TD : Polynômes orthogonaux

1.1. a) Par récurrence sur n. , $n=0$ O.K.

Soit $n \in \mathbb{N}$ t.q. les propriétés sont vérifiées pour $(P_0, P_1, \dots, P_n)$.

$(P_0, P_1, \dots, P_n)$ libre car orthogonale, c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ qui est un hyperplan de $\mathbb{R}_{n+1}[X]$.

Soit $P_{n+1} \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$ t.q. $P_{n+1} \perp Vect(P_0, \dots, P_n)$, si $\deg P_{n+1} < n+1$, $P_{n+1} \in \mathbb{R}_n[X]$ absurde !

D'où, le résultat.

b) Récurrence : $n=0$ O.K.

On suppose $Q_k = \lambda_k P_k$, $\lambda_k \neq 0$, $k=0, \dots, n$

de là $H = Vect(P_0, \dots, P_n) = Vect(Q_0, \dots, Q_n)$ hyperplan de $\mathbb{R}_{n+1}[X]$ et $P_{n+1} \perp H$, $Q_{n+1} \perp H$ dans $\mathbb{R}_{n+1}[X]$

$\exists \lambda_{n+1} \neq 0$, $Q_{n+1} = \lambda_{n+1} P_{n+1}$.

c) Si $P_n = (X-\alpha) Q$, $Q \in Vect(P_0, \dots, P_{n-1})$

donc $\langle P_n | Q \rangle = 0$

$$\int_I (t-\alpha) \underbrace{\omega(t) Q^2(t)}_{>0} \, dt$$

sauf ~~sur~~ un nombre fini de points.

donc $(X-\alpha)$ change de signe dans $\mathring{I}$

On suppose $P = (AX^2 + BX + C) Q$

avec $AX^2 + BX + C = A(X-\beta)(X-\bar{\beta})$, $\beta \in \mathbb{C} / \mathbb{R}$

ou $A(X-\alpha)^2$

Or $\langle P | Q \rangle = 0$

donc $(AX^2 + BX + C)$ change de signe ABS !

D'où, P_n est scindé à racines simples, et les racines sont dans $\mathring{I}$.

d) $P_{n+1}(X) = (a_n X + b_n) P_n - c_n P_{n-1} + \underbrace{a_{n-2} P_{n-2} + \dots + a_0 P_0}$ base de $\mathbb{R}_n[X]$

$k \leq n-2 \quad \langle P_k | P_{n+1} - a_n X P_n \rangle$

$= a_k \langle P_k | P_k \rangle$ par orthogonalité

et $\langle P_k | P_{n+1} - a_n X P_n \rangle$

$= - a_n \langle P_k | X P_n \rangle = - a_n \langle X P_k | P_n \rangle = 0$

car $\deg(X P_k) \leq n-1$

Reste $a_k \underbrace{\langle P_k | P_k \rangle}_{> 0} = 0$, $a_k = 0$

e) $$L_n(X) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dX^n}\left((X^2-1)^n\right) \quad I = [-1, 1] \quad w = 1$$

$m < n \quad \langle L_m | L_n \rangle$

$$= \frac{1}{2^{n+m} n! m!} \int_{-1}^{1} \underbrace{\frac{d^n}{dX^n}\left((X^2-1)^n\right)}_{v'} \cdot \underbrace{\frac{d^m}{dX^m}\left((X^2-1)^m\right)}_{u} dt$$

$$= \text{''} \left(\underbrace{\left[\frac{d^{n-1}}{dX^{n-1}}\left((X^2-1)^n\right) \frac{d^m}{dX^m}\left((X^2-1)^m\right) \right]_{-1}^{1}}_{0} \right.$$

0 car 1 et (−1) sont racines de multiplicité n

$$\left. - \int_{-1}^{1} \frac{d^{n-1}}{dX^{n-1}}\left((X^2-1)^n\right) \frac{d^{m+1}}{dX^{m+1}}\left((X^2-1)^m\right) dx \right)$$

