TD: Suites de fonctions

1.1

a) Soit $x \in \mathbb{R}^+$, $\frac{x}{x+n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Donc CVS vers 0.

Si $[a,b] \subset \mathbb{R}^+$, il vient $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [a,b]$

$$|f_n(x)| \leq \frac{b}{b+n} \to 0$$

il y a CVU vers 0 sur $[a,b]$.

$f_n(n) = \frac{1}{2}$, rien sur $\mathbb{R}^+$.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right) = 0 \neq \lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{x\to+\infty} f_n(x)\right)$$

b.) $f_n(x) = \frac{1}{1+n^2x^2}$ CVS vers $\chi_{\{0\}}$

pas de CVU car $\chi_{\{0\}}$ n'est pas $\mathcal{C}^0$.

Si K compact $\neq \emptyset \subset \mathbb{R}^*$, on envisage $\min_{x\in K}|x| = \delta > 0$

$\forall n \in \mathbb{N}$ $\forall x \in K$, $|f_n(x)| \leq \frac{1}{1+n^2\delta^2} \to 0$

CVU $\xrightarrow[K]{} 0$

$f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}$ $\quad f_n(x) \xrightarrow{CVS} 0$ $\quad \frac{1}{\frac{1}{x}+n^2x}$

$$|nx| = |nx| \times 1 \leq \frac{1}{2}(1+n^2x^2)$$

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{2n}$$

Donc, f_n CVU vers 0.

c.) $f_n(x) = \frac{1-x^n}{1+x^n}$

Soit $x \in \mathbb{R}$

Si $x \in]-1,1[$, $x^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

Si $|x| > 1$, $f_n(x) = \frac{1-x^n}{1+x^n} = \frac{\frac{1}{x^n}-1}{\frac{1}{x^n}+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -1$

Si $x=1$, $f_n(1)=0$

Si $x=-1$, $f_n(-1)$ n'est pas défini pour n impair

donc, $f_n(-1)$ ne CV pas.

Il n'y a pas de CVS.

$x \in \mathbb{R}^+$

$|f_n(x)| \leq x e^{-nx} \leq \frac{1}{n}$

$x e^{-nx} = \frac{x}{e^{nx}} \leq \frac{x}{1+nx}$

$\leq \frac{x}{nx} = \frac{1}{n}$

d.) Soit $x \in \mathbb{R}^+$.

Si $x=0$, $f_n(0) = 0 \times e^0 = 0$.

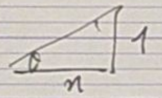
Si $x>0$, $f_n(x) = \sin x \, e^{-nx} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Donc $f_n \xrightarrow[CVS]{} 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$f_n' : x \mapsto \cos(x) e^{-nx} - n \sin(x) \cdot e^{-nx}$$

f_n' vaut 0 en $x = \arctan \frac{1}{n}$



$\tan\theta > \theta > \sin\theta$

$\frac{1}{n} > \arctan \frac{1}{n}$

$-1 < -n\arctan \frac{1}{n}$

$-n\arctan\frac{1}{n} \lesseqgtr \frac{1-n}{\sqrt{n^2+1}}$

$\frac{n}{\sqrt{n^2+1}} \geq \frac{1}{2}$

$$f_n\left(\arctan \frac{1}{n}\right) = \sin\left(\arctan \frac{1}{n}\right) e^{-n\arctan\frac{1}{n}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} e^{-n\arctan\frac{1}{n}} < \frac{e^{\frac{-n}{\sqrt{n^2+1}}}}{\sqrt{n^2+1}} \leq \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{n^2+1}}$$

$$\|f_n\|_\infty \leq \frac{1}{\sqrt{e}\sqrt{n^2+1}}$$

D'où, il y a CVU.

e.) $f_n(x) = x^2 \exp\left(-\sin\left(\frac{x}{n}\right)\right)$ sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = x^2 e^{-\sin\left(\frac{x}{n}\right)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} x^2 e^0 = x^2$$

D'où, $f_n \xrightarrow{CVS} x^2$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $|f_n(x) - x^2|$

$$= x^2 \left|1 - e^{-\sin\frac{x}{n}}\right|$$

$f : x \longmapsto x^2$

$$f_n\left(\frac{\pi}{2}n\right) - \left(\frac{\pi}{2}n\right)^2$$
$$= \left(\frac{\pi}{2}n\right)^2 \left(e^{-\sin\frac{\pi}{2}} - 1\right)$$
$$= \left(\frac{\pi}{2}n\right)^2 \underbrace{\left(e^{-1} - 1\right)}_{\neq 0}$$

$$\| f_n \|_\infty \geq \frac{\pi^2}{4}(1 - e^{-1}) n^2$$

Sur $[-A, A]$

$$|f(x) - f_n(x)| \leq A^2 \left| 1 - \exp\left(-\sin\frac{x}{n}\right) \right|$$
$$\leq A^2 \underbrace{\left| 1 - e^{\frac{A}{n}} \right|}_{\to 0}$$

$\frac{A}{n} < A$

il y a CVU

D'où, il n'y a pas de CVU.

Important

$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n\sqrt{x}}$

f) Soit $x \in]0, +\infty[$,

$$|f_n(x)| = \left| \frac{\sin(nx)}{n\sqrt{x}} \right| \leq \frac{1}{n\sqrt{x}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Donc, $f_n \xrightarrow{CVS} 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$f_n : x \longmapsto \frac{\sin(nx)}{n\sqrt{x}}$$

$$f_n' : x \longmapsto \frac{n\cos(nx)\, n\sqrt{x} - \sin(nx)\, n \times \frac{1}{2\sqrt{x}}}{n^2 x}$$

$$= \frac{\cos(nx)}{\sqrt{x}} - \frac{\sin(nx)}{2n x^{3/2}}$$

f_n' vaut 0 en $\quad n\cos(nx_0) - \frac{1}{2x_0}\sin(nx_0) = 0 \qquad x = x_0$

$$2nx_0 = \frac{\sin(nx_0)}{\cos(nx_0)} = \tan(nx_0)$$

$x_0 \in \left]0, \frac{\pi}{2n}\right[$

$$f_n(x_0) = \frac{\sin(nx_0)}{n\sqrt{x_0}} = \frac{\cos(nx_0)\, 2nx_0}{n\sqrt{x_0}} = 2\sqrt{x_0}\cos(nx_0)$$

i) $x \in [0, \frac{1}{n}]$, $\quad \left| \frac{\sin(nx)}{n\sqrt{x}} \right| \leq \frac{nx}{n\sqrt{x}} \leq \sqrt{x} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$

ii) $x \geq \frac{1}{n}$ $\quad \left| \frac{\sin(nx)}{n\sqrt{x}} \right| \leq \frac{1}{n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$

$\| f_n \|_\infty \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \qquad$ CVU

c) (modifié) $f_n(x) = \dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}$ sur $\mathbb{R}$

$$f_n \xrightarrow{CVS} f \left\{ x \longmapsto \begin{array}{ll} -1 & \text{si } |x|>1 \\ 1 & \text{si } |x|<1 \\ 0 & \text{si } |x|=1 \end{array} \right.$$

Il n'y a pas de CVU car f est discontinue.

CVU sur $]1,+\infty[$?

