4 Densité

(2.5) Soit x un nombre irrationnel strictement positif. Montrer que la suite $nx - [nx]$, $n \in \mathbf{N}$, est dense dans $[0, 1]$.

Solution. On suppose sans nuire à la généralité que $x > 1$. Soit $]a, b[$ un intervalle ouvert de $[0, 1]$. La densité de $\mathbf{Z}+x\mathbf{Z}$ fournit un nombre $y = nx+m$, $(n, m) \in \mathbf{Z}^2$, dans $]a, b[$. Soit $\eta = \min(y - a, b - y)$ et N un nombre entier strictement supérieur à $> |n|$. Pour la même raison, il existe un nombre de la forme $z = px + q$, p, q dans $\mathbf{Z}$ tel que $|z| < \eta/N$. Quitte à changer z en $-z$, on peut imposer : $p > 0$. Alors $w = nx + m + Nz$ appartient à $]a, b[$, et il est de la forme $kx + l$ avec $k > 0$. Enfin kx est compris strictement entre $-l$ et $-l + 1$, donc $-l = [\underset{k}{\cancel{n}}x]$.

5 normes strictes

Lemme : soit : $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction convexe k-lipschitzienne. S'il existe des nombres réels $a < b$ tels que $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = k$, la fonction f est affine sur $[a, +\infty[$. .

Démonstration. On note Δ la droite du plan $\mathbf{R}^2$ passant par les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$. Soit $x \in]a, b[$. Si le point $(x, f(x))$ est strictement en dessous de Δ, le lemme des trois pentes montre que $\frac{f(b)-f(x)}{b-x} > k$, ce qui et exclu. donc f est affine sur $[a, b]$. De la même façon, si $x > b$ et si $(x, f(x)$ est strictement au dessus de Δ, $\frac{f(x)-f(b)}{x-b} > k$ contradiction.

Soit N une norme sur l'espace vectoriel réel E, et supposons que

$$N(x + y) = N(x) + N(y)$$

pour un couple (x, y) de vecteurs linéairement indépendants. Quitte à multiplier par un scalaire strictement positif et à permuter les vecteurs, nous pouvons supposer que $N(x) = 1$, $N(y) \geq 1$. Posons $y' = \frac{y}{N(y)}$, ce qui qui fait que (x, y') est libre, et soit f la fonction numérique définie pour $t \geq 0$ par $f(t) = N(x + ty')$. f est visiblement lipschitzienne de rapport 1, et $\frac{f(N(y))-f(0)}{N(y)-0} = 1$. Donc f est affine :

$$\forall t \in \mathbf{R}^+, N(x + ty') = f(t) = 1 + tN(y') = 1 + t.$$

Soit $\lambda \in]0, 1[$, il vient $N(\lambda x + (1 - \lambda)y') = \lambda N(x + \frac{1-\lambda}{\lambda}y') = \lambda(1 + \frac{1-\lambda}{\lambda}) = 1$ donc la sphère unité contient le segment $[x, y']$.

TD : Topologie

1.1. Soit E un ensemble fini, notons $|E| = n$

$E = \{a_1, \dots, a_n\}$

$\{\{a_1\}, \dots, \{a_n\}, \phi\} \subset P(E)$

$|P(E)| \geq n+1$

D'où, $|E| < |P(E)|$

?

1.1.1.

$$P_F(\mathbb{N}) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\mathcal{P}([\![0,n]\!])}_{\text{dénombrable, même fini pour } n \text{ fixé}}$$

donc, $P_F(\mathbb{N})$ dénombrable

1.1.2.

$$\mathbb{Q}[X] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\mathbb{Q}_n[X]}_{\mathbb{Q}^{n+1}} \text{ tous dénombrables}$$

Soit $f \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$. Soit $\varepsilon > 0$

Weierstrass — Il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ t.q. $\|f - P\|_\infty \leq \varepsilon$

$P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$, r_k, $|r_k - a_k| < \frac{\varepsilon}{d+1}$, $Q(x) = \sum_{k=0}^{d} r_k x^k$

$\Rightarrow \forall x \in [0,1] \quad |P(x) - Q(x)| \leq \varepsilon$

$\Rightarrow \quad \|f - Q\|_\infty \leq 2\varepsilon$

$\|f - Q\|_\infty \leq \|f - P\|_\infty + \|P - Q\|_\infty \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$

1.1.3

$\sigma \in S(\mathbb{N})$

$\sigma \quad [\![$

$\sum \frac{\varepsilon_n}{2^n}$

~~$\sigma(2n) > \max(a_{1,1}, \dots, a_{2n,2m})$~~

~~$\sigma(2n+2) > \sigma(2n) + 2$~~

~~$\overbrace{\{\mathbb{N} \mid \{\sigma(2n)\}\}}^{A}$ est infini~~

~~bijective $\{1, 3, 5, \dots\} \to A$~~

Mq : $S(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable

Soit $A = \{\sigma \in S(\mathbb{N}),\ \forall k \in \mathbb{N},\ \sigma(2k), \sigma(2k+1) \in \{2k, 2k+1\}\}$

$\{\sigma \mid \sigma(2n) \in \{2n, 2n+1\}\}$

Soit $f : A \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$

$\sigma \mapsto (x_n)$

si $\sigma(2n) = 2n$, $x_n = 1$, si $\sigma(2n) = 2n+1$, $x_n = 0$

f est bijective, par contre, $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ n'est pas dénombrable

2.1 Soient U, V ouverts de E (e.v.n) t.q. $U \cap V = \phi$

MQ : $\mathring{\overline{U}} \cap \mathring{\overline{V}} = \phi$

On suppose que : $\mathring{\overline{U}} \cap \mathring{\overline{V}} \neq \phi$, il existe $x \in \mathring{\overline{U}} \cap \mathring{\overline{V}}$

donc $x \in \mathring{\overline{U}}$ et $x \in \mathring{\overline{V}}$, $\exists \varepsilon_U > 0$, $B(x, \varepsilon_U) \subset \overline{U}$

$\exists \varepsilon_V > 0$, $B(x, \varepsilon_V) \subset \overline{V}$, on prend $\varepsilon = \min(\varepsilon_U, \varepsilon_V)$

donc $B(x, \varepsilon) \subset \overline{U} \cap \overline{V}$

$B(x, \varepsilon) \cap U \neq \phi$ $\qquad$ $y \in B(x, \varepsilon) \cap U$ ouvert

$B(x, \varepsilon) \cap V \neq \phi$ $\qquad$ $\exists \rho > 0$ $B(y, \rho) \subset B(x, \varepsilon) \cap U$

mais $y \in \overline{V}$ donc $\underbrace{B(y, \rho)}_{\subset U} \cap V \neq \phi$

Donc, $U \cap V \neq \phi$ NON !

2.2

On regarde $G = \mathbb{Z} \ln 2 + \mathbb{Z} \ln 3$ est dense

$G \neq a\mathbb{Z}$ (sinon, $\frac{\ln 3}{\ln 2} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, ...)

$\log 3 = \alpha$
$\log 2 = \beta$

De là, $\{2^m 3^n \mid (m, n) \in \mathbb{Z}^2\}$ est dense.

Pour $\{2^n \cdot 3^{-m} \mid (n, m) \in \mathbb{N}^2\}$

Il suffit de mq $\mathbb{N}\alpha - \mathbb{N}\beta$ est dense dans $\mathbb{R}$

Soit $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \ll \alpha, \beta$

$N \geq 1$

Soit $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$ $\quad 0 < n\beta + m\alpha < \varepsilon / N$

Alors, n et m sont de signe opposés ($\varepsilon \ll \min(\alpha, \beta)$)

par ex, $n > 0$, $m < 0$.

