > x_1 \mid u'' > 0 \text{ sur }]x_1, \tau]\}$

~~Sur $]x_1, \tau[$, $u' > 0$ et $u'(T) = 0$~~

~~$u''(\tau) > 0$~~



Si $T < +\infty$, $u''(T) = 0$

Sur $]x, T[$, $u'' > 0$, $u' \nearrow > 0$

$$u''(T) = \underbrace{\frac{f'}{f}}_{\sim \frac{1}{x}} \underbrace{u'(T)}_{>0} + \frac{u}{f^2}(T) > 0 \quad ↯$$

(C.C.) $T = +\infty$, u est convexe $x_2 > x_1$

$$u(x) \geq \underbrace{u'(x_2)}_{>0}(x - x_2) + u(x_2) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty \quad ↯$$

4.1 On se place sur un intervalle ne contenant ni -1, ni 1

$$\begin{cases}(t-1)x' = x - y \\ (t+1)y' = x - ty\end{cases} \iff \begin{cases} y = x + (1-t)x' \\ y' = x' - x' + (1-t)x'' \\ \quad = (1-t)x'' \end{cases}$$

$$(1+t)(1-t)x'' = x - tx - t(1-t)x'$$

$$(1-t^2)x'' = (1-t)(x - tx')$$

$$\Rightarrow (1+t)x'' = x - tx'$$

$$(1+t)(x'' + x') = x + x'$$

$$Z = x + x', \quad (1+t)Z' = Z$$

$$\Rightarrow Z = a(1+t)$$

$$x + x' = a(1+t)$$

$$\Rightarrow x(t) = at + b_0 e^{-t}$$

$$\Rightarrow y(t) = at + b_0 t e^{-t}$$

4.2 a)

$$u(t) = \underbrace{e^{\int_0^t A(s)\,ds}}_{\text{bornée, admettant une limite en } +\infty} u(0)$$

Donc, u est bornée, et admet une limite en $+\infty$.

$A \neq$ cste

$\exp\left(\int_0^t A(s)\,ds\right)$

b) $\phi : u_0 \longmapsto e^{\int_0^{+\infty} A(s)\,ds}\, u_0$

ϕ est clairement linéaire.

a) $u' = A(t)u$

$$u(t) = u(0) + \int_0^t A(s)\,u(s)\,ds$$

$$\|u(t)\| \leq \|u(0)\| + \int_0^t |||A(s)|||\,\|u(s)\|\,ds$$

Gronwall :

$$\|u(t)\| \leq \|u(0)\| \exp\left(\int_0^t |||A|||\right)$$

$$\leq \|u(0)\| \exp\left(\int_0^{+\infty} |||A|||\right)$$

Donc u' est bornée et u' est intégrable.

u possède une limite en $+\infty$.

b) Soit $X_1, \dots, X_n$ n système fondamental de sol. $X_1(0) = \varepsilon_1$

$$\phi : \lambda X_1 + \dots + \lambda_n X_n \to \lambda_1 x_1(+\infty) + \dots + \lambda_n x_n(+\infty)$$

On regarde $\phi_t : \lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_n X_n \to \lambda_1 X_1(t) + \dots + \lambda_n X_n(t)$

$\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$

$\downarrow u$

$\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_n f_n$

$\det_{(e)}(f_1, \dots, f_n)$

On a $u(0) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ $\quad \phi_t(u) = \lambda_1 x_1(t) + \dots + \lambda_n x_n(t)$

$$\det \phi_t = \det (X_1(t), \dots, X_n(t)) = W(T)$$

$$W(T) = \exp\left(\int_0^T Tr(A(s))\, ds\right)$$

$$W(T) \xrightarrow[T \to +\infty]{\det \phi_T} \det \phi$$

$$\det \phi = \exp\left(\int_0^{+\infty} Tr(A(s))\, ds\right)$$

5. a) $\underbrace{I(f + \lambda g)}_{\phi(\lambda)} = \int_0^1 e^t \left((f+\lambda g)^2 + (f' + \lambda g')^2\right) dt$

