TD: Fonctions convexes

1.

$-f$ est une fonction convexe.

$\forall a, b, c \in \mathbb{R}^+, \quad a < b < c < d$

$$\frac{-f(b)+f(a)}{b-a} \leq \frac{-f(c)+f(b)}{c-b} \leq \frac{-f(d)+f(c)}{d-c}$$

Soient, $x, y \in \mathbb{R}^+$. W.L.O.G. $y \geq x \neq 0$

$$\frac{-f(x+y)+f(y)}{(x+y)-y} \geq \frac{-f(x)+f(0)}{x-0}$$

$$-f(x+y)+f(y) \geq -f(x)$$

$$f(x+y) \leq f(x)+f(y)$$

$f(x) = f\left(\left(1-\frac{x}{x+y}\right)\times 0 + \frac{x}{x+y}(x+y)\right)$

$\underset{\text{concavité}}{\geq} \frac{x}{x+y} f(x+y)$

De même, $f(y) \geq \frac{y}{x+y} f(x+y)$

$f(x)+f(y) \geq f(x+y)$

2. f' est croissante

$\rightarrow$ Si f' est majorée par M finie.

Soit $\varepsilon > 0$, il existe $A > 0$ t.q. $\forall x \geq A$,

$M - \varepsilon \leq f'(x) \leq M$

$$f(A) + (x-A)(M-\varepsilon) \leq f(x) \leq f(A) + (x-A)M$$

$$(M-\varepsilon) + \frac{f(A) - A(M-\varepsilon)}{x} \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{f(A)-AM}{x} + M$$

Donc $\frac{f(x)}{x} \longrightarrow M$.

$\rightarrow$ Si f' n'est pas majorée

Soit $M > 0$, il existe $A > 0$ t.q. $\forall x \geq A$, $f'(x) \geq M$

$$f(x) \geq f(A) + M(x-A)$$

$$\frac{f(x)}{x} \geq \frac{f(A)-MA}{x} + M$$

D'où $\frac{f(x)}{x} \geq M$ quand $x \to +\infty$

$$\lim \frac{f(x)}{x} \xrightarrow[+\infty]{} +\infty .$$

Contre-exemple

$f(x) = -\sqrt{x}$ $\quad \begin{cases} f'(x) \to 0 = l \\ f(x) - lx \to -\infty \end{cases}$

3. a) ($\Rightarrow$) Soit f convexe

Soit $\mu \in \mathbb{R}$.

$\forall (x,y) \in I^2, \ \forall \lambda \in [0,1]$

$$\begin{aligned}(f+\mu Id)(\lambda x + (1-\lambda)y) &= f(\lambda x + (1-\lambda)y) + \mu(\lambda x + (1-\lambda)y) \\ &\leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) + \lambda \mu x + (1-\lambda)\mu y \\ &= \lambda (f+\mu Id)(x) + (1-\lambda)(f+\mu Id) y\end{aligned}$$

Donc, $f+\mu Id$ est convexe.

$x = \lambda a + (1-\lambda) b$

donc

$$\begin{aligned}(f+\mu Id)(x) &\leq \lambda (f+\mu Id)(a) + (1-\lambda)(f+\mu Id)(b) \\ &\leq \max\big((f+\mu Id)(a), (f+\mu Id)(b)\big),\end{aligned}$$

Soit $[a,b] \subset I$.

Par l'absurde, supposons qu'il existe $c \in]a,b[$ t.q. $f+\mu Id$ atteint son maximum en c (strictement), ie

$$(f+\mu Id)(c) > (f+\mu Id)(a)$$
$$(f+\mu Id)(c) > (f+\mu Id)(b)$$

Mais, il existe $\lambda \in]0,1[$ t.q. $c = \lambda a + (1-\lambda) b$

$$(f+\mu Id)(c) \leq \lambda (f+\mu Id)(a) + (1-\lambda)(f+\mu Id)(b)$$
$$< (f+\mu Id)(c) \quad ⚡$$

D'où, $f+\mu Id$ atteint son maximum en a ou en b.