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, on place $a < \overset{\in \mathbb{Z}}{p\alpha + q\beta} < b$

On choisit $N > |p|$, alors $a - \varepsilon < \underbrace{(p\alpha + q\beta) + N(n\alpha + m\beta)}_{p + nN \text{ positif}} < b + \varepsilon$

ETC. $\qquad N > |q|$

$u \in Adh(E)$

2.2 <u>Mq:</u> $Adh(E) = \{(u_n) \mid u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\}$

- Si $u_n \not\to 0$ il existe $\varepsilon_0 > 0$ $\varphi \uparrow$, $u \uparrow$ t.q. $|u_{\varphi(n)}| > \varepsilon_0$

$\forall v$ t.q. $\|u - v\| < \frac{\varepsilon_0}{2}$ $|v_{\varphi(n)} - u_{\varphi(n)}| < \frac{\varepsilon_0}{2}$

soit $|v_{\varphi(n)}| > \frac{\varepsilon_0}{2}$ $v \not\to 0$!

Donc, $v \notin E$ $v \notin \bar{E}$

- Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ Posons $(V^n) \in E^{\mathbb{N}}$ t.q.

$$\begin{cases} V_n^m = u_n & \text{si } n \leq m \\ \quad = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- $\|v^m - u\|_\infty = \sup_{n \geq m} |u_n| \xrightarrow[m\to+\infty]{} 0$

- $V \in E$ D'où, le résultat.

2.3 <u>Mq:</u> L'ensemble des points qui ne sont pas d'accumulation est ouvert.

- Soit x un tel point.

Il existe $\varepsilon > 0$ t.q. $B(x, \varepsilon) \cap A$ est fini

Posons $\varepsilon' = \frac{1}{2} \left(\inf_{a \in B(x,\varepsilon) \cap A} d(x, a) \right)$

Si $\varepsilon' > 0$ $B(x, \varepsilon')$ ouvert contenant x uniquement

Sinon $\varepsilon' = 0$, il existe un unique i t.q. $x = a_i$

Avec $\varepsilon'' = \frac{1}{2} \inf_{\substack{j \neq i \\ (i,j) \in [\![1,n]\!]^2}} d(a_i, a_j)$ $B(x, \varepsilon'')$ ouvert contenant x uniquement

---

- Soit $x \in X$ qui n'est pas d'accumulation.

Il existe $\varepsilon > 0$ t.q. $(B(x,\varepsilon) \setminus \{x\}) \cap A = \emptyset$

Soit $y \in B(x,\varepsilon) \setminus \{x\}$. Soit $\eta = \min(d(y,x), \varepsilon - d(y,x))$

$B(y,\eta) \subset B(x,\varepsilon) \setminus \{x\}$, d'où, $B(y,\eta) \cap A = \emptyset$

y n'est pas d'accumulation.

D'où, $B(x,\varepsilon) \subset \{ x \in X,\ x \text{ n'est pas d'accumulation} \}$

2.4 $A_g = \{ a \in \bar{A} \mid a$ est adhérent à gauche à $A \}$

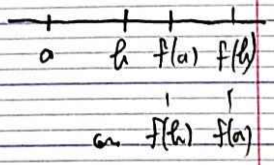
$f : \begin{cases} A_g \to \mathbb{R} \\ a \mapsto x_a \in \mathbb{R} \text{ t.q. }]a, x_a[\cap A = \emptyset . \end{cases}$

Soit $\varphi : \begin{cases} A_g \to \mathbb{Q} \\ a \mapsto r_a \in]a, f(a)[\end{cases}$

$b > a$

Mq: φ est injective. Soit $(a,b) \in A_g^2$ t.q. $\varphi(a) = \varphi(b)$

Par l'absurde, supposons que $a < b$, $]b, \varphi(b)[\cap A = \emptyset$



$b \in \bar{A} \Rightarrow \exists x \in]a, b[\cap A$

$\Rightarrow \exists x \in]a, f(a)[\cap A = \emptyset$ NON !

D'où, $a = b$, φ est injective

A_g est dénombrable. (ou fini)

* Soit $A \subset \mathbb{R}$ ne contenant aucune suite $\downarrow\downarrow$.

Mq: $A \subset A_g$

Soit $a \in A$, Par contraposée, si $a \notin A_g$, alors

$\forall b > a,]a, b[\cap A \neq \emptyset$

$a_1 \in]a, a+1[\cap A \neq \emptyset \quad \dots \quad a_{n+1} \in]a, a_n[\cap A$

$a_2 \in]a, a_1[\cap A$

$\Rightarrow (a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ et $\downarrow\downarrow$ NON!, $a \in A_g$, $A \subset A_g$

Avec ce qui précède, A est dénombrable.

2.5. $\underline{N \geq 2}$: On divise $[0, 1[$ en $[\frac{i}{N}, \frac{i+1}{N}[$ $i \in [\![0, N-1]\!]$

$x > 0$

$x_k = kx - [kx]$ $k = 0 \cdots N$, il existe $k < l$

$x_l > x_k$

t.q. $x_k, x_l \in [\frac{i}{N}, \frac{i+1}{N}[$

$n_0 = l - k$

$(n_0 x - \lfloor n_0 x \rfloor) \in [0, \frac{1}{N}[$

par ex $x_k > x_l$ alors $|x_l - x_k| = |\underbrace{(l-k)}_{>0} x - \underbrace{(\lfloor lx \rfloor - \lfloor kx \rfloor)}_{>0}| < \frac{1}{N}$

$x_l - x_k = nx - m \in]-\frac{1}{N}, 0[$

$\Rightarrow nx - (m-1) \in]1 - \frac{1}{N}, 1[$ donc $m - 1 = [nx]$

$nx - [nx] = 1 - \varepsilon$ $\qquad 1 - \varepsilon < nx - m' < 1$

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ $\quad p(1-\varepsilon) < pnx - pm' < p$

p le plus petit possible pour que $1 < pnx - pm'$

$1 - \varepsilon < (p-1)nx - (p-1)m' < 1 < pnx - pm' < (1-\varepsilon) + 1$

fraction continue:

$0 < x - \frac{p_{2n}}{q_{2n}} < \frac{1}{q_{2n}}$

$0 < q_{2n}x - p_{2n} < 1$

$[q_{2n}x]$

$1 < pnx - pm < 2 \rightarrow [pnx] = pm + 1$

et alors $pnx - [pnx] \in]0, \varepsilon[$

$n'x - [n'x] \in]0, \varepsilon[$

enfin $qn'x - q[n'x] \in]l\varepsilon, (l+1)\varepsilon[$

forcément: $q[n'x] = [qn'x]$

3.2

On peut montrer que f uniformément continue sur $D(0,1)$.

Soit $r_n \to 1$, $\theta_n \to \theta$

$$|f(r_n e^{i\theta_n}) - f(e^{i\theta})| \leq |f(r_n e^{i\theta_n}) - f(r_n e^{i\theta})| + \underbrace{|f(r_n e^{i\theta}) - f(e^{i\theta})|}_{\to 0}$$

$$|r_n e^{i\theta_n} - r_n e^{i\theta}| = r_n \times 2 \sin\left(\frac{\theta_n - \theta}{2}\right) \to 0$$

$$\underset{\text{U.C.}}{\Longrightarrow} |f(r_n e^{i\theta_n}) - f(r_n e^{i\theta})| \to 0$$

Soit $U \in \mathcal{V}(z_0)$, $z_0 \in S^1$ t.q. $\forall z \in U \cap D(0,1)$
ouvert $= B(z_0, r)$ $\quad |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$

Obs Tout $z' \in S \cap U$ est limite de $z \in U \cap D(0,1)$

Bref, $z' \in S \cap U$ $\quad z' = \lim_{n \to +\infty} z_n$ $\quad z_n \in U \cap D(0,1)$

$$\Rightarrow f(z') \underset{\text{hyp}}{=} \lim f(z_n) \Rightarrow |f(z') - f(z_0)| \leq \varepsilon$$

3.3. $f(x) < g(x)$

$g \nearrow$ Soit $x \in \mathbb{R}^+$ et $\varepsilon > 0$.