$$= \int_0^1 e^t \left(f^2 + f'^2 + \lambda^2 (g^2 + g'^2) + 2\lambda (fg + f'g')\right) dt$$

$$= I(f) + \lambda^2 I(g) + 2\lambda \int_0^1 e^t (fg + f'g')\, dt$$

$$\phi'(\lambda) = 2\lambda I(g) + 2\int_0^1 e^t (fg + f'g')\, dt$$

$$\phi'(0) = 2\int_0^1 e^t (fg + f'g')\, dt$$

b) <u>Analyse</u> Si f est un extremum, alors

$\forall g \in E$ et $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\quad f + \lambda g \in F$

ϕ est extremale en 0, $\phi'(0) = 0$.

$\phi'(0) \iff \int_0^1 e^t (fg + f'g')\, dt = 0$

Or $\int_0^1 e^t fg\, dt + \int_0^1 e^t f'g'\, dt$

$$= \int_0^1 e^t fg\,dt + [e^t f' g]_0^1 - \int_0^1 g(e^t f' + e^t f'')$$

$$= \int_0^1 e^t g (f - f' - f'')\,dt$$

$\Big\{ h : \forall g\ \mathcal{C}^\infty$ à support $\subset]0,1[$, $\int_0^1 hg = 0$
alors $h \equiv 0$ sur $]0,1[$

Ceci implique que $f'' + f' - f = 0$

Donc, $f(x) = A e^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}x} + B e^{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}x}$

$f(0) = 0 \quad f(1) = 1$

$$f(x) = \frac{e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}}{e^{\sqrt{5}} - 1} e^{-\frac{x}{2}} \sinh\left(\frac{x\sqrt{5}}{2}\right)$$

Soit $h \in F$, $I(h) = I(f + \underbrace{h - f}_{g})$

$$\Rightarrow \phi(\lambda) = I(f) + 2\lambda \underbrace{\int_0^1 e^t (fg + f'g')}_{=0 \text{ car } \phi'(0) = 0} + \lambda^2 I(g)$$

En particulier, $I(h) \geq I(f)$
d'où I minimale en f sur F.

6-2 a) MQ : on peut supposer $\varphi \geq 0$
puisque $\exists\, m, M > 0 \quad \forall x \geq A \quad m \leq \varphi \leq M$
et regarder $\int_0^{+\infty} t q(t) \varphi(t)\,dt$

b) et c) Sturm

6. a) on $V(+\infty)$, $\varphi \geq 0$, $m \leq \varphi \leq M$, $(m > 0)$

$\exists \alpha$, φ ne s'annule pas sur $[\alpha, +\infty[$

$\Rightarrow \varphi > 0$ sur $[\alpha, +\infty[$

$\varphi''(t) = -q(t)\,\varphi(t) < 0 \Rightarrow \varphi$ est concave

Soit $a \in [\alpha, +\infty[$, $x > a$, $\varphi'(a) \geq \dfrac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x - a} \xrightarrow[x \to +\infty]{}$

(φ bornée)

$\Rightarrow \varphi' \geq 0$

$\Rightarrow \varphi \nearrow$ sur $[\alpha, +\infty[$

$m = \varphi(\alpha) > 0$, $M = \|\varphi\|_\infty$

$\Rightarrow m \leq \varphi \leq M$

Montrons que q est intégrable

Soit $x \geq \alpha$, $\displaystyle\int_\alpha^x q(t)\,dt = \int_\alpha^x -\frac{\Phi''(t)}{\underbrace{\Phi(t)}_{\geq 0}}\,dt$

$\leq \dfrac{1}{m}\left(\Phi'(\alpha) - \Phi'(x)\right) \leq \dfrac{\Phi'(\alpha)}{m}$

$\Rightarrow q$ est intégrable

Montrons que $tq(t)$ est intégrable : on regarde $\int_\alpha^x t q(t)\,\phi(t)$

$\underbrace{\displaystyle\int_\alpha^x t q(t)\,dt}_{\geq m t q(t) \geq 0} = -\int_\alpha^x t\,\varphi''(t)\,dt = -\left(\underbrace{[t\varphi'(t)]_\alpha^x}_{\alpha\varphi'(\alpha) - x\varphi'(x)} - \underbrace{\int_\alpha^x \varphi'(t)\,dt}_{\text{borné}}\right)$