P_μ est vraie pour tout μ réel.

($\Leftarrow$) Pour tout μ réel, P_μ est vérifié

Par l'absurde, supposons que f ne soit pas convexe

$a<b$ $\quad \exists\ a, b \in I \quad \exists \lambda \in [0,1]$ t.q.

$$f(\lambda a + (1-\lambda) b) > \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)$$

$\lambda \neq 0, 1$.

Vérifions P_μ avec $\mu = -\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$$(f+\mu Id)(b) = f(b) - \frac{(f(b)-f(a))b}{b-a} = \frac{bf(a)-af(b)}{b-a}$$

$$(f+\mu Id)(a) = f(a) - \frac{(f(b)-f(a))a}{b-a} = \frac{bf(a)-af(b)}{b-a}$$

$$(f+\mu Id)(\lambda a + (1-\lambda) b) > \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b) + \lambda \mu a + (1-\lambda)\mu b$$
$$= (f+\mu Id)(b) = (f+\mu Id)(a)$$

$f+\mu Id$ n'atteint pas son maximum en a ou en b.

D'où, contradiction.

f est convexe

4. f' est continue.

f' est croissante.

S'il existe x_0 t.q. $f'(x_0) > 0$

$$\forall x \geq x_0 \quad f(x) \geq f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)(x-x_0)}_{\xrightarrow[+\infty]{} +\infty} \quad ↯$$

D'où, $f' \leq 0$.

Soit $M = \sup f'$.

Si $M < 0$

$$\forall x \geq 0, \quad f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\,dt$$
$$\leq f(0) + \underbrace{xM}_{\xrightarrow[+\infty]{} -\infty} \quad ↯$$

Donc, $M = 0$

$$f' \uparrow, \quad f' \xrightarrow[+\infty]{} 0.$$

$$-f' \geq 0, \quad -f' \downarrow$$

$\int_0^{+\infty} -f'$ CV car $\int_0^{+\infty} f'$ CV, f CV

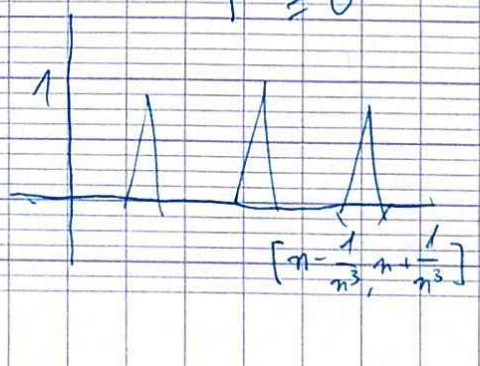
$$0 \geq x f'(2x) \geq \int_x^{2x} f' \geq -\varepsilon$$

↑ critère de Cauchy

Donc, $x f'(x) \to 0$

$f''(x)$: On ne peut rien dire du comportement.

$f'' \geq 0$ $\quad \int_0^x f'' \leq \int_0^{\lfloor x \rfloor + 1} f'' \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2k^3}$



5\. a) Soit $(\varphi_a)_{a\in I}$ intérieur, une famille de fonctions affines définies par :

$$\varphi_a : x \longmapsto f(a) + f_g'(a)(x-a)$$

à l'extrémité, par exemple pour $[a,b]$, f passède une dérivée à gauche en b :

Posons $\varphi_b = f(b) + f_g'(b)(x-b)$

$f_g'(a)$ existe car f est convexe.