Soit $a \in]1,+\infty[$

Sur $[a,+\infty[$

$\forall x \in [a,+\infty[$,

II g) $f_n(x) = \cos^n \dfrac{x}{\sqrt{n}}$

Soit $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \exp\left(n \ln\left(\cos \dfrac{x}{\sqrt{n}}\right)\right)$

$f_n(x) = \exp\left(n \ln\left(1 - \dfrac{x^2}{2n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)\right)$

$= \exp\left(n\left(-\dfrac{x^2}{2n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)\right)$

donc $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \exp\left(\dfrac{-x^2}{2}\right)$

$f_n \xrightarrow{CVS} f$ avec $f : x \longmapsto \exp\left(\dfrac{-x^2}{2}\right)$

$\cos u = 1 - \dfrac{u^2}{2} + \alpha(u) u^4$

Soit $[0,a] \subset \mathbb{R}$

$f_n(x) = \exp\left(n \ln\left(\cos \dfrac{x}{\sqrt{n}}\right)\right)$

$\ln(1-v)$
$= -v + \beta(v) v^2$

$f_n(x) = \exp n \ln\left(1 - \dfrac{x^2}{n} + \alpha\left(\dfrac{x}{\sqrt{n}}\right)\dfrac{x^4}{n^2}\right)$

$= \exp\left(n\left(-\dfrac{x^2}{2n} + \alpha\left(\dfrac{x}{\sqrt{n}}\right)\dfrac{x^4}{n^2} + \beta\left(\dfrac{x^2}{n} - \alpha\left(\dfrac{x}{\sqrt{n}}\right)\dfrac{x^4}{n^2}\right)\right.\right.$
$\left.\left.\left(\dfrac{x^2}{2n} + \alpha\left(\dfrac{x}{\sqrt{n}}\right)\dfrac{x^4}{n^2}\right)^2\right)\right)$

α, β sont bornées sur les bornées

$$f_n(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{2} + \underbrace{\gamma(n,x)}_{\leq C \text{ sur } [0,a]} \frac{x^4}{n^2}\right)$$

, γ bornée sur $[0,a]$

$\forall x \in [0,a]$,

$$|f_n(x) - \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)|$$

$$= \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \left|\exp\left(\gamma(n,x)\frac{x^4}{n^2}\right) - 1\right|$$

$$\leq 1 \times \underbrace{\left|\exp\left(C\frac{|a|^4}{n^2}\right) - 1\right|}_{\text{indépendant de } x} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

1.2

$$F_n = \frac{1}{n}\int_0^n f(x+t) f(t)\, dt$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2\pi} \rfloor - 1} \int_{2\pi k}^{2\pi(k+1)} f(x+t) f(t)\, dt + \frac{1}{n}\int_{2\pi\lfloor \frac{n}{2\pi}\rfloor}^{n} f(x+t)f(t)\,dt$$

$$\int_{2\pi k}^{2\pi(k+1)} f(x+t)f(t)\,dt = \int_0^{2\pi} f(x+t+2\pi k)\, f(t+2\pi k)\,dt = \int_0^{2\pi} f(x+t)\, f(t)\,dt$$

$$\int_{\lfloor \frac{n}{2\pi}\rfloor 2\pi}^{n} f(x+t) f(t)\, dt = \int_0^{n - 2\pi\lfloor \frac{x}{2\pi}\rfloor} f(x+t)\, f(t)\,dt$$

$$F_n(x) = \underbrace{\frac{1}{n}\left\lfloor \frac{n}{2\pi}\right\rfloor}_{\to \frac{1}{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(x+t)\, f(t)\, dt + \frac{1}{n} \underbrace{\int_0^{n-2\pi\lfloor \frac{x}{2\pi}\rfloor} f(x+t)f(t)\,dt}_{|\cdot| \leq 2\pi \|f\|_\infty^2 \text{ bornée}}$$

$$\Rightarrow F = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x+t)\, f(t)\, dt$$

<u>Cauchy-Schwarz</u> : $|F(x)| \leq \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} f(x+t)^2\,dt\right)^{1/2}\left(\int_0^{2\pi} f(t)^2\,dt\right)^{1/2}$

$$\int_0^{2\pi} f(x+t)^2\,dt = \int_x^{2\pi+x} f(t)^2\,dt = \int_0^{2\pi} f(t)^2\,dt \Rightarrow |F(x)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)^2\,dt = F(0)$$

1.3. 1) Si $t=0$, $\forall n$, $f_n(0)=0$ donc $\ell(0)=0$

Si $t>0$, on cherche un point fixe de $\varphi(x)=\sqrt{x+t}$

$$\varphi(\ell)=\ell \iff \sqrt{t+\ell}=\ell$$

$$\iff \ell_\pm = \frac{1\pm\sqrt{1+4t}}{2}$$

Posons P_n : " $\forall t\geq 0,\quad P_n(t)\leq P_{n+1}(t)\leq \frac{1+\sqrt{1+4t}}{2}$ "

$\underline{n=0}$, $P_0(t)=0\leq P_1(t)=\sqrt{t}\leq \frac{1+\sqrt{1+4t}}{2}$

$n\to n+1$ $\quad P_n(t)\leq P_{n+1}(t)\leq \frac{1+\sqrt{1+4t}}{2}$

$$\varphi \nearrow \quad P_{n+1}(t)\leq P_{n+2}(t)\leq \varphi(\ell)=\ell$$

$$\ell(t)=\begin{cases} 0 & \text{si } t=0 \\ \frac{1+\sqrt{1+4t}}{2} & \text{si } t>0\end{cases}$$

2) Non. discontinuité en 0.

3) $\forall t>0$, $\quad \varphi_t'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+t}}$

$$f_{n+1}(t)=\varphi_t(f_n(t))$$

$$|f_{n+1}(t)-\ell(t)| = |\varphi(f_n(t))-\varphi(\ell)|$$

$$\leq \|\varphi'\|_{[f_n(t),\ell]}\,|f_n(t)-\ell|$$

$$|f_{n+1}(t)-\ell(t)| \leq \frac{|f_n(t)-\ell(t)|}{2\sqrt{f_n(t)+t}} \leq \frac{|f_n(t)-\ell(t)|}{2 f_{n+1}(t)}$$

4) Soit $a>0$,

$$|f_n(t)-\ell(t)| \leq \frac{|f_{n-1}(t)-\ell(t)|}{2 f_n(t)}$$

$$\leq \frac{|f_1(t)-\ell(t)|}{2^{n-1} f_n(t)\cdots f_2(t)} \cancel{\leq \frac{1}{2^{n-1} f_2(a)^{n-1}} \times \underbrace{\left|\sqrt{t}-\left(\frac{1+\sqrt{4t+1}}{2}\right)\right|}_{\text{bornée}}}$$

$$\left|\sqrt{t+\tfrac{1}{2}}-\sqrt{t}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}}$$

$$\left|\sqrt{t}-\sqrt{t+\tfrac{1}{4}}-\tfrac{1}{2}\right| \leq \frac{1}{2}+\left\|\sqrt{t}-\sqrt{t+\tfrac{1}{4}}\right\|_\infty$$

$$\leq \frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

$$\leq \frac{M}{2^{n-1} f_n(a) \cdots f_k(a) f_{k-1}(a) \cdots f_2(a)}$$ à partir de k $2 f_k(a) > 1$

$$\leq \frac{C}{(2 f_k(a))^{n-k}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$ $2 f_k(a) \to 1 + \sqrt{1+4a}$

1.4.

$U_{n+1} = a + \sin U_n$, $U_0 = x$, $x \in]-1, 1[$

$f(x) = a + \sin x$, $x - f(x) = g(x)$ $g'(x) = 1 - \cos x > 0$ sauf sur $2\pi\mathbb{Z}$

donc $g \nearrow_{-\infty}^{+\infty}$ $\to$ point fixe unique $l(a)$

i) CV

ii) $l(a) = a + \sin l(a)$

$|\sin p - \sin q|$
$= 2\left|\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\right|$
$\leq 2\left|\underbrace{\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)}_{\neq 0}\right|$
$< 2\left|\frac{p-q}{2}\right|$

$|U_{n+1} - l(a)| = |\sin U_n - \sin l(a)| < |U_n - l(a)|$ $U_n \neq l(a)$

$|U_n - l(a)| \searrow d$.