$*$ $f(x) \neq g(x)$: par f est $\mathcal{C}^0$ en x, g constante au voisinage de x donc continue.

$*$ $f(x) = g(x)$: $\exists \eta > 0$ $\forall t \in]x-\eta, x+\eta[$, $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$

à gauche $\forall t \in]x-\eta, x[$ $\quad |f(t) - f(x)| < \varepsilon$

$g(x) - f(t) < \varepsilon$ $\qquad g(x) < \varepsilon + f(t) \leq \varepsilon + g(t)$

$$|\underbrace{g(x) - g(t)}_{\geq 0}| < \varepsilon$$

à droite, $\forall t \in [x, x+\eta[\quad |f(t)-f(x)| < \varepsilon$

$$f(t) < \varepsilon + g(x)$$

Donc, $\sup\limits_{t \in [x, x+\eta[} f(t) \leq \varepsilon + g(x)$

Or $g(x+\eta) = \max\left(g(x), \sup\limits_{t \in [x, x+\eta]} f(t)\right)$

Donc, $g(x+\eta) \leq g(x) + \varepsilon$, ie $|\underbrace{g(x+\eta) - g(x)}_{\geq 0}| \leq \varepsilon$

3.4

$$g_\varepsilon(x) = f(x) + \varepsilon |x - a|$$

$g_\varepsilon(x) \underset{\substack{x \to +\infty \\ \text{ou} \\ x \to -\infty}}{\longrightarrow} +\infty$ car f est minorée

g_ε atteint son min.

<u>a=0</u> : $f(x_0) + \varepsilon |x_0| \leq f(x) + \varepsilon |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$f(x_0) - f(x) \leq \varepsilon(|x| - |x_0|) \leq \varepsilon |x - x_0|$$

surjectivité : $\lim\limits_{+\infty} f \neq \lim\limits_{-\infty} f$

3.5 <u>En $+\infty$</u>, Soit $A > 0$, $f^{-1}([-A, A])$ est borné,

pour $x > x_0 > 0$, $|f(x)| > A$

Si $x, y > x_0$ et $f(x) > A$ et $f(y) < -A$ alors par TVI, f s'annule entre x et y <u>absurde</u>

<u>A=1</u> $x_0 > 0$ t.q. pour $x \geq x_0$ $|f(x)| > 1$

On suppose $\forall x > x_0$, $f(x) > 1$

Si $A > 0$, il existe $x_A > x_0$ t.q. pour $x > x_1$

$|\underbrace{f(x)}_{> 0}| \geq A$, donc $f \underset{+\infty}{\longrightarrow} +\infty$

3.8 Soit $A = \{x \in \mathbb{R} \mid f$ admet un maximum local strict en $x\}$

$x \in A \iff \exists \varepsilon > 0, \forall t \in]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\setminus \{x\}, f(t) < f(x)$

Soit $\varphi : A \longrightarrow \mathbb{Q}^2$

$x \longmapsto (r_x^-, r_x^+)$, $\forall t \in]r_x^-, r_x^+[\setminus \{x\}$, $f(t) < f(x)$.

φ est injective. $\varphi(x) = \varphi(y) \Rightarrow (r_x^-, r_x^+) = (r_y^-, r_y^+) = I$

$$\Rightarrow \sup_I f = f(x) = f(y)$$

$$\Rightarrow x = y$$

b) $A = \{x \mid \exists f(x^+), f(x^-)$ et $f(x^+) \neq f(x^-)\}$

On regarde, pour $r < s$ dans $\mathbb{Q}$

$B = \{x \in A \mid f(x^+) \leq r < s \leq f(x^-)\}$

Soit $x \in B$. On va mq : $\exists \varepsilon > 0$, $]x, x+\varepsilon[\cap B = \emptyset$

Prenons $\delta < \frac{s-r}{5}$, il existe $\varepsilon > 0$ t.q.

$\forall (u,v) \in]x, x+\varepsilon[$, $|f(u) - f(x^+)| < \delta$

$|f(u) - f(v)| \leq 2\delta = \frac{2}{5}(s-r)$ $\quad (*)$

$\begin{cases} |f(u^+) - f(u)| \leq 2\delta \\ |f(u^-) - f(u)| \leq 2\delta \end{cases}$ $\quad |f(u) - f(x^+)| \leq 4\delta$

Si $u \in B$ $]x, x+\varepsilon[\in \mathcal{V}(u)$ et $(*)$ donne :

$|f(u^-) - f(u^+)| \leq \frac{2}{5}(s-r) \times 2$

<u>Bref</u>: $\begin{cases} f(u^+) \leq r < s \leq f(u^-) \\ |f(u^+) - f(u^-)| \leq s - r \end{cases}$

4.1 Soit $f : t \mapsto e^t$

$P_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$, $P_n \xrightarrow{CVS} f$

$\| f - P_n \| \leq \| f - P_n \|_\infty \leq \sum_{k \geq n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}$

Si f est un polynôme de degré n, $f^{(n+1)}(x) = 0$ Non!

$\| \; \|_\infty$ soit $P \in E$, $\|P\|_\infty = 1$

$|f(P)| \leq \int_0^1 |v(t)| |P(t)| dt$

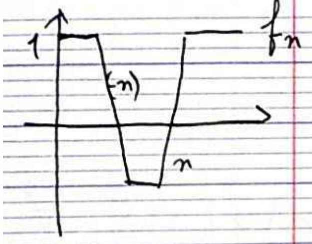
$\leq \int_0^1 |v(t)| dt \cdot \|P\|_\infty$

f est bornée sur $B(0,1)$

n polynôme

Soit $\varepsilon > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists P_n \in \mathbb{R}[X]$, $||| P_n - f_n |||_\infty < \varepsilon$

$\| P_n \| \leq 1$ $\begin{cases} \varphi(t) = 1 & \text{si } u(t) \geq 0 \\ \varphi(t) = -1 & \text{sinon} \end{cases}$



$$|f(P_n) - \int_0^1 u(t)\varphi(t)\,dt|$$

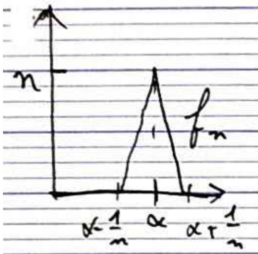
$$= |\int_0^1 u(t)\,(P_n(t) - \varphi(t))\,dt|$$

$$\leq \int_0^1 |u(t)|\,|P_n(t) - f_n(t)|\,dt \leq \varepsilon + \frac{N}{n} \longrightarrow 0$$

$$+ \int_0^1 |u(t)|\,|f_n(t) - \varphi(t)|\,dt$$

(cc) $\|P_n\| \leq 1$, $|f(P_n)| \to \int_0^1 |u|$ est la norme cherchée

$(E, \| \|)$. Soit $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$



$$|f(P) - f(Q)| = |\int_0^1 u(t)\,(P(t) - Q(t))\,dt|$$

$$\leq \|u\|_\infty \int_0^1 |P(t) - Q(t)|\,dt$$

$$|||f||| \leq \|u\|_\infty .$$

α réalise $\sup_{t \in [0,1]} |u(t)|$, sq : $u(\alpha) > 0$.