Si $x = a$, $\varphi_a(x) = f(a)$

$x < a$, $\varphi_a(x) = f(a) + f_g'(a)(x-a) \leq f(x)$

car $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq f_g'(a)$

$x > a$, $\varphi_a(x) = f(a) + f_g'(a)(x-a) \leq f(x)$

car $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq f_g'(a)$

2ème cas : $(b=1)$

$\dfrac{f(1)-f(x)}{1-x} \to +\infty$

$\exists\, c < f(1)$, $\forall x$,

$\varphi_x(1) = f(x) + f_d'(x)(1-x) \leq c$

$f_d'(x)(1-x) \leq c - f(x) \leq -\delta$

$\delta > 0$, $f(x) \underset{x\to 1}{\sim} f(1)$

$f_d'(x) \leq \dfrac{-\delta}{1-x}$

$f_d'(x) \to -\infty$ NON!

Finaliser :

$\exists x \in]0,1]$

$\varphi_x(1) \geq c$

$g(1) \geq f(1)$

$g = \sup \varphi_x$

$\cancel{x \in]0,1]}$

$x \in]0,1[$

D'où, $\varphi_a \leq f$.

$\sup_{a\in I} \varphi_a \leq f$.

De plus, pour tout $x \in I$,

$$f(x) = \varphi_x(x) \leq \sup_{a\in I} \varphi_a(x)$$

$$f \leq \sup_{a\in I} \varphi_a$$

Donc,

$$f = \sup_{a\in I} \varphi_a$$

b) Soient $x, y \in \mathbb{R}$, $\lambda \in [0,1]$

$f^*(\lambda x + (1-\lambda)y)$

$\forall t \in \mathbb{R}$,

$$(\lambda x + (1-\lambda)y)t - f(t)$$
$$= \lambda x t - \lambda f(t) + (1-\lambda)(yt - f(t))$$
$$\leq \lambda f^*(x) + (1-\lambda) f^*(y)$$

Par ex:
$f^*(x) = +\infty$
$f^*(y)$ quelconque
$\forall \lambda \in]0,1[$
$(1-\lambda) f^*(x) + \lambda f^*(y) = +\infty$

Donc, $f^*(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda f^*(x) + (1-\lambda) f^*(y)$

Soit f affine

$$f : t \mapsto \alpha t + \beta$$

$$f^*(x) = \sup_{t \in \mathbb{R}} (xt - \alpha t - \beta)$$

$$= \sup_{t \in \mathbb{R}} ((x-\alpha)t - \beta)$$

$$\begin{cases} \text{Si } x \neq \alpha, & f^*(x) = +\infty \\ \text{Si } x = \alpha, & f^*(\alpha) = -\beta \end{cases}$$

$$f^{**}(x) = \sup_{t \in \mathbb{R}} (xt - f^*(t))$$

Soit $x \in \mathbb{R}$
Soit $t \in \mathbb{R} \setminus \{\alpha\}$

$$xt - f^*(t) = xt - (+\infty) = -\infty$$

$t = \alpha$ $\quad x\alpha - f^*(\alpha) = x\alpha + \beta$

d'où, $f^{**}(x) = x\alpha + \beta$

$$f^{**} = f.$$

l'indication convexe

c) On étudie $t \overset{\psi_x}{\mapsto} xt - f(t)$

$\psi_x'(t) = x - f'(t)$ $\searrow$ car $f' \nearrow$

premier cas: $\exists t_0 \in \mathbb{R}, \quad x = f'(t_0)$

		t_0	
ψ'	$+$	0	$-$
ψ	$\nearrow$		$\searrow$

$$\max \psi = \psi(t_0)$$
$$= x f'^{-1}(x) - f(f'^{-1}(x))$$

deuxième cas: $J = f'(\mathbb{R})$ est ouvert, $x > \underbrace{\sup J}_{\mu}$

$\psi'(t) = x - f'(t) \geq \alpha > 0$

$xt - f(t) \to +\infty$, $f^*(x) = +\infty$

$x = \sup J$

$\sup \psi \to CV \int^{+\infty} (x - f'(t))\, dt$

4. (continue)