$\leq \alpha\,\varphi'(\alpha) + C$

<u>Euler</u> : $t^2 x'' + \alpha t x' + x = 0$ $\quad t > 0$

$t = e^s$ $\quad y(s) = x(e^s)$ $\begin{cases} y'(s) = x'(e^s)\,e^s = t\,x'(t) \\ y''(s) = \underbrace{x''(e^s)\,e^{2s}}_{t^2 x''(t)} + \underbrace{x'(e^s)\,e^s}_{y'(s)} \end{cases}$

d'où $(y'' - y') + \alpha y' + y = 0$

$t^2 q(t) > \dfrac{1}{4}$ pour t.q. $q(t) > \dfrac{\lambda}{t^2}$ $\Big|$ ψ, $m \leq \psi \leq M$

b) $x'' + q(t)x = 0 \quad \lim t^2 q(t) = \lambda > \frac{1}{4}$

$\exists a > 0, \quad \exists \alpha > \frac{1}{4}, \quad \forall t \geq a \; q(t) > \frac{\alpha}{t^2}$

STORM $\quad x'' + q(t)x = 0$

$y'' + \frac{\alpha}{t^2} y = 0 \quad \to \quad t^2 y'' + \alpha y = 0 \quad$ Sol : $t^r, r \in \mathbb{C}$

$r(r-1)t^r + \alpha t^r = 0 \qquad r^2 - r + \alpha = 0$

$\Delta = 1 - 4\alpha < 0$

Sol : $C_1 t^{\frac{1}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2} \ln t\right) + C_2 t^{1/2} \sin\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2} \ln t\right)$

une solution suffit $\sqrt{t}\cos(\beta \ln t)$ s'annule une infinité de fois

c) $q(t) \leq \frac{1}{4t^2}$ On compare à $\underbrace{y'' + \frac{1}{4t^2} y = 0}_{\sqrt{t} \text{ est solution}}$

Si x s'annule une infinité de fois, y aussi ?

$q_1 < q_2$

b) Sol : $C_1 t^{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} i} + C_2 t^{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} i}$

$= \sqrt{t}\left(C_1 e^{i\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}\ln t} + C_2 e^{-i\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}\ln t}\right)$

$= \sqrt{t}\left(C_1' \cos\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}\ln t\right) + C_2' \sin\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}\ln t\right)\right)$

$t \mapsto \sqrt{t}\cos(\beta \ln t)$ s'annule une infinité de fois, par comparaison, ϕ aussi.

$\sqrt{t}$

$\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{t}}$

$-\frac{1}{4}\frac{1}{t^{3/2}}$

c) $\exists a > 0$, pour tout $t \geq a$, $t^2 q(t) \leq \frac{1}{4}$

$y'' + \frac{1}{4t^2} y = 0$: $\sqrt{t}$ est une solution

Par l'absurde, si ϕ s'annule un nombre infini de fois sur $[a, +\infty[$, $\sqrt{t}$ aurait dû être aussi

ABS !

6. a) ~

Montrons que $t\,q(t)$ est intégrable : on regarde $\int_\alpha^x t\,q(t)\,\phi(t)\,dt$

$$\int_\alpha^x \underbrace{t\,q(t)\,\phi(t)}_{\geq t\,q(t)\,m\,\geq 0}\,dt = -\int_\alpha^x t\,\phi''(t)\,dt$$

$$= -\left([t\,\varphi'(t)]_\alpha^x - \int_\alpha^x \varphi'(t)\,dt \right)$$

$$= -\left(x\varphi'(x) - \alpha\varphi'(\alpha) - \underbrace{\varphi(x) + \varphi(\alpha)}_{\text{borné}} \right)$$

$$= \alpha\varphi'(\alpha) + \varphi(x) - \varphi(\alpha) - \underbrace{x\varphi'(x)}_{\geq 0} \leq \alpha\varphi'(\alpha) + \varphi(x) - \varphi(\alpha)$$

$$\leq M - m + \alpha\varphi'(\alpha)$$

Donc, $\int q(t)\,t$ est intégrable.