Soit $\varepsilon > 0$ fixé.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists P_n \in \mathbb{R}[X]$ t.q. $\|P_n - f_n\|_\infty \leq \varepsilon$

$\|P_n\| = 1$
Weierstrass

$$|f(P_n) - \|u\|_\infty| = |\int_0^1 u(t) P_n(t)\,dt - \|u\|_\infty|$$

$$= |\int_0^1 u(t)\,(P_n(t) - f_n(t))\,dt + \int_0^1 u(t) f_n(t)\,dt - \|u\|_\infty|$$

$$< \varepsilon \int_0^1 |u(t)|\,dt + |(\int_0^1 u(t) f_n(t)\,dt) - \|u\|_\infty|$$

$$= \varepsilon \int_0^1 |u(t)|\,dt + |\int_{\alpha - \frac{1}{n}}^{\alpha + \frac{1}{n}} u(t) f_n(t)\,dt - \|u\|_\infty|$$

$$\xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \qquad \longrightarrow 0$$

$|||\phi||| = 1$

4.2 Soit f, $0 \leq f \leq 1$. On écrit a priori

$\phi(f) = \alpha + i\beta$ objectif : MQ : $\beta = 0$

On fait varier f : $f \overset{t\in\mathbb{R}}{\longmapsto} f + it1_X$, il vient

par hyp : $|\varphi(f+it1_X)|^2 = |\alpha + i(\beta+t)|^2 \leq \|f + it1_X\|_\infty^2$

$\alpha^2 + (\beta+t)^2 \leq \|f\|_\infty^2 + t^2$ $= \left(\sup_{x\in X} \sqrt{f^2(x)+t^2}\right)^2$

$\forall t \in \mathbb{R}$, $2\beta t \leq \underbrace{\|f\|_\infty^2 - (\alpha^2+\beta^2)}_{\text{cste } /\!/ t} \Rightarrow \beta = 0$

On veut $\phi(f) \geq 0$ (?) $g = 2f - 1$ vérifie $-1_X \leq g \leq 1_X$

donc $\|g\|_\infty \leq 1$, donc (hyp) $|\phi(g)| \leq 1$

$0 \leq 2\phi(f) \leq 2$

ie $|2\phi(f) - 1| \leq 1 \Rightarrow \phi(f) \geq 0$

<u>Cas général</u> Soit $g \in \mathcal{C}(X,\mathbb{R})$, $g \neq 0$

Avec ce qui précède, $\phi\left(\underbrace{\frac{g + \|g\|_\infty 1_X}{2\|g\|_\infty}}_{0 \leq \quad \leq 1}\right) \in \mathbb{R}$ $\phi(g) \in \mathbb{R}$

Si, de plus, $g \geq 0$, $f = \frac{g}{\|g\|_\infty}$ est à valeurs dans $[0,1]$

donc $\phi(f) \geq 0$ et $\phi(g) \geq 0$

le 18/04/2019 X-ENS

4.3 a) $u(K) \subset K$, par récurrence, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $u^{\circ k}(K) \subset K$

K convexe, par combinaison de fonctions continues,

donc $v_n(K) \subset K$

u $\mathcal{C}^0 \Rightarrow v_n$ $\mathcal{C}^0 \Rightarrow \forall n$, $v_n(K)$ compact

Par linéarité, $v_n(K)$ convexe

b) Soit $x \in K$, $v_{np}(x) = \frac{1}{np} \sum_{m=0}^{p-1} \sum_{k=0}^{n-1} u^{nm+k}(x)$

$= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u^k \left(\underbrace{\frac{\sum_{m=0}^{p-1} u^{nm}(x)}{p}}_{\in K}\right) \in v_n(K)$

théorème des compacts emboîtés

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}^*, \; V_n = \bigcap_{k=0}^{n} v_k(K) \text{ compact} \\ V_n \supset \underbrace{v_{n!}(K)}_{\text{non vide}} \qquad V_n \text{ décroissante (pour } \subset) \end{cases}$$

$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} v_n(K)$ non vide.

$x \in V_n(K)$
$\Rightarrow \|u(x) - x\| \leq \dfrac{\text{diamètre}}{n}$

c) $y = V_n(x)$ $\quad u(y) - y = \dfrac{u^n(x) - x}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ car $u^n(K)$ bornée

$V = \{x \in K \mid u(x) = x\}$?

$\underline{(\subset)}$: si $x \in V = \bigcap V_n(K)$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in V_n(K)$ donc $u(x) - x \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

donc $u(x) = x$

$(\supset)$: $\forall n$, $u^n(x) = x$ donc $v_n(x) = x$

et $x \in \bigcap v_n(K)$

V est non vide, u a au moins un point fixe.

5.1

$$N(f) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|f(a_k)|}{2^k}$$

$\|f_1 + f_2\|$
$= \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-n} |(f_1+f_2)(a_n)|$
$\leq \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-n} |f_1(a_n)| + \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-n} |f_2(a_n)|$
$= \|f_1\| + \|f_2\|$

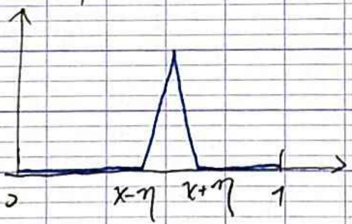
Séparation : IFIS que $(\forall f \in E)$ $(\forall n, f(a_n) = 0 \Rightarrow f = 0)$

Si $\{a_n\}$ est dense, c'est vrai (CS)

CN(?) Si $x \notin \overline{\{a_n\}}$ il existe $\eta > 0$ t.q. $]x-\eta, x+\eta[\subset [0,1]$

et $\forall n$, $a_n \notin]x-\eta, x+\eta[$ $\quad (x \neq 0, 1$ par ex$)$

f :



$\begin{cases} N(f) = 0 \\ f \neq 0 \end{cases}$ O.K.

$N(f) \leq 2 \|f\|_\infty$

On veut montrer que $\neg(\| \;\|_\infty \sim N(.))$

$k \leq \dfrac{N(f)}{\|f\|_\infty}$
$\downarrow$
non nul

Sinon, $\| \;\|_\infty \sim N$, soit $\varepsilon > 0$, f t.q.

(on veut trouver) $\|f\|_\infty = 1$, $\quad N(f) \leq \varepsilon$

N, $\displaystyle\sum_{N}^{+\infty} \frac{1}{2^n} < \varepsilon$

Or $[0,1] \setminus \{a_0, \dots, a_N\}$ ouvert donc il existe

$]a, b[\subset [0,1]$ t.q. $\forall n < N$, $a_n \notin]a, b[$,

f continue

Alors $N(f) = \displaystyle\sum_{N}^{+\infty} \frac{|f(a_n)|}{2^n} \leq \sum_{N}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \leq \varepsilon$

Donc, $\neg(\| \;\|_\infty \sim N)$

5.2 i) N vérifie la sous-additivité.

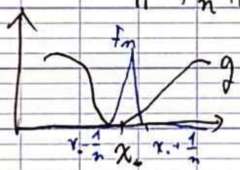
On veut $N(f) = 0 \iff f = 0$

S'il existe $I \subset [0,1]$ t.q. $g(I) = 0$, I non trivial.
Soit f t.q. $f = 0$ sur $[0,1] / I$ et $f \neq 0$ sur I
On a $\|fg\|_\infty = 0$ mais $f \neq 0$.
$\Rightarrow A = \{x \in [0,1],\ g(x) \neq 0\}$ dense
$N(f) = 0 \Rightarrow f = 0$ sur A
$\Rightarrow$ par $\mathcal{C}^0$, densité de A, $f = 0$ sur $[0,1]$

$\forall t \in [0,1]$
$\min|g| \times |f(t)| \leq |g(t) \times f(t)| \leq \|f \cdot g\|$

ii) Si g ne s'annule pas, on a : $\min|g| \times \|f\| \leq \|f \cdot g\| \leq \|g\| \times \|f\|$
Si g s'annule, on va mq l'on a pas d'équivalence

$\|f_n\|_\infty = 1$



$\|f_n g\|_\infty \leq \sup_{x \in [x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}]} |g(x)| \xrightarrow{\mathcal{C}^0} 0$