Si $d > 0$, toutes VA de U_n, mettons l vérifient : $|l - l(a)| = d$

$l = \lim U_{\varphi(n)}$

$f(l) = \lim U_{\varphi(n)+1} \in Adh(U_n)$
$\mathcal{C}^0$

Or $|f(l) - l(a)| < |l - l(a)|$ NON !

Régularité :

l est la réciproque de $x \xrightarrow{h} x - \sin x$

homéo, l est $\mathcal{C}^0$, l est $\mathcal{C}^\infty$ au $V(a)$

$\Leftrightarrow$ $h'(a) \neq 0$

$\Leftrightarrow$ $a \notin 2\pi\mathbb{Z}$

$f\ x \mapsto f(x)$ avec $f(x)$ le seul valeur vérifiant $f(x) = x + \sin f(x)$

$f^{-1}\ y \mapsto y - \sin y$.

2.1

A infini et borné.

sinon, $\sup_{x\in A}|P(x)|$ n'est pas défini.

Si A infini, soit $P \in \mathbb{R}[X]$ t.q. $\sup_{x\in A}|P(x)| = 0$, alors $\forall x \in A$, $P(x) = 0$, P admet une infinité de racines, $P = 0$.

Si A fini, $P(X) = \prod_{x\in A}(X - x)$ vérifie $\sup_{x\in A}|P(x)| = 0$ mais $P \neq 0$, donc ce n'est pas une norme.

Pour que $\varphi : P \mapsto P(0)$ soit continue,

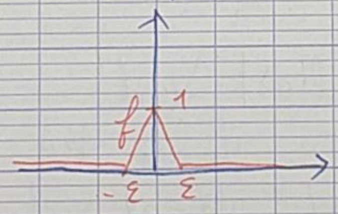
C.N.S. $0 \in \bar{A}$

Si $0 \in \bar{A}$, $(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$, $x_n \to 0$.

$$|P(x_n)| \leq \sup_{x\in A}|P(x)|$$

par la $\mathcal{C}^0$, $|P(0)| \leq \|P\|_A$, d'où la $\mathcal{C}^0$.

Si $0 \notin \bar{A}$, $\exists\, \varepsilon > 0$, $]-\varepsilon, \varepsilon[\cap A = \emptyset$



$A \subset [-M, M]$

$f \in \mathcal{C}([-M,M], \mathbb{R})$, par Weierstrass, il existe $(P_n) \in \mathbb{R}[X]^{\mathbb{N}}$ t.q. $P_n \to f$ CVU.

$A \subset [-M, -\varepsilon] \cup [\varepsilon, M]$

Comme $\sup_{x\in A} f = 0$ et $f(0) = 1$ $\quad \|P_n\|_A \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

$P_n(0) \to 1$

φ n'est pas continue.

2.2.

a) On fixe $x \in [0,1]$.

$$H_n : \begin{cases} P_n \in [0,1] \\ P_k(x) \nearrow \quad k = 1, \dots, n \\ P_k \leq \sqrt{x} \end{cases}$$

(H_0) : $P_0 = 0$, $P_0 \leq \sqrt{x}$

(H_1) : $P_1 = \frac{1}{2}x \leq \sqrt{x}$ car $x \leq 4$

$P_0(x), \; P_1(x) \nearrow$

$(H_n) \Rightarrow (H_{n+1})$

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2}(x - P_n^2(x))$$

$$x - P_n^2(x) \geq 0$$

$$P_{n+1}(x) \geq P_n(x)$$

$$\sqrt{x} - P_{n+1}(x) = \underbrace{(\sqrt{x} - P_n(x))}_{\geq 0} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{2}(\sqrt{x} + P_n(x))\right)}_{\geq 0} \geq 0$$

CC : $(P_n(x))_{n \in \mathbb{N}} \nearrow$ majoré par $\sqrt{x} \Rightarrow$ CV

$$\lim_{n \to +\infty} P_n(x) = \sqrt{x}$$

CVU : DINI

b) $Q_n(x) = P_n(x^2)$

Sur $[0,1]$, $Q_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} (x \mapsto \sqrt{x^2} = x)$

Sur $[-1,0]$, $Q_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} (x \mapsto \sqrt{x^2} = -x)$

Ainsi, $Q_n \xrightarrow[CVU]{} (x \mapsto |x|)$

Preuve directe

Soit $\varepsilon > 0$.

i) $x \in [0, \varepsilon^2]$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq P_n(x) \leq \sqrt{x} \leq \varepsilon$

$$|\sqrt{x} - P_n(x)| \leq \varepsilon$$

ii) $x \in [\varepsilon^2, 1]$: $0 \leq \sqrt{x} - P_{n+1}(x) = (\sqrt{x} - P_n(x)) \times \left(1 - \frac{1}{2}(\sqrt{x} + P_n(x))\right) \leq \left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon^2}\right)(\sqrt{x} - P_n(x))$

Soit $N : \left(1-\frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon^2}\right)^N \leq \varepsilon$, il vient, par récurrence, $\forall n \geq N$, $\forall x \in [\varepsilon^2, 1]$

$$0 \leq \sqrt{x} - P_{n+1}(x), \quad 0 \leq \sqrt{x} - P_{n+1}(x) \leq \left(1-\frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon^2}\right)^N \times 1 \leq \varepsilon$$

2.3. Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$

$g(x) = f(-x)$, $x \in [-1, 1]$

On pose $g(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } x \in [0,1] \\ f(-x) \text{ si } x \in [-1, 0] \end{cases}$

$\exists P \in \mathbb{R}[X]$, $\|P - g\|_\infty \leq \varepsilon$

On prend $Q(X) = \frac{1}{2}\left(P(X) + P(-X)\right)$

On a alors Q pair, et $\|Q - g\|_\infty \leq \varepsilon$

$\overline{\mathrm{Vect}\,(t^{d_n})}$, $d_n \uparrow_{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$ $= \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$ $\Leftrightarrow \sum \frac{1}{d_n}$ DV

2.4 On pose $g(\theta) = f(\mathrm{tg}(\frac{\theta}{2}))$ $\quad \theta \in]-\pi, \pi[$

$$g(-\pi) = g(\pi) = \lim_{\pm\infty} f$$

Alors $g \in \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Soit $\varepsilon > 0$.