(Refaits)

1.2 $\forall (s,t) \in \mathbb{R}^2, \quad \varphi(s+t) = \varphi(s)\varphi(t)$

$$\underbrace{\int_0^a \varphi(s+t)\,ds}_{\int_t^{t+a} \varphi(\tau)\,d\tau} = \int_0^a \varphi(s)\varphi(t)\,ds = \left(\int_0^a \varphi(s)\,ds\right)\varphi(t)$$

On écrit : $\varphi(s) = I + \varepsilon(s)$

$$\int_0^a \varphi(s)\,ds = aI + \int_0^a \varepsilon(s)\,ds = a\left(I + \frac{1}{a}\int_0^a \varepsilon(s)\,ds\right)$$

Soit $\delta > 0$, il existe $a > 0$ t.q. $\forall s \in [0,a]$,

$\|\varepsilon(s)\| \leq \delta$, $\quad \|\frac{1}{a}\int_0^a \varepsilon\| \leq \delta$

Pour a assez petit, $(I + \frac{1}{a}\int_0^a \varepsilon(s)\,ds)$ est inversible

On fixe un tel a, et $M = aI + \int_0^a \varepsilon(s)\,ds \in GL_n(\mathbb{C})$

$$\int_t^{t+a} \varphi(\tau)\,d\tau = M\varphi(t), \quad \varphi(t) = M^{-1}\int_t^{t+a} \varphi(\tau)\,d\tau$$

φ est donc $\mathcal{C}^1$,

$$\frac{d\varphi(s+t)}{ds} = \frac{d\varphi(s)}{ds}\varphi(t)$$

$s = 0$, $\quad \varphi'(t) = \varphi'(0)\varphi(t)$

On note $A = \varphi'(0)$, $\quad \varphi'(t) = A\varphi(t)$

Donc, $\quad \varphi(t) = e^{tA}$

3.1
$$\begin{cases} f'(x)f(-x) = \dfrac{1}{1-x^2} \\ f'(-x)f(x) = \dfrac{1}{1-x^2} \end{cases} \quad \text{pour tout } x \in]-1,1[$$

Posons $\varphi : x \longmapsto f(x)f(-x)$

$$\varphi'(x) = f'(x)f(-x) - f(x)f'(-x) = 0$$

Donc, φ est une fonction constante, soit $C \in \mathbb{R}$.

$$f'(x)\, f(-x)\, f(x) = \frac{f(x)}{1-x^2}$$

$$C\, f'(x) = \frac{f(x)}{1-x^2}$$

Si $C = 0$, $f(x) = 0$, trivial.

On suppose $C \neq 0$, donc f ne s'annule pas,

$$f'(x) = \underbrace{\frac{1}{C(1-x^2)}}_{\text{ne s'annule pas sur }]-1,1[} f(x)$$

$$\int \frac{1}{1-x^2}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\, dx$$

$$= \frac{1}{2} \ln\left|\frac{x+1}{1-x}\right| + C'$$

$$f(x) = A\, e^{B \ln\left|\frac{x+1}{1-x}\right|} = A\left(\frac{x+1}{1-x}\right)^B$$

$$f'(x) = A \cdot B \left(\frac{x+1}{1-x}\right)^{B-1} \times \frac{(1-x)+(x+1)}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{2AB\,(x+1)^{B-1}}{(1-x)^{B+1}} = 2AB\left(\frac{x+1}{1-x}\right)^B \times \frac{1}{1-x^2}$$

$$f'(x)\, f(-x) = 2AB\left(\frac{x+1}{1-x}\right)^B \times \frac{1}{1-x^2} \times A\left(\frac{-x+1}{1+x}\right)^B$$

$$= \frac{2A^2B}{1-x^2} \Rightarrow 2A^2B = 1$$

Donc, la solution générale s'écrit :

$$f_+ : x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}\left(\frac{x+1}{1-x}\right)^\lambda \qquad \lambda > 0$$

$$f_- : x \longmapsto \frac{1}{-\sqrt{2\lambda}}\left(\frac{x+1}{1-x}\right)^\lambda$$