6.1 i) si A est compact, $f \in \mathcal{C}(A, \mathbb{R})$ est bornée
Si A non fermé, $\exists\ x_0 \in \bar{A} \setminus A$ $f : x \to \frac{1}{N(x - x_0)}$
Si A non borné, $f : x \to N(x)$

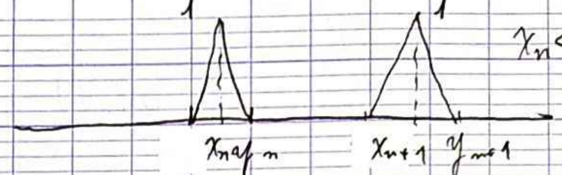
ii) Soit $A \subset \mathbb{R}^+$ t.q. : $\forall f \in \mathcal{C}(A, \mathbb{R})$, f UC
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si $f \in \mathcal{C}(A, \mathbb{R})$, f est bornée sur $A \cap [0,n]$ car UC, donc $A \cap [0,n]$ est compact
Soit $a \in \bar{A}$, on choisit $n > a$: $a \in \overline{A \cap [0,n]} = A \cap [0,n]$
① $a \in A$, A est donc fermé
② $\exists \rho > 0\ \exists M > 0\ \ \forall (x,y) \in A,\ \begin{cases} x \geq M \\ y \geq M \\ x \neq y \end{cases} \Rightarrow |x - y| \geq \rho$ (*)

CN Sinon, $\exists\ x_n \neq y_n$, $x_n \to +\infty$, $y_n \to +\infty$, $|x_n - y_n| \to 0$

$|x_n - y_n| \to 0$

$|f(y_n) - f(x_n)| = 1$

On prend f



$x_n < y_n < x_{n+1} < y_{n+1}$

$f_{|A}$ est continue mais pas UC.

(CC) A fermé + $(*)$ donne $(\forall f \in \mathcal{C}(A, \mathbb{R}))$ (f est UC)

Soit $\varepsilon > 0$

Soit M convenable, sur $[0, M] \cap A$ la fonction f est UC $\exists \eta_0 > 0 \quad \forall (x,y) \in ([0,M] \cap A)^2$

$$|x-y| \leq \eta_0 \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

On prend $\eta = \frac{1}{2} \min(\eta_0, \rho)$

Si $x \geq M$, $y \geq M$ $\quad |x-y| < \eta \Rightarrow x = y \Rightarrow f(x) - f(y) = 0$

6.2

a) P polynôme réel. $P(\mathbb{R}) = I$ intervalle

$I = \{a\}$ ou $I = \mathbb{R}$ ou $\begin{cases} I = [\lambda, +\infty[\\ I =]-\infty, \lambda] \end{cases}$ $\to P \xrightarrow[\pm\infty]{} +\infty$ min atteint

b) $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ étant connexe et P $\mathcal{C}^0$,

$P(\mathbb{R}^2) = I$ int.

Supposons P non constant, il existe x, $P(x, .)$ non constant, ou il existe y, $P(., y)$ non constante

SINON

$P(x, .)$ non cst $\Rightarrow$ $P(\mathbb{R}^2)$ non borné

⚠ $P(X,Y) = (XY - 1)^2 + Y^2$

$P(\mathbb{R}^2) =]0, +\infty[$

$P(X,Y) = 0 \Rightarrow X \neq 0$ et $Y = \frac{1}{X} \Rightarrow P(X, \frac{1}{X}) = \frac{1}{X^2}$ NON!

$I = \{a\}$ ou I non borné (peut être ouvert, fermé)

$|||u||| \leq 1$

6.6 $$u_n = \frac{Id + u + \dots + u^{n-1}}{n}$$

$\forall n \in \mathbb{N},\ |||u_n||| \leq 1$, $\left(|||u^k||| \leq |||u|||^k \leq 1 \right)$ (opérateur)

$\Rightarrow\ u_n \in \overline{B}_{|||\ |||}(0,1)$ compacte car $\mathcal{L}(E)$ de dim finie

$\Rightarrow (u_n)$ admet une valeur d'adhérence.

Soit $p \in Adh(u_n)$

$$p \circ u = (\lim \underbrace{u_{\varphi(n)} \circ u}_{u \circ u_{\varphi(n)}} = u \circ p$$

q VA

$u_{\varphi(n)} \to q$

m fixe : $p \circ u_{\varphi(m)} = u_{\varphi(m)} \circ p$

$m \to +\infty$, $p \circ q = q \circ p$

$$u \circ u_{\varphi(n)} - u_{\varphi(n)} = \frac{u^{\varphi(n)} - Id}{\varphi(n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

$$\Rightarrow u \circ p = p$$

$$u_{\varphi(n)} \circ p = p \Rightarrow p \circ p = p$$

Si $u(x) = x$, alors $p(x) = x \Rightarrow x \in Im\ p$

Si $y \in Im(p)$, $\exists x \in E$ t.q. $y = p(x)$, $u(y) = u(p(x)) = p(x) = y$

$Im(p) = \{x \mid u(x) = x\}$

FIN $\left.\begin{array}{l} Im\ q = Im(p) \\ p \circ q = q \circ p \end{array}\right\}$ mq : $p = q$ (?)

Si $x \in Ker\ p$ $q(p(x)) = 0 = p(q(x))$

$q(x) \in Ker\ p \cap Im\ p = \{0\} \Rightarrow q(x) = 0$

$Ker\ p = Ker\ q$ Ok.

Donc, (u_n) n'admet qu'une VA, dans $\overline{B}_{|||\ |||}(0,1)$, donc CV vers p.

7.1

Soit $x \in X$. On regarde $f : \begin{pmatrix} X \to \mathbb{R} \\ y \mapsto d(x,y) \end{pmatrix}$

f est $\mathcal{C}^0$, non constante car $|X| \geq 2$, $f(X)$ est un convexe de $\mathbb{R}$ donc un intervalle

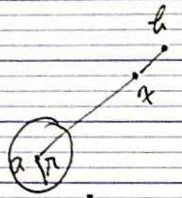
$\to$ non dénombrable

☆ **7.2** On regarde les fermés dans C

$$\overline{A} \cap C \text{ et } \overline{A^c} \cap C$$

On a : $C = \underbrace{(\overline{A} \cap C)}_{\neq \phi} \cup \underbrace{(\overline{A^c} \cap C)}_{\neq \phi}$ hyp

donc $\underbrace{\overline{A} \cap \overline{A^c}}_{Fr(A)} \cap C \neq \phi$



$a \in \mathring{C}$

RM C convexe, $\mathring{C} \neq \phi$

alors $Fr(C) = Fr(\overline{C})$

En effet, $Fr(C) = \overline{C} \setminus \mathring{C}$ et $Fr(\overline{C}) = \overline{C} \setminus \mathring{\overline{C}}$

bien sûr, $\mathring{C} \subset \mathring{\overline{C}}$

Soit $x \in \mathring{\overline{C}}$, $B(x, \varepsilon) \subset \overline{C}$

Soit b, $\|x - b\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, $b \in \overline{C}$, $b \neq x$

il vient : $[a, b[\subset \mathring{C}$, donc $x \in \mathring{C}$

(cc) $\mathring{C} = \mathring{\overline{C}}$ et $Fr(C) = Fr(\overline{C})$

7.3

Soit $f : C \xrightarrow{C^0} \{0, 1\}$

f est constante sur le connexe $C' = C \cap S(0,1)$,

mettons $f = 0$

Soit $x \in C$. la demie-droite ouverte :

$$\underbrace{\{tx \mid t > 0\}}_{\Delta x} \subset C$$

Δx rencontre C' $\left(t = \frac{1}{\|x\|}\right)$.