$\mathcal{T}$ polynôme trigonométrique

Weierstrass : $\exists P \in \mathcal{T}$, $\|g - P\|_\infty \leq \varepsilon$

$$P(\theta) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos(k\theta) + b_k \sin(k\theta)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \lambda_k (\cos\theta)^k + \mu_k (\sin\theta)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \frac{\left(1 - \mathrm{tg}^2\frac{\theta}{2}\right)^k}{\left(1 + \mathrm{tg}^2\frac{\theta}{2}\right)^k} + \mu_k \frac{\left(2\,\mathrm{tg}\,\theta/2\right)^k}{\left(1 + \mathrm{tg}^2\frac{\theta}{2}\right)^k} = R(\mathrm{tg}\,\theta/2)$$

$\forall \theta \in]-\pi, \pi[$ $\quad |f(\mathrm{tg}\,\theta/2) - R(\mathrm{tg}\,\theta/2)| \leq \varepsilon$

2.5 $(f_n) \in F^{\mathbb{N}}$ t.q. $f_n \xrightarrow{CVU} f$

Posons $u_{T,n} = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f_n(t)\,dt$

Par hypothèse, $\forall n$, $\exists \lim_{T \to +\infty} u_{T,n} \triangleq b_n$

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall n \geq N$, $\|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon$

$$\left|\frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f_{n+p} - \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f_n\right| \leq \frac{1}{T}\int_{-T}^{T}|f_{n+p}-f| + \frac{1}{T}\int_{-T}^{T}|f-f_n|$$
$$\leq 4\,\varepsilon$$

$\Rightarrow |u_{T,n+p} - u_{T,n}| \leq 4\varepsilon$ pour tout T, p et n grand

$T \to +\infty$, $|l_{n+p} - l_n| \leq 4\varepsilon$

$\to l_n$ de Cauchy, donc CV vers l

Posons $a_T \overset{\Delta}{=} \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(t)\,dt$

$p \to +\infty \Rightarrow |a_T - u_{T,n}| \leq 4\varepsilon \quad \forall T$ si n grand

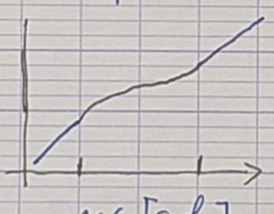
$|a_T - l| \leq |a_T - u_{T,n}| + |u_{T,n} - l_n| + |l_n - l|$

On fixe n t.q. $|a_T - u_{T,n}| < \varepsilon$ et $|l_n - l| < \varepsilon$

posons T t.q. $|u_{T,n} - l_n| < \varepsilon$

2.6 a) <u>Étape 1</u> On approche uniformément f par g $\mathcal{C}^1$ croissante

Convolution



Prolongeons f sur $\mathbb{R}$ en $\tilde{f}$ $\mathcal{C}^0$ croissante

$h \in]0,1]$: $g_h(x) = \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f$

$x \in [a,b]$, alors $(g_h - f)(x) = \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h}(f(t) - f(x))\,dt$

Par U.C. de $\tilde{f}$ sur $[a-1, b+1]$, il vient :

$\|g_h - f\|_{\infty, [a,b]} \xrightarrow{h \to 0^+} 0$ | $g_h'(x) = \frac{1}{2h}\left(\tilde{f}(x+h) - \tilde{f}(x-h)\right) \geq 0$

<u>Étape 2</u> Soit $\varepsilon > 0$.

$g_\varepsilon(x) = g(x) + \varepsilon x$

$\|g_\varepsilon - g\|_\infty \leq \varepsilon(b-a)$

$g_\varepsilon' = g' + \varepsilon \geq \varepsilon$ on choisit avec W, un

polynôme P t.q. $\|g_\varepsilon' - P\|_\infty \leq \varepsilon/2$

$P \geq \frac{\varepsilon}{2}$

$P > 0$ posons $Q(x) = g_\varepsilon(a) + \int_a^x P$, $Q \nearrow$

$\|Q - g_\varepsilon\|_\infty \leq \sup_{x \in [a,b]} \left| \int_a^x (P(t) - g_\varepsilon'(t))\, dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}(b-a)$

$\|f - Q\|_\infty = O(\varepsilon)$ uniforme

3.1 Indication : étudier $f_{n+1} - f_n$ et majorer

f_n positive, donc $\nearrow$ $1-x$

$f_1(x) = 1 + \int_0^x f_0(t-t^2)\, dt = 1 + x$ croissante

$f_2(x) = 1 + \int_0^x 1 + t - t^2\, dt = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3$

$(f_{n+1} - f_n)(x) = 1 + \int_0^x f_n(t-t^2)\, dt - f_n(x)$

$= \int_0^x f_n(t-t^2) - f_{n-1}(t-t^2)\, dt$

$f_n(x) \leq 1 + f_{n-1}(x)\, x$

$\leq 1 + (1 + f_{n-2}(x))\, x$

$\leq 1 + x + x\, f_{n-2}(x)$

$\leq 1 + x + x\,(1 + f_{n-3}(x))$

$\leq$

$f_1 - f_0 = x$

(HR) $\forall n \in \mathbb{N}^*\ \forall x \in [0,1]$, $|f_n(x) - f_{n-1}(x)| \leq \frac{x^n}{n!}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in [0,1]$,

$|f_{n+1}(x) - f_n(x)| = \left| \int_0^x (f_n - f_{n-1})(t-t^2)\, dt \right|$

$\leq \int_0^x \frac{(t-t^2)^n}{n!}\, dt \leq \int_0^x \frac{t^n}{n!}\, dt = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$

<u>Bilan</u> $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|f_{n+1} - f_n\|_\infty \leq \frac{1}{(n+1)!}$

$\sum (f_{n+1} - f_n)$ est NCV donc f_n est UCV

$y' = y$ $y(0) = 1$ $y_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x y_n(t)\, dt$

exp

$y_{n+1} - y_n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$

3.2

1) Soit $x \in \mathbb{R}^+$.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln\left(1+\frac{x}{n(1+x)}\right)$$

$\ln\left(1+\frac{x}{n(1+x)}\right) \searrow 0$ selon n

Leibniz $\rightarrow$ CV

2) $|R_n(x)| \leq \ln\left(1+\frac{x}{(n+1)(x+1)}\right) \leq \ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)$

$R_n(x) \xrightarrow{CVU} 0$ sur $\mathbb{R}^+$

3) CVN : $\|u_n\|_\infty = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$ DV

4) Trouver $\lim\limits_{+\infty} f$

$$\lim_{x\to+\infty} \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \ln\left(1+\frac{x}{k(1+x)}\right)$$

$$\underset{\substack{\text{correct}\\ \text{car CV}}}{=} \lim_{n\to+\infty} \underbrace{\lim_{x\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \text{''}}_{\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)}$$

Limite cherchée : $\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$

$$\lim \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^k \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \lim \ln\left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdots 2n+1 \cdot 2n+1}{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdots 2n \cdot 2n+2}\right)$$

$$= \lim 2\ln\frac{1 \cdot 3 \cdots (2n+1)}{2 \cdot 4 \cdots 2n} + \ln\frac{1}{2n+2}$$

$$2\ln\left(\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n+1)}{(2^n n!)^2}\right) + \ln\frac{1}{2n+2}$$

$$\left(\frac{(2n+1)!}{(2^n n!)^2}\right)^2 \times \frac{1}{2n+2}$$

$$\sim \left(\frac{(2n+1)\sqrt{4\pi n}}{2\pi n}\right)^2 \times \frac{1}{2n+2}$$

$$\sim \frac{(2n+1)^2 \times 4\pi n}{4\pi^2 n^2 \times (2n+2)}$$

$$\sim \frac{(2n+1)^2}{\pi n (2n+2)} \sim \frac{2}{\pi}$$

$\ln \frac{2}{\pi}$ est la limite cherchée

3.3. $\sum_{p \geq 1} \frac{1}{\sinh(px)}$

$f(x) = \sum_{p \geq 1} \frac{1}{\sinh(px)}$ Il y a CVS sur $\mathbb{R}_*^+$.

Soit $a > 0$.