3.2 $y'' + 2y' + y = 0$ SF: (e^{-t}, te^{-t})

On pose $f_n(t) = t^n$ $\begin{cases} \text{bornée pour } \|\cdot\|_\infty \\ \text{non bornée pour } N \end{cases}$

$\| n(n-1)t^{n-2} + 2nt^{n-1} + t^n \|_\infty = n^2+n+1 \longrightarrow +\infty$

Donc, N et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes.

On pose $g(t) = f''(t) + 2f'(t) + f(t)$.

S.P. : $f(t) = \lambda(t) e^{-t} + \mu(t) t e^{-t}$

$$\begin{pmatrix} e^{-t} & te^{-t} \\ -e^{-t} & e^{-t}(1-t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda' \\ \mu' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ g(t) \end{pmatrix}$$

$$w(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ -1 & 1-t \end{pmatrix}$$

$$w^{-1}(t) = e^{t} \begin{pmatrix} 1-t & -t \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda' \\ \mu' \end{pmatrix} = e^{t} \begin{pmatrix} 1-t & -t \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ g(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t g(t) e^{t} \\ e^{t} g(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \lambda(x) = \int_0^x -t g(t) e^{t} \, dt + \alpha \\ \mu(x) = \int_0^x e^{t} g(t) \, dt + \beta \end{cases}$$

$$f(t) = \left(-\int_0^t s(g(s)) e^{s} ds\right) e^{-t} + \left(\int_0^t e^{s} g(s) ds\right) t e^{-t} + \alpha e^{-t} + \beta t e^{-t}$$

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f'(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{matrix}$$

$$\|f\|_\infty \leq \|g\|_\infty \underbrace{\left\| \left(\int_0^t s e^{s} ds\right) e^{-t} + \left(\int_0^t e^{s} g(s) \, ds\right) t e^{-t} \right\|_\infty}_{M \text{ fixé}}$$

$$\leq M \|g\|_\infty \leq M\, N(f)$$

? (Ainsi, (E, N) est complet car $(f_n) \xrightarrow{N} f$
$\Rightarrow (f_n) \xrightarrow{CVU} f$.)

3.3 $n=1$ O.K.

$$\lambda y_1^2 + \mu y_1 y_2 + \nu y_2^2 = 0 \qquad \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \text{ ne s'annule pas}$$

$$2\lambda y_1 y_1' + \mu(y_1' y_2 + y_1 y_2') + 2\nu y_2 y_2' = 0$$

$$\begin{cases} y_1\left(\lambda y_1 + \frac{\mu}{2} y_2\right) + y_2\left(\frac{\mu}{2} y_1 + \nu y_2\right) = 0 \\ 2y_1'\left(\lambda y_1 + \frac{\mu}{2} y_2\right) + 2y_2'\left(\frac{\mu}{2} y_1 + \nu y_2\right) = 0 \end{cases}$$

$W \neq 0$, $\begin{cases} \lambda y_1 + \frac{\mu}{2} y_2 = 0 \\ \frac{\mu}{2} y_1 + \nu y_2 = 0 \end{cases}$ $\qquad \lambda = \mu = \nu = 0$

Donc, $n=2$, O.K.

Par récurrence ...

4.1

On se place sur un intervalle ne contenant ni -1, ni 1.