On prend $f'(x) = -\int_x^{+\infty} f''$

$$|f'(x)| \leq \int_x^{+\infty} |f''| \leq \int_{\underbrace{\lfloor x \rfloor - 1}_{N}}^{+\infty} |f''|$$

$$\leq \sum_{k=N}^{+\infty} \frac{1}{2k^3} \leq \frac{1}{2} \int_{N-1}^{+\infty} \frac{dt}{t^3} \leq \frac{1}{4(N-1)^2} \longrightarrow 0$$

De là, $|f'(x)| = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$

5. d) $\rightarrow$ Pour tout $\begin{cases} t \in \mathbb{R} \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$

$$f^*(x) + f(t) \geq xt$$

$$f(t) \geq xt - f^*(x) \xrightarrow[\text{sup en } x]{} f(t) \geq f^{**}(t)$$

$$f \geq f^{**}$$

f $\mathcal{C}^0$

$f = \sup \varphi$

φ affine $\leq f$

$\rightarrow$ f est $\mathcal{C}^0$ et φ affine $\leq f$ il vient :

$$f \geq \varphi \Rightarrow f^* \leq \varphi^* \Rightarrow f^{**} \geq \varphi^{**} = \varphi$$

$$xt - f(t) \leq xt - \varphi(t)$$

On passe au sup : $f^{**} \geq f$

Donc, $f = f^{**}$.

2. f $\mathcal{C}^0$, $\dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \dfrac{f(x)}{x} - \underbrace{\dfrac{f(0)}{x}}_{\to 0}$ croît $\begin{cases} +\infty \\ L \text{ fini} \end{cases}$

f $\mathcal{C}^1$, $f'(x) \nearrow \begin{cases} f'(x) \to +\infty \\ f'(x) \to l \end{cases}$ A fixe t.q. $f'(x) \geq 1$ pour $x \geq A$

$f(x) - f(A) \geq x - A$

$f(x) - lx$ est aussi convexe.

$$\left| \frac{f(x)-f(0)}{x} - l \right| = \left| \frac{1}{x} \int_0^x (f'(t)-l)\,dt \right| \leq \frac{1}{x} \int_0^A |f'-l|\,dt$$

$$+ \frac{1}{x}\int_A^x \varepsilon\,dt \leq \underbrace{\frac{1}{x}\int_0^A |f'-l|}_{\to 0} + \varepsilon \leq 2\varepsilon$$

$$x > B, A : \quad \frac{1}{x}\int_0^A |f'-l| < \varepsilon$$

3. b) $(\Rightarrow)$ $t \in [0,h]$

$$f(x) \leq \frac{1}{2}\left[f(x-t) + f(x+t)\right]$$

$$\int_0^h f(x)\,dt \leq \frac{1}{2}\left[\int_0^h \left(f(x-t)+f(x+t)\right)dt\right]$$

$$h f(x) \leq \frac{1}{2} \int_{x-h}^{x+h} f(t)\,dt$$

$(\Leftarrow)$ On suppose : f non convexe.

Obs : Si f vérifie l'inégalité intégrale. $f(x) + \mu x + (\gamma)$ aussi vérifie l'inégalité

On se ramène à $f(a) = f(b) = 0$

et comme avant, $\exists\, c \in]a,b[$, $f(c) > 0$

$\begin{cases} M = \max\limits_{[a,b]} f \\ M > 0 \end{cases}$ $A = \{x \in [a,b] \mid f(x) = M\}$

$x_0 = \sup A$, $x_0 \in A$ par $\mathcal{C}^0$ de f

$(x_0 = \lim a_n,\ a_n \in A)$

$$\begin{cases} f(x_0) - \dfrac{1}{2h}\displaystyle\int_{x-h}^{x+h} f(t)\,dt = \dfrac{1}{2h}\displaystyle\int_{x-h}^{x+h} \underbrace{(f(x_0)-f(t))}_{\geq 0}\,dt > 0 \\ h < b - x_0 \end{cases}$$

> 0 si $t \in]0,h]$ NON