$\forall n \in \mathbb{N}, \ \forall x \in [a, +\infty[$

$0 \leq \frac{1}{\sinh(nx)} \leq \frac{1}{\sinh(na)} \sim \frac{2}{e^{na}}$ tg d'une série CV et uniforme par rapport à x

Il y a CVN, donc CVU sur tout segment

f est $\mathcal{C}^0$ sur $]0, +\infty[$

<u>Dérivabilité</u>

$x \in [a, +\infty[$

$$|u_n'(x)| = 2n \frac{e^{-nx} + e^{nx}}{e^{2nx} + e^{-2nx} - 2} = 2n \frac{1 + e^{-2nx}}{e^{nx} + e^{-3nx} - 2}$$

$$\leq \frac{2n}{e^{na} - 2}$$

Donc, $\mathcal{C}^1$ sur $]a, +\infty[$

Il y a CVN sur $[1,+\infty[$

$\forall n \in \mathbb{N},\quad \frac{e^x}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{sh(kx)}\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$

pour $k \geq 2$ $\quad \frac{e^x}{sh\, kx} = \frac{2}{e^{(k-1)x} - e^{-(k+1)x}} \leq \frac{2}{e^{(k-1)} - \frac{1}{e}}$ série cv

par interversion de limites

$$\exists \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2} f(x) = 1 \quad \text{ie} \quad f(x) \sim \frac{2}{e^x}$$

en 0^+. Soit $x>0$ $\quad \frac{1}{sh(nx)} \geq \int_n^{n+1} \frac{dt}{sh(tx)} \geq \frac{1}{sh((n+1)x)}$

Donc $\quad f(x) \geq \int_1^{+\infty} \frac{dt}{sh(tx)} \geq f(x) - 1$

$$\int_1^{+\infty} \frac{2\,dt}{e^{tx} - e^{-tx}} = \int_1^{+\infty} \frac{1 - th^2\frac{tx}{2}}{2th\left(\frac{tx}{2}\right)}\,dt = \cdots = \frac{1}{x}\left[\log(th\,u)\right]_{\frac{x}{2}}^{+\infty}$$

$$f(x) \underset{0^+}{\sim} \frac{\log\left(\frac{1}{x}\right)}{x}$$

RM | $\quad \int R(e^x)\,dx = \int R(u)\,\frac{du}{u}$

$u = e^x$

$du = e^x dx$

3.3.2 Série de fonctions rationnelles

1) $\quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)} \quad u_n(x) = \frac{(-1)^n}{n!(x+n)} \quad p \geq 0,\ u_n^{(p)}(x) = \frac{(-1)^{n+p}}{n!} \frac{p!}{(x+n)^{p+1}}$

$$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-$$

Soit $A \in \mathbb{N}^*$. On enlève les pôles de $[-A, A]$

Soit $N = A+1$, $\sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$ est C^∞ sur $[-A,A] \setminus \mathbb{Z}^-$

$n \geq N+1$, soit $x \in [-A, A]$, $|u_n^{(p)}(x)| \leq \frac{p!}{n! \times 1}$ → libre $\|x$

La série $u_n^{(p)}$ est NCV sur $[-A, A]$

(cc) La somme f de $\sum u_n$ est C^∞ sur $\mathbb{D}$ et on peut dériver terme à terme.

2) $x g(x) - g(x+1)$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x}{n!(x+n)} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+1+n)}$$

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n x}{n!(x+n)} - \sum_{n=1}^{N+1} \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!(x+n)}$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{x+n}\left(\frac{(-1)^n x}{n!} - \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\right) - \frac{(-1)^N}{N!(x+N+1)}$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(x+n)\, n!}\left((-1)^n x - n(-1)^{n-1}\right) - \frac{(-1)^N}{N!(x+N+1)}$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n!}(-1)^n - \frac{(-1)^N}{N!(x+N+1)}$$

$$\xrightarrow[N\to+\infty]{} e^{-1} = \frac{1}{e}$$

4) En $+\infty$:

$$x g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x}{n! \underbrace{(x+n)}_{\text{borné par } 1}} \quad \text{CVN sur } [1,+\infty[$$

donc $x g(x) \to \frac{1}{e}$ par interversion des limites

En 0^+ :

$$g(x+1) \xrightarrow[x\to 0^+]{} g(1) \quad \text{et } g(1) = 1 - \frac{1}{e}$$

$$x g(x) - g(x+1) = \frac{1}{e}$$

$$g(x) = \frac{1}{x}\Big(\underbrace{g(x+1) + \frac{1}{e}}_{\xrightarrow[0^+]{} 1}\Big) \sim \frac{1}{x}$$

5) $$g(x) = \left(\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{m!}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{x(x+1)\cdots(x+n)}\right)$$

$$= \sum_{N=0}^{+\infty}\left(\sum_{m+n=N} \frac{(-1)^m}{m!\, x(x+1)\cdots(x+n)}\right)$$

$$\frac{1}{x(x+1)\cdots(x+n)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda_k}{x+k} \qquad \lambda_k = \frac{1}{-k(-k+1)\cdots 1\cdot 1 \cdots n-k}$$

$$= \frac{(-1)^k}{k!(n-k)!}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{x(x+1)\cdots(x+n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!} \frac{(-1)^k}{k!(x+k)} \right)$$

$$\overset{\text{Cauchy}}{=} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{1}{l!} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!(x+k)} \quad \text{ok!}$$

3.4 $\displaystyle\sum_{n\geq 1} x^n \frac{\sin nx}{n}$ $\quad x \in]-1,1[$ CV

$x=1$, ABEL, CV

$x=-1$, $\displaystyle\sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{-\sin n}{n}$

Soit $a \in]0,1[$

On regarde sur $[-a,a]$

$$U_n(x) = x^n \frac{\sin(nx)}{n}$$

$$U_n'(x) = \frac{1}{n}\left(n\, x^{n-1} \sin(nx) + n\, x^n \cos(nx)\right)$$

$$= x^{n-1}\left(\sin(nx) + x\cos(nx)\right)$$

$$|U_n'(x)| \leq 2\,|x|^{n-1} \leq \underbrace{2a^{n-1}}_{\text{t.g. d'une série CV}}$$

Donc, $\displaystyle f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} U_n'(x)$ pour $x \in [-a,a]$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1}\sin(nx) + x^n \cos nx$$

$$= \mathrm{Im}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1} e^{inx}\right) + \mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} x^n e^{inx}\right)$$

$$= \mathrm{Im}\left(\frac{e^{ix}}{1-xe^{ix}}\right) + \mathrm{Re}\left(\frac{xe^{ix}}{1-xe^{ix}}\right)$$

$$= \mathrm{Im}\left(\frac{\cos x + i\sin x}{1 - x\cos x - ix\sin x}\right) + \mathrm{Re}\left(\frac{1}{\frac{1}{x}e^{-ix} - 1}\right)$$

$$= \mathrm{Im}\left(\frac{(\cos x + i\sin x)(1 - x\cos x + i x\sin x)}{(1-x\cos x)^2 + x^2(\sin x)^2}\right) + \mathrm{Re}()$$

$$= \frac{1}{1-2x\cos x + x^2}\Big(\cos x\,(x\sin x) + \sin x\,(1-x\cos x)\Big)$$

$$= \frac{1}{1-2x\cos x+x^2}\Big(\sin x\Big) + \mathrm{Re}()$$

$$= \frac{\sin x}{1-2x\cos x+x^2} + \mathrm{Re}\left(\frac{1}{\frac{1}{x}(\cos x - i\sin x) - 1}\right)$$

$$= \frac{\sin x}{1-2x\cos x+x^2}\ \mathrm{Re}\left(\frac{\frac{1}{x}\cos x - 1 + i\frac{1}{x}\sin x}{\left(\frac{1}{x}\cos x - 1\right)^2 + \frac{\sin^2 x}{x^2}}\right)$$

$$= \frac{\sin x}{1-2x\cos x+x^2} + \frac{\frac{1}{x}\cos x - 1}{1 - \frac{2}{x}\cos x + \frac{1}{x^2}}$$