Solution évidente $\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 1 \end{cases}$

$$\begin{cases} (t-1)x' = x - y \\ (t+1)y' = x - ty \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x + (1-t)x' \\ y' = x' - x' + (1-t)x'' \\ \quad = (1-t)x'' \end{cases}$$

$$(1-t^2)x'' = x - tx - t(1-t)x'$$

$$\Rightarrow (1+t)x'' = x - tx'$$

$$\Rightarrow (1+t)(x'' + x') = x + x'$$

$Z = x + x'$, $(1+t)Z' = Z \Rightarrow Z = a(1+t)$, $a \in \mathbb{R}$

$$x + x' = a(1+t) \Rightarrow \begin{cases} x(t) = at + be^{-t} \\ y(t) = at + be^{-t} + (1-t)(a - be^{-t}) \\ \quad = a + bte^{-t} \end{cases}$$

3.4

a) $$u'' - \frac{f'}{f}u' - \frac{u}{f^2} = 0$$

$$\left(\frac{u'}{f}\right)' = \frac{u''f - u'f'}{f^2} = \frac{u}{f^3}$$

$f' \xrightarrow[+\infty]{} a$, $f(x) \underset{+\infty}{\sim} ax$ $\quad f^3(x) \underset{+\infty}{\sim} a^3x^3$

Or u est bornée, $\left(\frac{u'}{f}\right)' = O\left(\frac{1}{x^3}\right)$

$\frac{u'}{f}$ admet donc une limite en $+\infty$ car $\frac{1}{x^3}$ intégrable, soit l

Si $l \neq 0$, $u' \underset{+\infty}{\sim} lax$, alors $|u| \xrightarrow[+\infty]{} +\infty$.

Donc, $l = 0$,

$$\int_x^{+\infty} \left(\frac{u'}{f}\right)' = \int_x^{+\infty} O\left(\frac{1}{t^3}\right) dt$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{u'(x)}{f(x)} = O\left(\frac{1}{x^2}\right) \Rightarrow u'(x) = O\left(\frac{1}{x}\right)$$

2.2

On note $p(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k x^k$

Analyse

Soit $y(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ avec $\rho(a_n) > 0$ une solution de $y'' = py$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) x^n$$

Donc, pour tout $n \geq 2$, $n(n-1) a_n = \sum_{k=0}^{n-2} a_k b_{n-k}$

$$a_n = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{k=0}^{n-2} a_k b_{n-k}$$

Dès que a_0, a_1 sont fixés, (a_n) se définit de façon récursive.

On veut montrer que pour a_0, a_1 fixés, $\rho(a_n) > 0$.

Soit r t.q. $0 < r < \rho(p_n)$, $r < 1$

$|p_n r^n|$ bornée par $M > 0$

$$|p_n| \leq \frac{M}{r^n} = \frac{(M r^{n_0})}{r^{n+n_0}} \quad \text{t.q. } M r^{n_0} \leq 1$$

(HR): $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $|a_k| \leq \dfrac{1}{r^{k-n_0}}$

$$|a_{n+2}| \leq \frac{1}{(n+2)(n+1)} \sum_{k=0}^{n} a_k p_{n+2-k}$$

$$\leq \frac{1}{(n+2)(n+1)} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{r^{k-n_0}} \frac{1}{r^{n+2-k+n_0}}$$

$$\leq \frac{1}{(n+2)(n+1)} \frac{(n+1)}{r^{n+2}} = \frac{1}{(n+2) r^{n+2}}$$

$$\leq \frac{1}{r^{n+2}} = \frac{1}{r^{n+2-n_0}} \frac{1}{r^{n_0}}$$

D'où, $\rho(a_n) > 0$ et on a un SF de FSE, donc toute solution est DSE.

4.2 a)

HYP : $\int_{\mathbb{R}} \|A(t)\| \, dt < +\infty$

$$u(t) = u(0) + \int_0^t A(s) u(s) \, ds$$

$$\|u(t)\| \leq \|u(0)\| + \int_0^t |||A(s)||| \, \|u(s)\| \, ds$$

Gronwall :

$$\|u(t)\| \leq \|u(0)\| \exp\Big(\underbrace{\int_0^t |||A(s)||| \, ds}_{\text{bornée}}\Big)$$

D'où, $\|u(t)\|$ sera bornée

Clairement, $u'(t) = A(t)u(t)$ est bornée aussi,

$$\|u'(t)\| \leq \underbrace{|||A(t)|||}_{\text{intégrable}} \, \underbrace{\|u(t)\|}_{\text{bornée}}$$

