Polynômes et ensembles de Julia

1. $P \in \mathbb{C}[X]$, $\deg P \geq 1$. $\quad P(X) = \sum_{k=0}^{d} \alpha_k X^k$

1.1

a) $\forall z \in \mathbb{C}, \quad |P(z)| \geq \underbrace{|\alpha_d||z|^d - \left|\sum_{k=0}^{d-1} \alpha_k z^k\right|}_{|\alpha_d| \times |z|^d + o(|z|^d) \text{ en } +\infty}$

d'où $|P(z)| \xrightarrow[|z| \to +\infty]{} +\infty$.

Alors $\exists A \geq 0, \forall z \in \mathbb{C}, |z| > A \Rightarrow |P(z)| \geq |P(0)| + 1$

et $|P|$ atteint son minimum sur le compact $\mathcal{C}(0, A)$, comme fonction continue (disons en a). $|P(0)| \geq |P(a)|$ donc $\forall z \in \mathbb{C}, |P(z)| \geq |P(a)|$.

b) On suppose $P(a) \neq 0$. On pose $P(a) = a_0$.

$P(a + re^{i\theta}) = a_0 \left(1 + \sum_{k=\ell}^{d} b_k r^k e^{ik\theta}\right)$, $\quad b_\ell \neq 0$.

$b_\ell = e^{i\varphi} |b_\ell|$

$b_\ell e^{i\ell\theta} = -|b_\ell| \iff e^{i(\ell\theta + \varphi)} = -1$ car $b_\ell \neq 0$.

~~$\theta = \frac{\pi - \varphi}{\ell} [2\pi]$~~

on prend $\theta =$ $\boxed{\frac{\pi - \varphi}{\ell} = \theta}$

Alors $P(a + re^{i\theta}) = a_0 \left(1 + b_\ell r^\ell e^{i\ell\theta} + \sum_{k=\ell+1}^{d} b_k r^k e^{ik\theta}\right)$

$= a_0 \left(1 - r^\ell |b_\ell| + \sum_{k=\ell+1}^{d} b_k r^k e^{ik\theta}\right)$

d'où $|P(a + re^{i\theta})| \leq |a_0| \underbrace{\left|1 - r^\ell |b_\ell|\right|}_{1 - r^\ell |b_\ell| \text{ pour } r \text{ petit}} + |a_0| \underbrace{\sum_{k=\ell+1}^{d} |b_k| r^k}_{o(r^\ell) \text{ pour } r > 0 \text{ suffisamment petit}}$

donc pour $r > 0$ suffisamment petit, $|P(a + re^{i\theta})| < |P(a)|$

c) Supposons par l'absurde qu'il existe $P \in \mathbb{C}$ tel que $\min |P| > 0$.
Alors il existe $z \in \mathbb{C}$ ($z = a + re^{i\theta}$ avec r et θ choisis d'après b)
tel que $z \neq a$ et $|P(z)| < |P(a)|$
ce qui contredit $|P(a)| = \min |P|$.

Conclusion : $\mathbb{C}$ est algébriquement clos.

1.2. a) Soit K un compact de $\mathbb{C}$

obs : K est fermé et borné, donc comme P est continue, $P^{-1}(K)$ est fermé dans $\mathbb{C}$

De plus, $P^{-1}(K)$ est bornée (sinon K ne serait pas bornée puisque P est un polynôme)

Alors d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, $\underline{P^{-1}(K) \text{ est compact}}$

b) Soit F un fermé de $\mathbb{C}$

Soit $y \in \overline{P(F)}$.

Alors il existe $(x_n) \in F^{\mathbb{N}}$ tel que $P(x_n) \longrightarrow y$

(x_n) est bornée (sinon $|y| = +\infty$)

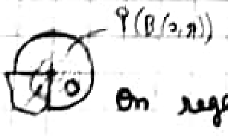
Alors $\exists\, \varphi_{\mathbb{N}} \nearrow^{\mathbb{N}}$ tel que $x_{\varphi(n)} \longrightarrow x \in \overline{F} = F$

donc par continuité de P, $P(x_{\varphi(n)}) \longrightarrow P(x)$

d'où $y = P(x) \in P(F)$

$\boxed{\text{Conclusion : } \overline{P(F)} = P(F) \text{ i.e. } P(F) \text{ est fermé}}$

1.3 $P(0) = 0$. $\exists\, r > 0$, $P(B(0,r)) \not\subset \mathcal{V}(0) \iff \forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in B(0,\varepsilon) \cap (\mathbb{C} \setminus P(B(0,r)))$



$\exists\, (z_n) \in (\mathbb{C} \setminus P(B(0,r)))^{\mathbb{N}}$, $z_n \longrightarrow 0$; $\lambda =$ coeff dominant de $P \neq 0$

On regarde $P(X) - z_n = \lambda \prod_{k=1}^{d} (X - a_{k,n})$ (*)

Comme $P(a_{k,n}) = z_n \in \mathbb{C} \setminus (P(B(0,r)))$, $|a_{k,n}| > r$

À pcr $z_n \in B(0,1)$ donc $a_{k,n} \in P^{-1}(\overline{B}(0,1))$ compact donc borné.