$$= \frac{\sin x - x^2 + x\cos x}{1-2x\cos x+x^2}$$

$$\left(\arctan\left(\frac{x\sin x}{1-x\cos x}\right)\right)' = \frac{\frac{(1-x\cos x)(\sin x + x\cos x) + (x\sin x)(\cos x - x\sin x)}{(1-x\cos x)^2}}{1 + \left(\frac{x\sin x}{1-x\cos x}\right)^2}$$

$$= \frac{\sin x + x\cos x - x\cos x\sin x - x^2\cos^2 x + x\sin x\cos x - x^2\sin^2 x}{(1-x\cos x)^2 + (x\sin x)^2}$$

$$= \frac{\sin x - x^2 + x\cos x}{1 - 2x\cos x + x^2}$$

$f(0) = 0 = \arctan\left(\frac{0\sin 0}{1-0\cos 0}\right)$

Ayant les même dérivée, $f(x) = \arctan\left(\frac{x\sin x}{1-x\cos x}\right)$

-1, 1[

Obs $\sum \frac{\sin(nx)}{n}$ CVU sur $[\frac{1}{2}, 1]$

En effet, $\left|\sin x + \dots + \sin nx\right| = \left|\frac{\sin(\frac{n+1}{2})x \sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right|$

$$\le \frac{1}{\sin\frac{x}{2}} \le \underbrace{\frac{1}{\sin\frac{1}{4}}}_{M}$$

ABEL, ① $\left|\sum_p^q \frac{\sin kx}{k}\right| \le \frac{2}{p} \cdot \frac{1}{\sin\frac{1}{4}}$

② $\sum_p^N x^n \frac{\sin nx}{n}$

$$|V_p| = \left|\sum_{n=p}^{n=N} \frac{\sin nx}{n}\right| \le \frac{2}{p} M$$

$\Rightarrow x_n \downarrow 0 \quad \left|\sum_p^N x^n \frac{\sin nx}{n}\right| \le \frac{4}{p} M x^p \le \underbrace{\frac{4}{p} M}_{\to \text{CCU}}$

Double limite :

$x = 1 \quad \sum \frac{\sin n}{n} = \text{arctg}\left(\frac{\sin 1}{1-\cos 1}\right) = \text{arctg}\left(\text{ctg}\frac{1}{2}\right)$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}$$

3.5 $\quad D =]-1, 1[^2$

C^0 : Soit $(x_0, y_0) \in]-1, 1[^2$

On fixe a t.q. $\max(|x_0|, |y_0|) < a < 1$

Pour tout $\begin{cases} n \in \mathbb{N}, \\ (x,y) \in \underbrace{[-a,a]^2}_{\text{voisinage de } (x_0, y_0)} \end{cases}$

$$|u_n(x,y)| \le \ln(1 + 2a^{2n}) \le 2a^{2n}$$

il y a CVN au $V(x_0, y_0)$

DP $\left|\frac{\partial u_n(x,y)}{\partial x}\right| = \frac{|2n x^{2n-1}|}{1 + x^{2n} + y^{2n}} \le 2n a^{2n-1}$ CV

À y fixe, $\sum \frac{\partial u_n}{\partial x}(x,y)$ CVN pour $x \in [-a, a]$

$$\to \exists \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n x^{2n-1}}{1 + x^{2n} + y^{2n}}$$

(e) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ est $\mathcal{C}^0$ car $\sum \frac{2n\, x^{2n-1}}{1+x^{2n}+y^{2n}}$ CVN

sur $[-a,a]^2$

2.2

a) Soit $n \in \mathbb{N}$, $P_n(x) - \sqrt{x}$

$$= P_{n-1}(x) + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}P_{n-1}(x)^2 - \sqrt{x}$$

$$= \frac{1}{2}(\sqrt{x}-1)^2 - \frac{1}{2}(P_{n-1}(x)-1)^2$$

$$= \frac{1}{2}(\sqrt{x}+P_{n-1}(x)-2)(\sqrt{x}-P_{n-1}(x))$$

On fixe $x \in [0,1]$.

$$H_n : \begin{cases} (P_k(x))_{k\leq n} \nearrow \\ P_k(x) \leq \sqrt{x} \quad \text{pour tout } k \in [\![0,n]\!] \end{cases}$$

H_0 : $P_0(x) = 0 \leq \sqrt{x}$

H_1 : $P_1(x) = \frac{x}{2}$, $(P_0(x), P_1(x)) \nearrow$

$\frac{x}{2} \leq \sqrt{x}$ car $x \leq 4$

$(H_n) \Rightarrow (H_{n+1})$

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2}\underbrace{(x - P_n(x)^2)}_{\geq 0} \geq P_n(x)$$

$$P_{n+1}(x) - \sqrt{x} = \frac{1}{2}\underbrace{(\sqrt{x}+P_n(x)-2)}_{\leq 0}\underbrace{(\sqrt{x}-P_n(x))}_{\geq 0} \leq 0$$

$$P_{n+1}(x) \leq \sqrt{x}$$

Donc, $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, majorée, donc converge, mettons vers l.

$$l = l + \frac{1}{2}(x - l^2) \Rightarrow l = \sqrt{x}$$

Donc (P_n) converge simplement vers $\sqrt{x}$ sur $[0,1]$

Sur $[0,1]$, $\forall n$, $\forall x$, $P_n(x) \leq P_{n+1}(x)$, P_n sont continues, $\sqrt{x}$ aussi, par le théorème de DINI, (P_n) converge uniformément vers $\sqrt{x}$

b) Soit $Q_n(x) = P_n(x^2)$

Sur $[0,1]$, $Q_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CVU} (x \mapsto \sqrt{x^2} = x)$

Sur $[-1,0]$, $Q_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CVU} (x \mapsto \sqrt{x^2} = |x|)$

Ainsi, $Q_n \xrightarrow[CVU]{} (x \mapsto |x|)$

2.6

a) Prolongeons f sur $[a-1, b+1]$ en $\tilde{f}$ $\mathcal{C}^0$, croissante.

Soit $h \in]0,1]$,

$$g_h : x \longmapsto \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f(t)\,dt$$

$$g_h' : x \longmapsto \frac{1}{2h}\left(f(x+h) - f(x-h)\right) \geq 0$$

$$g_h(x) - f(x) = \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} (f(t) - f(x))\,dt$$

$\|g_h(x) - f(x)\|_{\infty,[a,b]} \xrightarrow[h\to 0]{} 0$ par UC de $\tilde{f}$

Soit $\varepsilon > 0$, il existe $h \in]0,1]$ t.q.

$$\|g_h(x) - f(x)\|_{\infty,[a,b]} \leq \varepsilon .$$

Soit $g_{h,\varepsilon} : x \longmapsto g_h(x) + \varepsilon(x-a)$

$$g_{h,\varepsilon}' : x \longmapsto g_h'(x) + \varepsilon \geq \varepsilon$$

Par Weierstrass, il existe P un polynome t.q.

$$\|g_{h,\varepsilon}' - P\|_{\infty,[a,b]} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

$$P \geq \frac{\varepsilon}{2} \text{ sur } [a,b]$$

Donc, $Q(x) = g_h(a) + \int_a^x P(t)\,dt$ est croissant, polynomiale, et $|Q(x) - g_{h,\varepsilon}(x)| = \left|\int_a^x (P(t) - g_{h,\varepsilon}'(t))\,dt\right|$

$$\leq (b-a) \times \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\|Q - f\|_{\infty,[a,b]} \leq \frac{(b-a)}{2}\varepsilon + (b-a)\varepsilon + \varepsilon \leq \underset{\text{indépendant de } \varepsilon}{\underbrace{M}}\,\varepsilon .$$

b) De même, pour $h \in]0,1]$,
Soit $g_h : x \longmapsto \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} \tilde{f}(t)\,dt$

g_h est $\mathcal{C}^1$, convexe (par convexité de $\tilde{f}$)
g_h' est donc croissante.
par a), soit $\varepsilon > 0$, il existe P un polynôme croissante t.q. $\| g_h' - P \|_{\infty,[a,b]} \leq \varepsilon$

Soit $Q(x) = g_h(a) + \int_a^x P(t)\,dt$ polynômiale, convexe car Q' est croissante.
Et $\| Q - g_h \|_{\infty,[a,b]} \leq \| g_h' - P \|_\infty [a,b] \leq \varepsilon [a,b]$

Donc, $\| Q - f \|_\infty \leq \| Q - g_h \| + \| g_h - f \|$
$\leq \varepsilon [a,b] + \varepsilon$ pour h convenable.