⋮ m IPP successives

$$= \frac{1}{2^{n+m} n! m!} (-1)^{m+1} \int_{-1}^{1} \frac{d^{n-(m+1)}}{dX^{n-(m+1)}}\left((X^2-1)^n\right) \underbrace{\frac{d^{2m+1}}{dX^{2m+1}}\left((X^2-1)^m\right)}_{= 0 \text{ (degré)}} dx$$

$= 0$

$$\langle L_n, L_n\rangle = \left(\frac{1}{2^n n!}\right)^2 \int_{-1}^{1} \frac{d^n}{dx^n}\left((x^2-1)^n\right) \frac{d^n}{dx^n}\left((x^2-1)^n\right) dx$$

$$= \left(\frac{1}{2^n n!}\right)^2 (-1)^n \int_{-1}^{1} (x^2-1)^n \underbrace{\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}\left((x^2-1)^n\right)}_{(2n)!} dx$$

$x = \cos t$

$dx = -\sin t \, dt$

$$= (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \int_{\pi}^{0} \underbrace{(\cos^2 t - 1)^n}_{(-1)^n \sin^{2n}(t)} (-\sin t)\, dt$$

$$= \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \underbrace{\int_0^{\pi} \sin^{2n+1}(t)\, dt}_{2 I_{2n+1}}$$

$$I_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} I_{2n-1} = \frac{(2n) \cdots \times (2)}{(2n+1) \cdots \times (3)} 1 = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$$

$$\langle L_n | L_n\rangle = \frac{2}{2n+1} \quad , \quad \| L_n \|_2 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2n+1}}$$

1.2. a) $\int_a^b f^2 w = \langle f, f\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle f, P_n\rangle^2$ (?)

$f \in \overline{\mathbb{R}[X]}$ pour $\|.\|_2$ car c'est vrai pour $\|.\|_\infty$ et on est sur un segment.

Parseval.

b) i) $L_i = \prod_{k \neq i} \frac{(X - x_k)}{(x_i - x_k)}$, $1 \leq i \leq n$

Soit $Q \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$

Divisions euclidienne par P_n

$Q = SP_n + R$, $R \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$

- $2n-1 \geq \deg(Q) = \deg(SP_n) = n + \deg S$

Donc, $\deg S \leq n-1$.

- $Q(x_i) = R(x_i)$
- $R \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ donc $R = \sum_{i=1}^{n} R(x_i) L_i = \sum_{i=1}^{n} Q(x_i) L_i$

$$\int_a^b Q(t)w(t)\,dt = \langle P_n, S\rangle + \int_a^b R\,w$$

$$= \sum_{i=1}^{n} Q(x_i) \underbrace{\int_a^b L_i(t)w(t)\,dt}_{\lambda_i}$$

ii) $Q = \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n} \frac{(X-x_k)^2}{(x_i-x_k)^2}$ $\quad 0 < \int_a^b \underbrace{Q\,w}_{\geq 0} = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{Q(x_k)}_{\substack{1 \text{ si } k=i \\ 0 \text{ sinon}}}\lambda_k = \lambda_i$

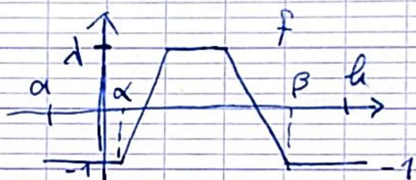
c) $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Z(P_n)$

Par l'absurde, $x \in [a,b] \setminus \overline{A}$

$\exists r>0,\ ([x-r,x+r]\cap I)\cap A = \emptyset$

On prend $\alpha, \beta \in I$, $\alpha < \beta$ t.q. $[\alpha,\beta] \subset I\setminus A$

$\lambda > 0$



t.q. $\int_a^b f\,w > 1$

$P \in \mathbb{R}[X]$ t.q. $\|P-f\|_2 \leq \frac{1}{2}$, $\|P-f\|_\infty \leq \frac{1}{2}$

$$\begin{cases} \forall x \notin [\alpha,\beta], & P(x) \leq -\frac{1}{2} < 0 \\ \int_a^b P\,w \geq \frac{1}{2} > 0 \end{cases}$$