D'après BW dans $\mathbb{C}^d$, il existe une extraction telle que $a_{1,\sigma(n)} \longrightarrow l_1 \in \mathbb{C}$

$\vdots$

$a_{d,\sigma(n)} \longrightarrow l_d \in \mathbb{C}$

Pour $i \in [\![1,d]\!]$, $|\ell_i| \geqslant r$, en particulier non nuls.

Evaluons en 0

$$|b_{j_n}| = \prod_{k=1}^{d} |a_{k,n}|$$

donc $$|b_{j_{\sigma(n)}}| = \prod_{k=1}^{d} |a_{k,\sigma(n)}|$$

$n \to +\infty$, $0 = \prod_{k=1}^{d} |\ell_k|$, absurde.

b) $P \longrightarrow P(a+z) - P(a)$

1.4 a) Supposons que $|P|$ atteint son max en $z \in \mathring{K}$, $B(z,\varepsilon) \subseteq K$

$P(B(z,\varepsilon))$ est ouvert d'après 1.3.

$P(B(z,\varepsilon)) \supseteq B(P(z),r)$ donc il existe $z' \in K$ tel que $|P(z')| > |P(z)|$

1.4 K compact

b) $|P|$ C^0 $\Rightarrow$ $|P|$ atteint son max en $a \in K$

On écrit $P(a + re^{i\theta}) = b_0 + \sum_{k=1}^{d} b_k r^k e^{ik\theta}$, $b_0 = P(a)$

$$\int_0^{2\pi} |P(a+re^{i\theta})|^2 d\theta = \int_0^{2\pi} P(a+re^{i\theta}) \cdot \overline{P(a+re^{i\theta})}\, d\theta$$

$$P(a+re^{i\theta})\,\overline{P(a+re^{i\theta})} = \left(\sum_{k=0}^{d} b_k r^k e^{ik\theta}\right)\left(\sum_{k=0}^{d} \overline{b_k} r^k e^{-ik\theta}\right)$$

$$= \sum_{(k,l)\in[\![0,d]\!]^2} b_k \overline{b_l} r^{k+l} e^{i\theta(k-l)}$$

car $k \neq l$ $\int_0^{2\pi} e^{i\theta(k-l)} d\theta = 0$

d'où $$\int_0^{2\pi} |P(a+re^{i\theta})|^2 d\theta = \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{d} |b_k|^2 r^{2k} d\theta = 2\pi \sum_{k=0}^{d} |b_k|^2 r^{2k}$$

Si $a \in \mathring{K}$, $\int_0^{2\pi} |P(a)|^2 d\theta \geqslant \int_0^{2\pi} |P(a+re^{i\theta})|^2 d\theta$ d'où $2\pi \sum_{k=1}^{d} |b_k|^2 r^{2k} \leqslant 0 \Rightarrow b_k = 0$

$\exists r>0$, $B(a,r) \subseteq K$, $(a+re^{i\theta}) \in K$ $k \in [\![1,d]\!]$

donc $P(a+re^{i\theta}) = P(a)$, donc $P(\underbrace{B(a,r)}_{\text{infini}}) = \{P(a)\}$ ce qui contredit $\deg P \geqslant 1$.

donc $a \notin \mathring{K}$

(1.c) d) $\exists z_n \in \Omega^{\mathbb{N}}$, $|P(z_n)| \longrightarrow \sup_{z\in\Omega} |P(z)|$, Ω borné $\Rightarrow \exists \varphi$, $z_{\varphi(n)} \longrightarrow z_0 \in \bar{\Omega}$

donc $|P(z_0)| = \sup_{z\in\Omega} |P(z)| \leq \sup_{z\in\bar{\Omega}} |P(z)| \Rightarrow \sup_{z\in\bar{\Omega}} |P(z)| = \sup_{z\in\Omega} |P(z)| \geq \sup_{z\in F} |P(z)|$

$\Rightarrow \sup_{z\in\Omega} |P(z)| = \sup_{z\in F} |P(z)|$

Variante : 1.4 $\Rightarrow \sup_{z\in\bar{\Omega}} |P| \leq \sup_{z\in\bar{\Omega}} |P| = \sup_{z\in F} |P|$

e) C un tel compact, il existe $R>0$ tq $C \subseteq \bar{B}(0,R)$

On considère alors $A = \mathbb{C} \setminus \bar{B}(0,R)$ qui est connexe. Alors $\tilde{A}$ est l'unique composante connexe non bornée de $\mathbb{C}_{\mathbb{C}} C$. A connexe donc $A \subseteq \tilde{A}$ composante connexe de $\mathbb{C}\setminus C$