Or Δx est connexe donc $f|_{\Delta x} = cste = f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = 0$

Donc, $f(x) = 0$

$f = 0$ sur C ; C est connexe.

2.2 Mq. $\{2^n 3^{-m} \mid (m,n) \in \mathbb{N}^2\}$ est dense dans $\mathbb{R}^+$.
Il suffit de montrer que $\{n \ln 2 - m \ln 3 \mid (m,n) \in \mathbb{N}^2\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

On a déjà : $\mathbb{Z} \ln 2 + \mathbb{Z} \ln 3$ est dense dans $\mathbb{R}$.

~~Soit $\varepsilon > 0$ avec $\varepsilon \ll \ln 2, \ln 3$.~~
~~Il existe $(n,m) \in \mathbb{Z}^2$, t.q. $n \ln 2 + m \ln 3$~~

Soit $a < b$, il existe $(n,m) \in \mathbb{Z}^2$ t.q.

$$c = n \ln 2 + m \ln 3 \in \,]a, b[.$$

Soit $\eta = \min(c-a, b-c) \times \frac{1}{2}$

Soit $N \geq \max(|n|, |m|) + 1$

Il existe $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$ t.q. $0 < p \ln 2 + q \ln 3 < \frac{\eta}{N}$
quitte à remplacer $\frac{\eta}{N}$ par $\frac{1}{10} \ln 2$, $\frac{\eta}{N} \ll \ln 2, \ln 3$.
p, q sont de signes opposés, et $p, q \neq 0$.
SNG, $p > 0$, $q < 0$.

$$c + N(p \ln 2 + q \ln 3) \in \,]a, b[$$

$$\underbrace{(n + Np)}_{>0} \ln 2 + \underbrace{(m + Nq)}_{<0} \ln 3 \in \,]a, b[$$

On peut trouver un élément de $\mathbb{N} \ln 2 - \mathbb{N} \ln 3$ dans $]a, b[$, donc $\mathbb{N} \ln 2 - \mathbb{N} \ln 3$ est dense dans $\mathbb{R}$.

2. Densité L^∞

$$E = \{ u \in l^\infty(\mathbb{R}) \,,\ \sum u_n \text{ correspondante CV} \}$$

Mq : $\mathrm{Adh}(E) = \{ u \in l^\infty(\mathbb{R}),\ u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \}$.

- Si $u_n \not\to 0$. Il existe $\varepsilon_0 > 0$, $\varphi_N \nearrow^{\mathbb{N}}$ t.q.
  $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{\varphi(n)}| > \varepsilon_0$.
  $\forall v \in B(u, \varepsilon_0/2)$, $\|v - u\| < \varepsilon_0/2$
  $$|v_{\varphi(n)} - u_{\varphi(n)}| < \varepsilon_0/2$$
  $$|v_{\varphi(n)}| > \varepsilon_0/2 \,,\quad v_n \not\to 0,$$
  $\sum v_n$ ne CV pas, $v \notin E$.
  $B(u, \varepsilon_0/2) \cap E = \emptyset$, $u \notin \mathrm{Adh}(E)$.

- Si $u_n \to 0$. On veut mq $u \in \mathrm{Adh}(E)$.
  Il existe une suite $(v^m) \in E^{\mathbb{N}}$ t.q. $v^m \to u$
  Pour $m \in \mathbb{N}$
  $$v^m_k = \begin{cases} u_k, & k \leq m \\ 0, & k > m \end{cases}$$
  On vérifie que $v^m \in E$ car des termes non nuls sont finies.
  $$\|v^m - u\| = \sup_{k>m} |u_k| \xrightarrow[m\to+\infty]{} 0$$
  donc $v^m \to u$, et $u \in \mathrm{Adh}(E)$.

3.2. Tout va bien sur D.

$\to$ Mq : f est continue en points de S_1.

Soit $z \in S_1$. Soit $\varepsilon > 0$.

Il existe $U \in \mathcal{V}(z)$ t.q. $\forall x \in U \cap D$,

$$|f(x) - f(z)| \leq \varepsilon.$$

soit $z' \in S_1 \cap U$, soit $(x_n) \in (U \cap D)^{\mathbb{N}}$ t.q.

$x_n \to z'$, d'où $\lim f(x_n) \to f(z')$

donc, $|f(z') - f(z)| \leq \varepsilon$. car $|f(x_n) - f(z)| \leq \varepsilon \; \forall n$

Bilan : $\forall x \in U \cap \overline{D}$, $|f(x) - f(z)| \leq \varepsilon$.

D'où, f possède un prolongement continu à $\overline{D}$.

3.5

~~Soit $M \geq 1$~~.

$f^{-1}([-1, 1])$ est bornée.

Il existe $A_1 > 0$ t.q. $f^{-1}([-1, 1]) \subset [-A_1, A_1]$.

$\forall x > A_1$, $f(x) \notin [-1, 1]$

W.L.O.G. $f(A_1 + 1) > 1$, par continuité de f,

s'il existe $x_0 > A_1$ t.q. $f(x_0) < -1$, il existe

$x_1 \in [A_1 + 1, x_0]$ t.q. $f(x_1) = 0$ ↯

donc, $\forall x > A_1$, $f(x) > 1$.

Soit $M \geq 1$.

Il existe $A > 0$ t.q. $f^{-1}([-M, M]) \subset [-A, A]$

$\forall x > A$, $f(x) \notin [-M, M]$.

$f(\max(A, A_1) + 1) > 1$, donc $> M$

$\forall x > A$, $f(x) > M$.

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \to +\infty$.

De même, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) \to \begin{matrix} +\infty \\ \text{ou} \\ -\infty \end{matrix}$

3.7 Mq : $d(x, A) = 0 \iff x \in \bar{A}$

($\Rightarrow$) $\inf_{a \in \bar{A}} d(x,a) = 0$

Soit $\varepsilon > 0$, il existe $a \in A$ t.q. $d(x,a) \leq \varepsilon$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, il existe $x_n \in A$ t.q. $d(x_n, x) \leq \frac{1}{n}$

$x_n \to x$, d'où $x \in \bar{A}$.

($\Leftarrow$) $x \in \bar{A}$

il existe $(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$ t.q. $x_n \to x$.

$d(x_n, x) \to 0$

d'où $\inf_{a \in A} d(x,a) \leq \underbrace{d(x_n, x)}_{\to 0}$ pour tout n

$d(x, A) = 0$.

Mq : $d(x, A) = d(x, \bar{A})$.

Soit $x \in X$

$A \subset \bar{A}$, d'où $\inf_{a \in A} d(x,a) \geq \inf_{a \in \bar{A}} d(x,a)$

$d(x, A) \geq d(x, \bar{A})$

Soit $\varepsilon > 0$.

Soit $a' \in \bar{A}$, il existe $a \in A$ t.q. $d(a, a') \leq \varepsilon$

$d(x,A) \leq d(x,a) \leq d(x,a') + \varepsilon$

$d(x,a') \geq d(x,A) - \varepsilon$

d'où, $d(x, \bar{A}) \geq d(x, A) - \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0$, $d(x, \bar{A}) \geq d(x,A) - \varepsilon$

donc, $d(x, \bar{A}) \geq d(x, A)$

Ainsi, $d(x,A) = d(x, \bar{A})$

Mq : $d(A, B) = d(\bar{A}, \bar{B})$

$\forall x \in A$, $d(x, B) = d(x, \bar{B})$

$\Rightarrow d(A, B) = d(A, \bar{B})$

$\forall x \in \bar{B}$, $d(x, A) = d(x, \bar{A}) \to d(\bar{B}, A) = d(\bar{B}, \bar{A})$

$d(A, B) = d(\bar{A}, \bar{B})$

3.8. b.

$A = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists f(x^+), f(x^-) \text{ et } f(x^+) \neq f(x^-)\}$

Mq : A est dénombrable.