$N = \deg P \qquad (x_1, \dots, x_N) = Z(P_N)$

$0 < \int_a^b P\,w = \sum_{k=1}^{N} \underbrace{P(x_k)}_{<0}\cdot\underbrace{\lambda_k}_{>0} < 0$ Contradiction!

$$\int_a^b P\,w = \int_a^b (P-f)\,w + \underbrace{\int_a^b f\,w}_{>1}$$

2. $\omega(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$, pour $n \neq m$

a) $\langle P_n|P_m\rangle = \int_{\mathbb{R}} (-1)^{m+n} e^{\frac{t^2}{2}} \left(e^{-\frac{t^2}{2}}\right)^{(m)} \left(e^{-\frac{t^2}{2}}\right)^{(n)} dt$

→ $\deg P_n = n$:

$n = 0$ OK.

Réc : $P_{n+1}(t) = (-1)^{n+1} \left(e^{-\frac{t^2}{2}}\right)^{(n+1)} e^{t^2/2}$

$= (-1)^{n+1} \times \left(-t\, e^{-\frac{t^2}{2}}\right)^{(n)} e^{t^2/2}$

$= (-1)^{n} \times \left(t \left(e^{-\frac{t^2}{2}}\right)^{(n)} + n \left(e^{-t^2/2}\right)^{(n-1)}\right) e^{t^2/2}$

$P_{n+1}(t) = t\, P_n(t) - n P_{n-1}(t)$

→ Il suffit de m.q. si $k < n$, $\langle t^k | P_n\rangle = 0$

$\int_{-\infty}^{+\infty} t^k P_n(t) e^{-\frac{t^2}{2}} dt = (-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{t^k}_{u} \underbrace{\left(e^{-\frac{t^2}{2}}\right)^{(n)}}_{v'} dt$

$= (-1)^n \left(\underbrace{\left[t^k \left(e^{-\frac{t^2}{2}}\right)^{(n-1)}\right]_{-\infty}^{+\infty}}_{=0} - k \int_{-\infty}^{+\infty} t^{k-1} \left(e^{-t^2/2}\right)^{(n-1)} dt \right)$

$= \cdots = (-1)^{n+k} k! \int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{-t^2/2}\right)^{(n-k)} dt \overset{n-k \geq 1}{=} 0$

$k = n$, $\int_{-\infty}^{+\infty} t^n P_n(t) e^{-t^2/2} dt = n! \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2} dt = \sqrt{2\pi} \cdot n!$

Or $P_n(t) = t^n + Q(t)$, $\deg Q \leq n-1$

→ $\langle P_n|P_n\rangle = \langle P_n | t^n\rangle = \sqrt{2\pi} \cdot n!$

b) PSE. Par produit de Cauchy ACV :

$e^{ux - \frac{u^2}{2}} = e^{ux} e^{-\frac{u^2}{2}} = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{u^k}{k!} x^k\right)\left(\sum_{l=0}^{+\infty} \frac{(-1)^l u^{2l}}{2^l\, l!}\right)$

$= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\underbrace{\sum_{k+2l=n} (-1)^l \frac{x^k}{k!\, 2^l\, l!}}_{H_n(x)} \right) u^n \qquad \deg H_n = n$

Méthode 1 :

$$\left(e^{ux-\frac{u^2}{2}}\right)'_u = (x-u)\, e^{ux-\frac{u^2}{2}}$$

On développe → identification

devant $\frac{u^n}{n!}$: $H_{n+1} = xH_n - nH_{n-1}$

Méthode 2 : $e^{ux-\frac{u^2}{2}} = e^{-\frac{(x-u)^2}{2}} e^{\frac{x^2}{2}} = f$

$$\frac{H_n(x)}{n!} = \frac{1}{n!}\frac{d^n f}{du^n}(0) = e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right) \times (-1)^n$$

(... à vérifier)

