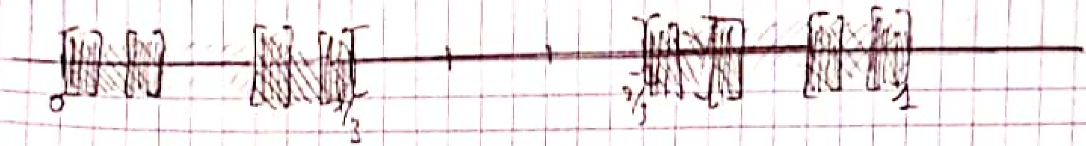
TD Cantor



1.2.

a) F_n est fermé comme réunion finie de fermé

donc $K_3 = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$ est fermé

Par construction, $E \subseteq \overline{K_3} = K_3$.

$K_3 \subseteq [0,1]$, donc c'est un fermé borné de $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ K_3 est compact

Si $\exists\, x \neq y,\ x < y,\ [x,y] \subseteq K_3$, donc $\forall n \in \mathbb{N},\ [x,y] \subseteq F_n$

Or, $F_n = \bigsqcup_{k=0}^{2^n} F_{k,n}$ et $\ell(F_{k,n}) = \frac{1}{3^n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ donc $\ell(x,y) < \ell(x,y)$

ce qui est absurde

Soit $\varepsilon > 0$, $a \in K_3$

Les éléments de E sont sous la forme $\frac{k}{3^p}$ où $k \in [\![0, 2^{p+1}-1]\!]$, $p \in \mathbb{N}$.

Or, $\frac{\lfloor 3^p a \rfloor}{3^p} \xrightarrow[p \to +\infty]{} a$, donc $\exists\, p_0 \in \mathbb{N},\ \forall p \geq p_0,\ \frac{\lfloor 3^p a \rfloor}{3^p} \in B(a,\varepsilon)$

En prenant p tq $\lfloor 3^p a \rfloor < 2^{p+1}-1$, il vient $\frac{\lfloor 3^p a \rfloor}{3^p} \in (B(a,\varepsilon) \cap K_3) \setminus \{a\}$

$\frac{\lfloor 3^p a \rfloor}{3^p} \neq a$

donc a est d'accumulation

b) $\left]\frac{k}{3^n} - \frac{\varepsilon/4}{3^n}, \frac{k+1}{3^n} + \frac{\varepsilon/4}{3^n}\right[\supseteq F_{k,p}$

donc $K_3 \subset \bigcup_{\substack{k,n \in \mathbb{N} \\ k \in [\![0,2^n]\!]}} \left]\frac{k}{3^n} - \frac{\varepsilon/4}{3^n}, \frac{k+1}{3^n} + \frac{\varepsilon/4}{3^n}\right[$

$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\varepsilon/2}{3^n} = \frac{1}{2} \times \varepsilon \times \frac{3}{2} = \varepsilon \times \frac{3}{4} < \varepsilon$

1.1 Si $S = [a, a+\frac{1}{3^n}]$ est une composante connexe de F_n, la dissection donne

$[a, a+\frac{1}{3^{n+1}}] \cup [a+\frac{2}{3^{n+1}}, a+\frac{1}{3^n}]$

Récurrence : à gauche : $0, x_1 \dots x_m 0 0 \dots$, $x_i \in \{0,2\}$

à droite $0, x_1 \dots x_m 1 0 \dots$ pour $m \leq n$

nouveaux $a = 0,x_1 \dots x_n 0 \dots$

$a + \frac{1}{3^{n+1}}$ $\quad 0, x_1 \dots x_n 1 0 \dots$

$a + \frac{2}{3^{n+1}}$ $\quad 0, x_1 \dots x_n 2 0 \dots$

(*)

Obs Les extrémités de F_n sont dans F_{n+1}.

1.2. a) K_3 est fermé comme intersection de fermé

* K_3 est donc fermé dans le compact $[0,1]$, donc compact

* Si I est un intervalle $\subseteq K$, non trivial, on choisit n tq $3^{-n} < \ell(I)$

Alors I est inclus dans l'une des C.C. de F_n, qui ont toutes une longueur 3^{-n}, NON !

* Soit $x \in K_3$. Soit : $\varepsilon > 0$ et $3^{-n} < \varepsilon$

$x \in F_{k,n} = [a,b]$ de longueur $< \varepsilon$

Alors $[a,b] \subseteq]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$, Or, a et b sont dans K_3

$\left|]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap K_3 \right| \geq 2.$

b) Soit $\varepsilon > 0$, $\quad K_3 \subseteq F_n \subseteq \underbrace{\bigcup_{k=0}^{2^n-1} \left]a_k - \frac{\varepsilon}{2^n}, b_k + \frac{\varepsilon}{2^n}\right[}$, avec $[a_k, b_k] =$ CC de F_n

somme des longueurs : $\underbrace{2^n \times \frac{1}{3^n} + 2\varepsilon}_{\text{aussi petit que voulu}}$

Variante : $\mu(\Omega) = \frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{9} + \dots + \frac{2^n}{3^{n+1}} + \dots$

$$= \frac{1}{3} \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{3} \times \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 1.$$

c) $x = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{x_i}{3^i}$, $x_i \in \{0,2\}$