$A_+ = \{x \in A,\ f(x^+) > f(x^-)\}$

$A_- = \{x \in A,\ f(x^-) > f(x^+)\}$

$A = A_+ \cup A_-$

Soit $r, s \in \mathbb{Q}^2$ t.q. $r < s$.

$B^+_{r,s} = \{x \in A_+,\ f(x^-) < r < s < f(x^+)\}$

$$A_+ = \bigcup_{\substack{r,s \in \mathbb{Q}^2 \\ r<s}} B^+_{r,s}$$

Il suffit de montrer que $B^+_{r,s}$ est dénombrable.

Soit $x \in B^+_{r,s}$, on veut montrer qu'il existe $\eta > 0$ t.q. $]x, \eta[\cap B^+_{r,s} = \phi$.

Soit $\varepsilon = \frac{1}{5}(s-r)$. Il existe $\eta > 0$ t.q.

$$\forall t \in]x, \eta[\ , \ |f(t) - f(x^+)| \leq \varepsilon$$

Par l'absurde, supposons qu'il existe $x_0 \in]x, \eta[\cap B^+_{r,s}$

$$f(x_0^+) > s > r > f(x_0^-)$$

mais $\forall t \in]x, \eta[,\ f(x^+) - \varepsilon \leq f(t) \leq f(x^+) + \varepsilon$

$x_0 \in]x, \eta[$, d'où $f(x_0^-) \geq f(x^+) - \varepsilon > s - \varepsilon > r$

d'où contradiction.

Posons $\varphi : \begin{cases} B^+_{r,s} \to \mathbb{Q} \\ x \mapsto r \in]x, \eta[\end{cases}$.

φ est injective, d'où $B^+_{r,s}$ est dénombrable.

4. 1

Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Posons $\|P\| = \int_0^1 |P(t)|\, dt$

$\rightarrow$ $\|0_E\| = 0$

Soit $P \in E$ t.q. $\|P\| = 0$.

Par continuité, $P(t) = 0$ pour tout $t \in [0, 1]$.

P s'annule sur une infinité de points, $P = 0$.

On a montré que $\|P\| = 0 \iff P = 0$

$\rightarrow \quad \forall(\lambda, P) \in \mathbb{R} \times E, \quad \|\lambda P\|$
$= \int_0^1 |\lambda P(t)| dt = |\lambda| \times \|P\|$

$\rightarrow \forall (P_1, P_2) \in E^2$

$$\|P_1 + P_2\| = \int_0^1 | P_1(t) + P_2(t)| dt$$
$$\leq \int_0^1 |P_1(t)| dt + \int_0^1 |P_2(t)| dt$$
$$\leq \|P_1\| + \|P_2\|$$

Ainsi, $\|.\|$ est une norme.

Soit $f : t \rightarrow e^t$

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$P_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} X^k$$

$$\|P_n - f\| = \int_0^1 e^t - P_n(t)\, dt$$
$$= \int_0^1 \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} t^k\, dt$$
$$= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)!} \longrightarrow 0$$

(P_n) est de Cauchy, mais ne converge pas dans E.

E n'est pas complet pour cette norme.

- Pour $(E, \| \|_\infty)$

$\|P\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |P(t)|$

$f : E \rightarrow \mathbb{R}$, $f(P) = \int_0^1 u(t) P(t)\, dt$ est linéaire.

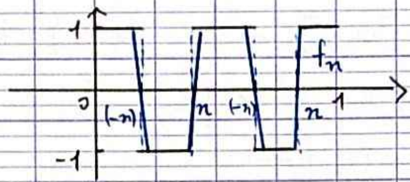
Soit $P \in E$ t.q. $\|P\|_\infty \leq 1$

$$|f(P)| = \left|\int_0^1 u(t) P(t)\, dt\right|$$
$$\leq \int_0^1 |u(t)| \times |P(t)|\, dt$$
$$\leq \int_0^1 |u(t)| \times \|P\|_\infty\, dt \leq \int_0^1 |u(t)|\, dt$$

donc f est bornée sur $\overline{B}(0,1)$

donc f est continue.

Soit $\varphi : \begin{cases} [0,1] \rightarrow \{1, -1\} \\ t \longmapsto \begin{matrix} 1 & \text{si } u(t) \geq 0 \\ -1 & \text{si } u(t) < 0 \end{matrix} \end{cases}$



f_n est bien défini pour $n \geqslant N$
$f_n \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$

Soit $\varepsilon > 0$. Soit $P_n \in \mathbb{R}[X]$ t.q. $\| P_n - f_n \|_\infty \leq \varepsilon$ par le théorème de Weierstrass avec $\|P_n\| \leq 1$

$$f(f_n) = \int_0^1 u(t)\, f_n(t)\, dt$$

$$\left| f(f_n) - \int_0^1 |u(t)|\, dt \right|$$
$$= \left| \int_0^1 u(t) \left(f_n(t) - \varepsilon(t) \right) dt \right|$$
$$\leq \|u\|_\infty \times \frac{n_0}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

n_0 : nombre de pentes

$$| f(f_n) - f(P_n) |$$
$$= \left| \int_0^1 u(t) \left(f_n(t) - P_n(t) \right) dt \right| \leq \varepsilon \|u\|_\infty$$

~~d'où, on possède une suite~~

Bilan, pour tout $\varepsilon > 0$, on possède une suite $P_n \in \mathbb{R}[X]$ t.q. $\|P_n\| \leq 1$, $\left| f(P_n) - \int_0^1 |u(t)|\, dt \right| \leq \varepsilon$ a.p.c.n.

D'où, $||| f ||| = \int_0^1 |u(t)|\, dt$.

- Pour $(E, \|.\|)$

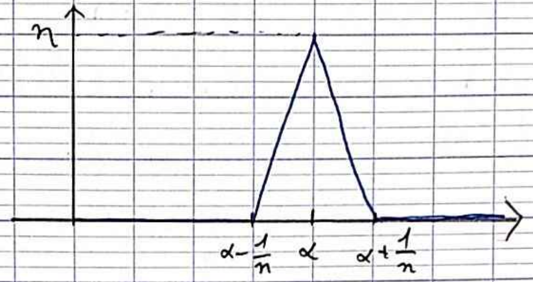
Soit $P_1, P_2 \in E$.

$$| f(P_1) - f(P_2) |$$
$$= \left| \int_0^1 u(t) (P_1 - P_2)(t)\, dt \right|$$
$$\leq \int_0^1 |u(t)| \cdot |(P_1 - P_2)(t)|\, dt$$
$$\leq \|u\|_\infty \int_0^1 |(P_1 - P_2)(t)|\, dt$$
$$\leq \|u\|_\infty \, \|P_1 - P_2\|$$

d'où, f est lipschitzienne, donc f est continue.

Posons $\alpha \in [0,1]$ t.q. $u(\alpha) = \|u\|_\infty$.

$\cancel{f_n : \begin{cases} [0,1] \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \end{cases}}$



Soit $\varepsilon > 0$.

Il existe $\eta > 0$ t.q. $\forall x \in]\alpha - \eta, \alpha + \eta[$, $|u(x) - \|u\|_\infty| \leq \varepsilon$

$$\|u\|_\infty - \varepsilon \leq u(x) \leq \|u\|_\infty$$

Soit N t.q. $\frac{1}{N} < \eta$.