$H'_{n+1} = (n+1)H_n$ d) $\langle S, \cdot \rangle_\omega = \delta_0$ (évaluation en 0)

f) $f : e^{ux-\frac{u^2}{2}} = e^{ux} \cdot e^{-\frac{u^2}{2}}$

$$\frac{\partial f}{\partial u} = (x-u)\, e^{ux-\frac{u^2}{2}}$$

$$\sum H_{n+1}(x)\frac{u^n}{n!} = (x-u)\sum H_n(x)\frac{u^n}{n!}$$

$$= \sum x H_n(x)\frac{u^n}{n!} - \sum H_n(x)\frac{u^{n+1}}{n!}$$

$$\sum \left(H_n(x)\,x - H_{n+1}(x)\right)\frac{u^n}{n!} = \sum H_n(x)\frac{u^{n+1}}{n!}$$

$$x H_0(x) - H_1(x) = 0$$

$n \geqslant 1$, $\quad x H_n(x) - H_{n+1}(x) = n H_{n-1}(x)$

$$H_{n+1}(x) = x H_n(x) - n H_{n-1}(x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = u\, e^{ux-\frac{u^2}{2}}$$

$$\sum H_n'(x)\frac{u^n}{n!} = \sum H_n(x)\frac{u^{n+1}}{n!}$$

$n \geqslant 1$, $\quad H_n'(x) = n H_{n-1}(x)$

$$\begin{cases} H_{n+1}'(x) = H_n(x) + x H_n'(x) - n H_{n-1}'(x) \\ H_n''(x) = n H_{n-1}'(x) \end{cases}$$

$$(n+1) H_n(x) = H_n(x) + x H_n'(x) - H_n''(x)$$

$$\Rightarrow H_n'' - x H_n' + n H_n = 0$$

g) $$\phi_n' = e^{-\frac{x^2}{4}} H_n'(x) - \frac{x}{2} e^{-\frac{x^2}{4}} H_n(x)$$

$$\phi_n'' = e^{-\frac{x^2}{4}} H_n''(x) - \frac{x}{2} e^{-\frac{x^2}{4}} H_n'(x) - \frac{1}{2} e^{-\frac{x^2}{4}} H_n(x) + \frac{x^2}{4} e^{-\frac{x^2}{4}} H_n(x) - \frac{x}{2} e^{-\frac{x^2}{4}} H_n'(x)$$

$$\phi_n'' - \frac{x^2}{4}\phi_n + (n+\frac{1}{2})\phi_n$$
$$= e^{-\frac{x^2}{4}} \left(H_n''(x) - x H_n'(x) + \left(\frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}\right) H_n(x) - \frac{x^2}{4} H_n(x) + (n+\frac{1}{2}) H_n(x) \right)$$
$$= e^{-\frac{x^2}{4}} \left(H_n''(x) - x H_n'(x) + n H_n(x) \right)$$
$$= 0$$

h)

$$E\varphi = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\varphi + V\varphi$$

$$\left(E - \frac{1}{2} m\omega_0^2 x^2\right)\varphi = -\frac{\hbar^2}{2m}\varphi''$$

On pose $\varphi_n(x) = \phi_n(\alpha x)$, $\varphi_n'(x) = \phi_n'(\alpha x)\alpha$,

$$\varphi_n''(x) = \phi_n''(\alpha x)\alpha^2 = \alpha^2\left(\frac{x^2}{4} - (n+\frac{1}{2})\right)\phi_n(\alpha x)$$

$$\left(E - \frac{1}{2} m\omega_0^2 x^2\right)\phi_n(\alpha x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\alpha^2\left(\frac{x^2}{4} - (n+\frac{1}{2})\right)\phi_n(\alpha x)$$

$$E = \frac{1}{2} m\omega_0^2 x^2 - \frac{\hbar^2\alpha^2}{8m} x^2 + (n+\frac{1}{2})\alpha^2\frac{\hbar^2}{2m}$$

E est fixé, $\frac{1}{2} m\omega_0^2 = \frac{\hbar^2\alpha^2}{8m} \Rightarrow \alpha = \frac{2m\omega_0}{\hbar}$

$$E = (n+\frac{1}{2}) \cdot \frac{4m^2\omega_0^2}{\hbar^2} \cdot \frac{\hbar^2}{2m} =$$

φ_n admet exactement n racines distinctes.
Un état stationnaire ne peut pas exister entre deux états stationnaires dont les nombres de zéros sont consécutifs.