Donc si B composante connexe de $\mathbb{C}\setminus C$ distincte de $\tilde{A}$, $B \subseteq \mathbb{C}\setminus\tilde{A} \subseteq \bar{B}(0,R)$

donc B est bornée

* * *

2\. a) $P(z) = az+b$, $a\in\mathbb{C}^*$, $b\in\mathbb{C}$

$z_{n+1} = az_n + b$. * Si $a=1$, (z_n) suite arithmétique, $z_n = z_0 + nb$

* Si $a\neq 1$, P a pour point fixe $\ell = \frac{b}{1-a} \in \mathbb{C}$

donc $z_{n+1} - \ell = a(z_n - \ell) \Rightarrow z_n - \ell = a^n(z_0 - \ell)$

d'où $z_n = a^n\left(z_0 - \frac{b}{1-a}\right) + \frac{b}{1-a}$ $\begin{cases} |a|>1 \Rightarrow |z_n| \longrightarrow +\infty \\ |a|<1 \Rightarrow z_n \longrightarrow \frac{b}{1-a} \end{cases}$

b) $\frac{|P(z)|}{|z|} \xrightarrow[+\infty]{} +\infty$ donc $\exists R>0$ tq $\forall z\in\mathbb{C}$, $|z|>R \Rightarrow |P(z)| > 2|z|$

$K = \{z\in\mathbb{C} \mid (z_n) \text{ bornée}\}$

Si K est non borné, $\exists z\in K$, $|z|>R$, alors $|P(z)| > 2|z| > 2R$

Par récurrence immédiate, $|P^{\circ n}(z)| > 2^n R$ donc $|z_n| \longrightarrow +\infty$

c) Soit $a\notin K$, $R>0$

Alors $\exists N\in\mathbb{N}$ tel que $|a_N| > R$ i.e. $|P^{\circ N}(a)| > R$

$P^{\circ N}$ est C^0, donc $\exists \eta>0$, $P^{\circ N}(B(a,\eta)) \subseteq B(P^{\circ N}(a), \varepsilon)$ où $\varepsilon = \frac{|P^{\circ N}(a)| - R}{2}$

Or, $y\in B(P^{\circ N}(a), \varepsilon) \Rightarrow |P^{\circ N}(a) - y| < \varepsilon \Rightarrow |y| > |P^{\circ N}(a)| - \varepsilon > \frac{|P^{\circ N}(a)| + R}{2} > R$

d'où $B(a,\eta) \subseteq (\mathbb{C}\setminus K)$ i.e. $\mathbb{C}\setminus K$ ouvert donc K fermé

d) Ω ouvert non vide borné de $\mathbb{C} \Rightarrow \bar{\Omega} \neq \Omega \neq \mathbb{C}$, donc $F = \bar{\Omega}\setminus\mathring{\Omega} = \bar{\Omega}\setminus\Omega \neq \emptyset$

$z\in\bar{\Omega}$, $\underset{\in\Omega^{\mathbb{N}}}{z_n} \longrightarrow z$. Par C^0, $|P(z_n)| \longrightarrow |P(z)|$ d'où $|P(z)| \leq \sup_{z\in\Omega} |P(z)|$

donc $\sup_{z\in\bar{\Omega}} |P(z)| \leq \sup_{z\in\Omega} |P(z)|$. Or, $F\subseteq\bar{\Omega}$, donc $\boxed{\sup_{z\in F} |P(z)| \leq \sup_{z\in\Omega} |P(z)|}$

Julia 2) f) Si Ω est une c.c.

obs $p(K) \subseteq K$, par définition donc $\forall N \in \mathbb{N}$, $p^{\circ N}(K) \subseteq K$.

On a $\overline{\Omega} \setminus \Omega \subseteq K$.

Sinon $\exists a \in \overline{\Omega} \setminus \Omega$, $a \notin K$.

Alors $a \in \mathbb{C} \setminus K$ qui est ouvert d'où $\exists r > 0$ tq

$B(a,r) \subseteq \mathbb{C} \setminus K$, $\underbrace{\Omega}_{CA} \cup \underbrace{B(a,r)}_{CA}$ est connexe car $\Omega \cap B(a,r) \neq \emptyset$

mais $\Omega \subsetneq \Omega \cup B(a,r)$ car $a \notin \Omega$.

Si $\Omega \neq \emptyset$, on choisit $x \in \Omega$, alors $|p^{\circ N}(x)| \longrightarrow +\infty$

donc $\sup_{\Omega} |p^{\circ N}(x)| = M_N \longrightarrow +\infty$

ABS

Mais $\sup |p^{\circ N}|$ est atteinte sur $\overline{\Omega} \setminus \Omega$ donc sur K

Or $p^{\circ N}(K) \subseteq K \subseteq \overline{B}(0,r)$