3.3.1

$x = 0,\quad n^0 e^{-n\times 0} = 1$, non défini.

$x < 0,\quad \frac{1}{n^{|x|}} e^{n|x|} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, non défini.

$x > 0,\quad n^x e^{-nx} = \frac{n^x}{e^{nx}} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, défini.

Soit $g : t \mapsto t^x e^{-tx}$

$$g' : t \longmapsto x t^{x-1} e^{-tx} - x t^x e^{-tx}$$
$$= x t^{x-1} e^{-tx}(1-t)$$

g est décroissante sur $[1, +\infty[$

$$e^{-x} + \int_1^{+\infty} t^x e^{-tx} dt \geq f(x) \geq \int_1^{+\infty} t^x e^{-tx} dt$$

$$\int_1^{+\infty} t^x e^{-tx} dt$$
$$\underset{u=xt}{=} \int_x^{+\infty} \left(\frac{u}{x}\right)^x e^{-u} \frac{du}{x}$$
$$= \frac{1}{x^{x+1}} \int_x^{+\infty} u^x e^{-u} du$$
$$= \frac{1}{x^{x+1}} \Big(\underbrace{\Gamma(x+1)}_{\sim \Gamma(1)} - \underbrace{\int_0^x u^x e^{-u} du}_{\to 0} \Big)$$

Donc, $f(x) \sim \frac{1}{x^{x+1}}$.

3.3 Soit $x > 0$, $\frac{1}{\sinh(px)} = \frac{2}{e^{px} - e^{-px}} = e^{-px} \frac{2}{1 - e^{-2px}}$

$$\frac{1}{\sinh(px)} \underset{p \to +\infty}{\sim} e^{-px} \frac{2}{1} \sim 2 e^{-px}$$

Donc CVS sur $]0, +\infty[$

Soit $x_0 > 0$, $a > 0$ t.q. $a < x_0$

Sur $[a, +\infty[$,

$$\sum_{p \geq 1} \left| \frac{1}{\sinh(px)} \right| \leq \underbrace{\sum_{p \geq 1} \frac{1}{\sinh(pa)}}_{CV}$$

Donc, CVU, il y a continuité en x_0.

Continue sur $]0, +\infty[$.

Sur $[a, +\infty[$, $\left(\frac{1}{\sinh(px)} \right)' = \frac{-\cosh(px)\, p}{(\sinh(px))^2} = -\frac{\frac{e^{px} + e^{-px}}{2} p}{\left(\frac{e^{px} - e^{-px}}{2} \right)^2}$

$$= -2 \frac{e^{-px} + e^{-3px}}{1 - 2e^{-2px} + e^{-4px}} \times p \underset{p \to +\infty}{\sim} \underbrace{\frac{-2 p e^{-px}}{1}}$$

$$\left| \left(\frac{1}{\sinh(px)} \right)' \right| \leq 2p \frac{e^{-pa} + e^{-3pa}}{1 - 2e^{-2pa} + e^{-4pa}} \sim \underline{2pe^{-pa}}$$ tg d'une série CV

CVN, CVU. tg d'une série CV.

Donc, $\sum_{p \geq 1} \frac{1}{\sinh(px)}$ est de $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

Par CVU, $\lim_{x \to +\infty} \sum \frac{1}{\sinh(px)} = \sum \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sinh(px)}$

$$= 0$$

$$\frac{e^x}{2} \sum_{p \geq 1} \frac{1}{\sinh(px)} = \sum_{p \geq 1} \frac{e^x}{e^{px} - e^{-px}}$$

$$= \underbrace{\frac{e^x}{e^x - e^{-x}}}_{\to 1} + \underbrace{\sum_{p \geq 2} \frac{1}{e^{(p-1)x} - e^{-(p+1)x}}}_{\to 0}$$

Donc $f(x) \underset{+\infty}{\sim} 2e^{-x}$

en 0^+, $\displaystyle\sum_{p\geq 1} \frac{2}{e^{px}-e^{-px}}$

$$g : t \longmapsto \frac{2}{e^{tx}-e^{-tx}}$$

$$g' : t \longmapsto \frac{-2(x e^{tx}+xe^{-tx})}{e^{2tx}-2+e^{-2tx}} < 0 \text{ sur }]0,+\infty[$$

Donc
$$f(x) \geq \int_1^{+\infty} \frac{dt}{sh(xt)} \geq f(x) - \frac{1}{sh x}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{sh(xt)}$$

$$u = xt$$

$$= \int_1^{+\infty} \frac{2}{e^{xt}-e^{-xt}}\, dt = \int_x^{+\infty} \frac{2}{e^u-e^{-u}} \frac{du}{x}$$

$v = e^u$
$dv = e^u du$
$= v\,du$

$$= \frac{1}{x}\int_{e^x}^{+\infty} \frac{2}{v-\frac{1}{v}} \times \frac{dv}{v}$$

$$= \frac{1}{x}\int_{e^x}^{+\infty} \frac{2}{v^2-1}\, dv$$

$$= \frac{1}{x}\Big[\ln(v-1) - \ln(v+1)\Big]_{e^x}^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{x}\left[\ln\left(\frac{v-1}{v+1}\right)\right]_{e^x}^{+\infty} = \frac{1}{x}\Big(0 - \ln\underbrace{\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)}_{\sim \frac{x}{2}}\Big)$$

$$\sim \frac{1}{x}\ln\left(\frac{2}{x}\right)$$

3.5 Sur $[0,1[\times [0,1[$,
Soit $(x_0, y_0) \in [0,1[^2$,
$$\ln(1+x_0^{2n}+y_0^{2n}) \leq \underbrace{x_0^{2n}+y_0^{2n}}_{\text{t.g. d'une série CV}}$$

Donc, CVS sur $[0,1[\times[0,1[$.
Sur un compact $K \subset [0,1[^2$, il existe $a<1$ t.q.
$K \subset [0,a]^2$, $\ln(1+x_0^{2n}+y_0^{2n}) \leq \ln(1+2a^{2n}) \leq 2a^{2n}$
CVN sur K, donc CVU, donc $\mathcal{C}^0$ sur tout compact de $[0,1[^2$.