Donc, $u'(t)$ intégrable, u possède une limite en $+\infty$.

b) Soient $(u_1, \dots, u_n)$ un SF de $u' = A(t)u$.
t.q. $u_i(0) = \varepsilon_i$
Par linéarité, $\phi : \sum_{i=1}^n \lambda_i \varepsilon_i \longmapsto \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i(+\infty)$,
$\mathrm{Det}(u_1(+\infty), \dots, u_n(+\infty)) \neq 0$, donc, ϕ
est un automorphisme de $\mathbb{R}^n$.
On regarde $\phi_t : \sum_{i=1}^n \lambda_i \varepsilon_i \longmapsto \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i(t)$

$$(\phi_t)_{(\varepsilon)} = \begin{pmatrix} u_1(t) & \dots & u_n(t) \end{pmatrix} \qquad \det \phi_t = \det(u_1(t), \dots, u_n(t)) = W(t)$$

$$W'(t) = \sum_{i=1}^n \det(X_1(t), \dots, A(t)X_i(t), \dots, X_n(t))$$
$$= \mathrm{Tr}(A(t)) \det(X_i(t)) = \mathrm{Tr}(A(t))\, W(t)$$

$$W(0) = 1, \quad W(t) = W(0) \exp\left(\int_0^t \mathrm{Tr}(A(s))\, ds\right)$$

$$W(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} W(+\infty) = \det \phi$$

Donc, $\det \phi = \exp\left(\int_0^{+\infty} \mathrm{Tr}(A(s))\, ds\right)$

5. a) $$I(f+\lambda g) = \int_0^1 e^t \left((f+\lambda g)^2 + (f'+\lambda g')^2\right)$$
$$= \int_0^1 e^t (f^2 + f'^2) + 2\lambda \int_0^1 e^t (fg + f'g') + \lambda^2 \int_0^1 e^t (g^2 + g'^2)$$

$\phi_g : \lambda \mapsto I(f+\lambda g)$

$$= I(f) + 2\lambda \int_0^1 e^t (fg + f'g') + \lambda^2 \int_0^1 e^t (g^2 + g'^2)$$

La dérivée est $\lambda \mapsto 2\int_0^1 e^t (fg + f'g') + 2\lambda \int_0^1 e^t (g^2 + g'^2)$

En 0, $2\int_0^1 e^t (f(t)g(t) + f'(t)g'(t))\, dt$

b) Si f_0 est un extremum, alors pour tout $g \in E$,
$\phi_g'(0) = 0$, ie $\int_0^1 e^t fg + \int_0^1 e^t f'g' = 0$

$$0 = \int_0^1 e^t fg + [e^t f' g]_0^1 - \int_0^1 g(e^t f' + e^t f'')$$

$$\int_0^1 e^t (f - f' - f'')\, g = 0$$

$\Rightarrow f - f' - f'' \equiv 0$ sur $]0,1[$

Par $\mathcal{C}^0$, $f - f' - f'' = 0$ sur $[0,1]$.

$$f'' + f' - f = 0$$

$$\lambda^2 + \lambda - 1 = 0 \Rightarrow \lambda_\pm = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$f(x) = A e^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2} x} + B e^{\frac{-1-\sqrt{5}}{2} x}$$

$$f(0) = A + B = 0 \quad \cancel{f(1)} \Rightarrow B = -A$$

$$f(x) = A\left(e^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2} x} - e^{\frac{-1-\sqrt{5}}{2} x}\right)$$

$\exists!\, A \in \mathbb{R}$ t.q. $f(1) = 1$, $f_0 = A\left(e^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2} x} - e^{\frac{-1-\sqrt{5}}{2} x}\right)$

Soit $h \in F$,

$$I(h) = I(f + \underbrace{h - f}_{g}), \quad \phi_g(\lambda) = I(f) + 2\lambda \underbrace{(\quad)}_{=0} + \lambda^2 I(g)$$

D'où, $I(h) \geq I(f)$, I minimale en f_0 sur F.