Par le théorème de Weierstrass, il existe $P_N \in E$ t.q.

$$\|P_N - f_N\|_\infty \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad \|P_N\| = 1$$

$$|f(P_N) - \|u\|_\infty|$$

$$= \left| \int_0^1 u(t) P_N(t)\, dt - \int_0^1 u(t) f_N(t) dt + \int_0^1 u(t) f_N(t) dt - \|u\|_\infty \right|$$

$$\leq \|u\|_\infty \int_0^1 |P_N(t) - f_N(t)| dt + \left| \int_{\alpha - \frac{1}{n}}^{\alpha + \frac{1}{n}} u(t) f_N(t)\, dt - \|u\|_\infty \right|$$

$$\leq \varepsilon \|u\|_\infty + \varepsilon$$

Donc, on a $\sup\limits_{P \in B_E(0,1)} |f(P)| = \|u\|_\infty$.

4.2 Soit $f \in E$ à valeurs réelles.

Mq : $\phi(f) \in \mathbb{R}$.

A priori $\phi(f) = a + bi$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, on veut montrer que $b = 0$.

Soit $t \in \mathbb{R}$, $\phi(f + it\mathbb{1}_X)$

$$= \phi(f) + \phi(it\mathbb{1}_X) = a + (b+t)i$$

$$|\phi(f + it\mathbb{1}_X)| \leq \|f + it\mathbb{1}_X\|_\infty = \sqrt{t^2 + \|f\|_\infty^2}$$

$$a^2 + (b+t)^2 \leq t^2 + \|f\|_\infty^2$$

$a^2 + b^2 + 2bt \leq \|f\|_\infty^2$ est vraie $\forall t \in \mathbb{R}$

d'où, $b = 0$. $\phi(f) \in \mathbb{R}$.

$$\left\| \frac{f + \|f\|_\infty 1_X}{2\|f\|_\infty} \right\|_\infty \leq 1$$

Si $f \geq 0$, $\frac{f}{\|f\|_\infty}$ est à valeurs dans $[0,1]$.

Posons $g = 2\frac{f}{\|f\|_\infty} - 1_X$, $-1_X \leq g \leq 1_X$, $\|g\|_\infty \leq 1$

donc $|\phi(g)| \leq 1$ ie $\left|2\phi\left(\frac{f}{\|f\|_\infty}\right) - 1\right| \leq 1$

$$0 \leq \phi\left(\frac{f}{\|f\|_\infty}\right) \leq 1$$

$$0 \leq \phi(f) \leq \|f\|_\infty \text{ , positive.}$$

6.4

a) Soit $\varepsilon > 0$.

Soit $A = \{n \in \mathbb{N}^*,\ \exists (x_k) \in X^{[\![1,n]\!]},\ \forall k_1 \neq k_2,\ d(x_{k_1}, x_{k_2}) \geq \varepsilon\}$

$1 \in A$, A non vide.

si $n \in A$, $[\![1,n]\!] \subset A$.

Supposons que A est non majorée, ie $\exists (x_k) \in X^{\mathbb{N}}$,

$\forall k_1 \neq k_2$, $d(x_{k_1}, x_{k_2}) \geq \varepsilon$ fixé.

(x_k) n'admet pas de V.A. $\lightning$ au fait que X est compact.

Donc, A est majorée.

Notons $N = \sup A$, par définition, il existe une suite vérifiant $(*)$ de taille $N(\varepsilon)$.

b) $$X = \bigcup_{i \in [\![1,N]\!]} B(x_i, \varepsilon)$$

$(\supset)$ évident

Si $X \setminus \bigcup_{i \in [\![1,N]\!]} B(x_i, \varepsilon) \neq \emptyset$, par ex $x_0 \in X \setminus \bigcup_{i \in [\![1,N]\!]} B(x_i, \varepsilon)$

$\forall k \in [\![1,n]\!]$, $d(x_0, x_k) \geq \varepsilon$, $\lightning$ à la déf de $N(\varepsilon)$.

~~Soit $y \in X$, il existe i_0 t.q. $y \in B(x_{i_0}, \varepsilon)$~~

$(f(x_i))_{i \in [\![1,N]\!]}$ vérifie $(*)$

d'où $X = \bigcup_{i \in [\![1,N]\!]} B(f(x_i), \varepsilon)$ de même raison.

il existe $i_0 \in [\![1, N]\!]$, t.q. $y \in B(f(x_{i_0}), \varepsilon)$.

Donc, $d(y, f(X)) \leq d(y, f(x_{i_0})) < \varepsilon$.

d'où, $d(y, f(X)) = 0$, $y \in \overline{f(X)}$

f est une isométrie, donc C^0, $f(X)$ est compact

$\overline{f(X)} = f(X)$, $y \in f(X)$.

f est donc surjective.

Exo Soit C convexe.

Si $a \in \mathring{C}$ et $b \in \overline{C}$, mq: $[a, b[\subset \mathring{C}$

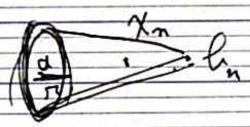
→ On a : $\mathring{C}$ et $\overline{C}$ sont convexes.

Il existe $r > 0$ t.q. $B(a, r) \subset C$

Soit $x \in [a, b[$, il existe $\lambda \in [0, 1[$ t.q.

$$x = (1-\lambda) a + \lambda b.$$

Soit $(b_n) \in C^{\mathbb{N}}$ t.q. $b_n \to b$.



Soit $x_n = (1-\lambda) a + \lambda b_n$

$$B(x_n, (1-\lambda)\tfrac{r}{2}) \subset C \quad \text{par convexité}$$

a.p.c.r., $|x_n - x| \leq \lambda |b_n - b| \leq \frac{r}{4}(1-\lambda)$ par ex.

$$B(x, \tfrac{r}{8}(1-\lambda)) \subset C$$

d'où, $x \in \mathring{C}$

Ainsi, $[a, b[\subset \mathring{C}$

? 7.2

C est un connexe, $\overline{A} \cap C$, $\overline{A^c} \cap C$ sont fermés dans C

$C = (\overline{A} \cap C) \cup (\overline{A^c} \cap C)$

$C \cap A \subset C \cap \overline{A}$. d'où $\overline{A} \cap C \neq \emptyset$

de même, $\overline{A^c} \cap C \neq \emptyset$.

par la déf de connexité, $(\overline{A} \cap C) \cap (\overline{A^c} \cap C) \neq \emptyset$

$(\overline{A} \cap \overline{A^c}) \cap C \neq \emptyset$, $Fr(A) \cap C \neq \emptyset$

6.7.

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$.

$\exists \delta > 0, \ \forall i \in [\![1, n]\!], \ \forall \lambda \in [-\delta, \delta], \ \lambda e_i \in C$

Si $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$

On définit $N(x) = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|$

Soit $x \in \mathbb{R}^n$ t.q. $N(x) \leq \delta$

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = \sum_1^n \underbrace{\frac{|\lambda_i|}{\delta}}_{\mu_i} \overbrace{(\pm \delta e_i)}^{\varepsilon_i \in C} = \sum_1^n \mu_i \varepsilon_i + \underbrace{\left(1 - \sum_1^n \mu_i\right)}_{\geq 0} 0_E$$

Si $\sum \mu_i < 1$, ie $\sum |\lambda_i| < \delta$, $\sum \lambda_i e_i \in C$

$B(0, \delta) \subset C$

3.6 Soit $A = \{x \in [a, b], \ f(x) = x\}$

A est fermé, borné

Soit $\alpha = \inf A \in A$, $\beta = \sup A \in A$

$f(\alpha) = \alpha$, $f(\beta) = \beta$

$f \circ g(\alpha) = g \circ f(\alpha) = g(\alpha)$, $g(\alpha) \in A$

de même, $g(\beta) \in A$

$\alpha \leq g(\alpha)$, $g(\beta) \leq \beta$

Regardons la fonctions $g - f$

$(g-f)(\alpha) \geq 0$

$(g-f)(\beta) \leq 0$

Par TVI, il existe $\gamma \in [\alpha, \beta]$ t.q. $(g-f)(\gamma) = 0$

$g(\gamma) = f(\gamma)$.