3.4 Soit $f_n : x \longmapsto x^n \dfrac{\sin(nx)}{n}$

$$f_n' : x \longmapsto n x^{n-1} \frac{\sin(nx)}{n} + n x^n \frac{\cos(nx)}{n}$$
$$= x^{n-1}\left(\sin(nx) + x\cos(nx)\right)$$

Soit $x_0 \in]-1,1[$, $a>0$ t.q. $|x_0|<a<1$

$$\left|x^n \frac{\sin(nx)}{n}\right| \leq \frac{1}{n} a^n \leq \underset{\text{t.g. d'une série CV.}}{a^n}$$

CVN, CVU sur $[-a,a]$, donc $\mathcal{C}^0$ en x_0.

$$|f_n'(x)| \leq a^{n-1}(1+a) \quad \text{sur } [-a,a]$$
$$\leq \underbrace{a^{n-1} + a^n}_{\text{t.g. d'une série CV}}$$

donc, CVN, CVU sur $[-a,a]$, donc $\mathcal{C}^1$ en x_0.

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1}\left(\sin(nx) + x\cos(nx)\right)$$
$$= \operatorname{Im}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1} e^{inx}\right) + \operatorname{Re}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} x^n e^{inx}\right)$$
$$= \frac{\sin x - x^2 + x\cos x}{1 - 2x\cos x + x^2}$$

$$\left(\arctan\left(\frac{x\sin x}{1-x\cos x}\right)\right)' = f'(x)$$

$f(0)=0 \qquad \arctan\left(\dfrac{0}{1-0}\right) = 0$

Ayant les mêmes dérivées, $f(x) = \arctan\left(\dfrac{x\sin x}{1-x\cos x}\right)$

Sur $[\frac{1}{2}, 1]$, soit $A_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \sin(kx)x^k$

$$|A_n(x)| = \left|\operatorname{Im}\left(\sum_{k=1}^{n} e^{ikx} x^k\right)\right| = \left|\frac{xe^{ix} - e^{i(n+1)x}x^{n+1}}{1-e^{ix}x}\right|$$
$$\leq \frac{2}{|1-e^{ix}x|} \leq \frac{2}{(1-x\cos x)^2 + (x\sin x)^2} \leq \left.\frac{2}{\frac{1}{4}\left(\sin\frac{1}{2}\right)^2}\right\} M > 0$$

(indépendant de x)

$$\frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+1}}{n+1} = \frac{x^n(n+1-nx)}{n(n+1)}$$

$$\sum \frac{\sin(nx)}{n} x^n$$

$$\sum_{k=p}^{q} \frac{\sin(kx)}{k} x^k = \sum_{k=p}^{q} \frac{A_k - A_{k-1}}{k}$$

$$= \sum_{k=p}^{q} \frac{A_k}{k} - \sum_{k=p-1}^{q-1} \frac{A_k}{k+1}$$

$$= \frac{A_q}{q} + \sum_{k=p}^{q-1} A_k \frac{1}{k(k+1)} - \frac{A_{p-1}}{p}$$

$$\left|\sum_{k=p}^{q} \frac{\sin(kx)}{k} x^k\right| \le M \underbrace{\left(\frac{1}{q} + \frac{1}{p} + \sum_{k=p}^{q-1} \frac{1}{k(k+1)}\right)}_{\xrightarrow[p\to+\infty]{} 0}$$

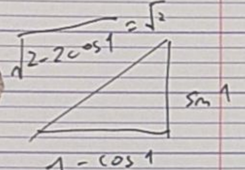
Donc CVU sur $[\frac{1}{2}, 1]$

Ainsi, $\sum \frac{\sin(n)}{n} = \sum \lim_{x\to 1} x^n \frac{\sin(nx)}{n} = \lim_{x\to 1} f(x)$

$$= \arctan\left(\frac{\sin 1}{1-\cos 1}\right)$$

$$= \arctan\left(\frac{1}{tg\frac{1}{2}}\right) = \frac{\pi}{2} - \text{arctg}\left(tg\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}$$



$$\frac{\sin 1}{1-\cos 1} = \frac{2\sin\frac{1}{2}\cos\frac{1}{2}}{2\sin^2\frac{1}{2}} = \frac{1}{\tan\frac{1}{2}}$$

Sur $[-1, -\frac{1}{2}]$

Soit $A_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \sin(kx) x^k$

$$|A_n(x)| = \left|\text{Im}\left(\sum_{k=1}^{n} e^{ikx} x^k\right)\right| \le \frac{2}{|1-e^{ix}x|} \le \underbrace{\frac{2}{\frac{1}{4}(\sin\frac{1}{2})^2}}_{M}$$

De même, CVU sur $[-1, -\frac{1}{2}]$

Donc $\sum \frac{(-1)^n \sin(n)}{n} = (-1) \sum \frac{(-1)^n \sin(-n)}{n}$

$$= (-1)\arctan\left(\frac{-\sin(-1)}{1+\cos(1)}\right)$$

$$= -\arctan\left(tg\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{2\sin\frac{1}{2}\cos\frac{1}{2}}{2\cos^2\frac{1}{2}}$$

3.2

1) Soit $x \in \mathbb{R}^{+,*}$.

$$U_n(x) = (-1)^n \underbrace{\ln\left(1+\frac{x}{n(1+x)}\right)}_{\searrow} \quad \text{donc CV}$$

pour 0, $U_n(0) = 0$

Donc, CVS sur $\mathbb{R}^+$.

2) $$|R_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^n \ln\left(1+\frac{x}{n(1+x)}\right)\right|$$

$$\leq \ln\left(1+\frac{x}{(n+1)(1+x)}\right) \leq \ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right) \to 0$$

Donc, CVU sur $\mathbb{R}^+$.

3) $|U_n(x)| \leq \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$ t.g. d'une série DV

Donc, pas de CVN.

3.1

$f_0(x) = 1$

$f_1(x) = 1 + \int_0^x 1 \, dt = 1+x$

$(f_1 - f_0)(x) = x$

(HR) $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in [0,1], \quad |f_n(x) - f_{n-1}(x)| \leq \frac{x^n}{n!}$

pour $n+1$,

$$|f_{n+1}(x) - f_n(x)|$$

$$= \left|\int_0^x f_n(t-t^2)\,dt - \int_0^x f_{n-1}(t-t^2)\,dt\right|$$

$$\leq \int_0^x |f_n(t-t^2) - f_{n-1}(t-t^2)|\,dt$$

$$\leq \int_0^x \frac{(t-t^2)^n}{n!}\,dt$$

$$\leq \int_0^x \frac{t^n}{n!}\,dt$$

$$\leq \frac{1}{(n+1)!} x^{n+1}$$

D'où, $\|f_{n+1} - f_n\|_{\infty,[0,1]} \leq \frac{1}{(n+1)!}$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \text{ CV}$$

Donc, $(f_{n+1} - f_n)$ est NCV, donc f_n est UCV

3.3.2

1) Si $x > 0$, $\left(\frac{1}{n!(x+n)}\right)$ est $\downarrow\downarrow$, donc c'est une série alternée, donc $g(x)$ est définie.
Si $x = -k$ avec $k \in \mathbb{N}^*$, il y a un terme dans $g(x)$, $\frac{(-1)^k}{k!(-k+k)}$ n'est pas défini, donc $g(x)$ n'est pas défini.
Sinon $x < 0$ mais $|x| \notin \mathbb{N}$, $\frac{1}{n!(x+n)}$ est $\downarrow\downarrow$ a.p.c.r donc défini.

$$D = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_-.$$

Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

$$\frac{d}{dx} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)} = \frac{(-1)^n}{n!} \times \frac{-1}{(x+n)^2}$$

5) $$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{x(x+1)\cdots(x+n)}$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!(n-k)!(x+k)}$$
$$= \sum_{0 \leq k \leq n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n-k)!(x+k)}$$
$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,h!\,(x+k)}$$
$$= \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{1}{h!} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!(x+k)}$$
$$= e\,g(x)$$