$\boxed{\Rightarrow}$

$x = \lim_{m \to +\infty} \underbrace{\sum_{i=0}^{m} \frac{x_i}{3^i}}_{\text{extrémité gauche}}$. Or, K_3 est fermé, donc $x \in K_3$

$\boxed{\Leftarrow}$

Si x est dans K_3 et x n'est pas une extrémité droite

$x \in F_m$ donc $\underbrace{0, \underbrace{x_1 \ldots x_m}_{\text{ds } \{0,2\}} 0 \ldots}_{\text{gauche}} < x < 0, x_1 \ldots x_m + \frac{1}{3^{m+1}}$

Les $m-1$ premiers "décimales" sont dans $\{0,2\}$.

Variante

Si x possède un 1 dans son écriture propre, on écrit

$x = \sum_{1}^{m} \frac{x}{3^i} + \frac{1}{3^{m+1}} + \sum_{m+2}^{+\infty} \frac{x_i}{3^i}$

d'où $\underbrace{\sum_{1}^{m} \frac{x_i}{3^i} + \frac{1}{3^{m+1}}}_{\text{ext droite}} < x < \underbrace{\sum_{1}^{m} \frac{x_i}{3^i} + \underbrace{\frac{1}{3^{m+1}} + 2 \sum_{m+2} \frac{1}{3^i}}_{\frac{2}{3^{m+1}}}}_{\text{gauche !}}$

$\Rightarrow x \in \Omega_m = F_m^C$

- $\varphi : K_3 \longrightarrow \{0,2\}^{\mathbb{N}}$ est bijective, donc $\operatorname{card} K_3 = \operatorname{card}(\{0,2\}^{\mathbb{N}})$
  $x \longmapsto (x_m)$ $= |\mathbb{R}|$

- $K_3 + K_3 = [0,2]$.

Soit $y \in [0,1]$, $2y = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{2y_i}{3^i}$ $y_i \in \{0,1,2\}$
$2y_i \in \{0,2,4\}$

$2y_i = x_i + x'_i$, x_i et $x'_i \in \{0,2\}$

2) 2.1 $\Omega = \mathbb{R} \setminus F$, $F \neq \emptyset$, $\Omega = \bigcup_{m \in \mathbb{N}}]a_m, b_m[$

$f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

HYP f est cte sur les $]a_m, b_m[$

$I = f(\mathbb{R})$

$f(]a_n, b_n[) = \{c_n\} = \{f(a_n)\}$ $\quad$ (a_n fini $\to a_n \in F$)

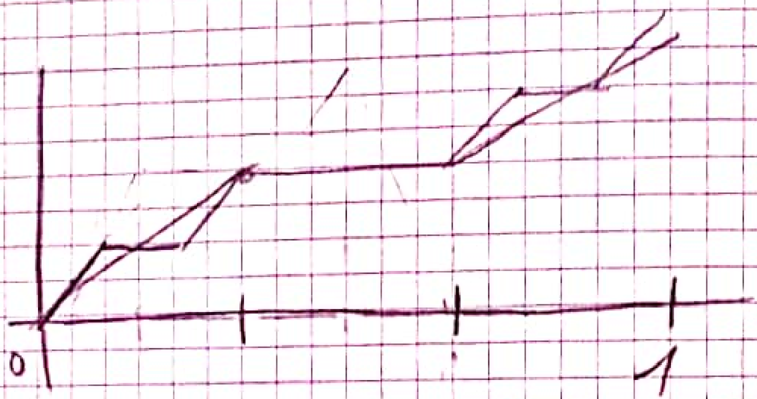
(soit $c_n = \frac{a_n+b_n}{2}$, $\{x \in]a_n, b_n[\mid f(c_n) = f(x)\}$ est fermé dans $]a_n, b_n[$ ouvert car f est localement cte)

$f(\Omega) \subseteq f(F)$ donc $f(\mathbb{R}) = f(\Omega) \cup f(F)$

$= f(F) = I$

I est donc dénombrable et étant un intervalle, il est réduit à un point.

2.2 <u>DESSINS</u>



on a $f_{n+1|\Omega_n} = f_{n|\Omega_n}$

$S = [a, a+\frac{1}{3^n}]$ ce de F_n.

On regarde $f_{n+1} - f_n$, $|f_{n+1} - f_n| \leq \frac{1}{3^{n+1}} \left| \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} - \frac{3^n}{2^n} \right| = \frac{1}{6 \cdot 2^n}$

$\sum (f_{n+1} - f_n)$ CV donc $f_n \xrightarrow{CVS} f$.

$|f - f_n| = \sum_{n+1}^{+\infty} (f_{k+1} - f_k) \leq \frac{1}{6} \sum_{n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \longrightarrow 0$ indépendament de x

$(f_n) \xrightarrow{CVU} f$.

<u>Propriétés de f</u> : i) f est C^0, croissante, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$.

ii) f est localement constante sur Ω
f est C^1 sur Ω
$f' = 0$

$f([0,1]) = [0,1]$