Copies 1/5

TSAI
Bing-Shiun
MP*4
28/11/2018

DM : Maths
(1983, X, M')

A — Quelques points à compléter, bonne rédaction

Partie I

1. Soit $q \geq 1$,

$$S_q'(x) = \sum_{p=1}^{q} \frac{\cos 2p\pi x}{p\pi} \times 2p\pi$$

$$= 2 \times \sum_{p=1}^{q} \mathrm{Re}\left(e^{i2p\pi x}\right)$$

$$= 2 \times \mathrm{Re}\left(\sum_{p=1}^{q} e^{i2p\pi x}\right)$$

$$= 2 \times \mathrm{Re}\left(\frac{e^{i2\pi x} - e^{i2(q+1)\pi x}}{1 - e^{i2\pi x}}\right) \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$$

$$= 2 \times \mathrm{Re}\left(\frac{e^{i(q+2)\pi x}}{e^{i\pi x}} \times \frac{-2i \sin q\pi x}{-2i \sin \pi x}\right)$$

$$= 2 \times \frac{\sin q\pi x}{\sin \pi x} \cos (q+1)\pi x$$

$$= \frac{\sin (2q+1)\pi x}{\sin \pi x} + \frac{\sin(-\pi x)}{\sin \pi x}$$

S_q' est prolongeable par continuité sur $\mathbb{Z}$, donc on peut l'intégrer.

$$S_q(x) = \int_0^x S_q'(u)\,du + S_q(0)$$

$$S_q(x) = \int_0^x \frac{\sin(2q+1)\pi u}{\sin \pi u} - 1 \, du + 0$$

$$= \int_0^x \frac{\sin(2q+1)\pi u}{\sin \pi u} du - x$$

2\. a.

$$\varphi(u) \underset{0}{=} \frac{\pi u - \pi u + \frac{1}{6}(\pi u)^3 + o(u^3)}{(\pi u - \frac{1}{6}(\pi u)^3 + o(u^3))\pi u}$$

$$\underset{0}{=} \frac{\frac{1}{6}(\pi u) + o(u)}{1 - \frac{1}{6}(\pi u)^2 + o(u^2)}$$

d'où $\varphi(u)$ admet une limite finie en 0 qui vaut 0. Donc, φ est continue.

Sur $]-1,1[\setminus \{0\}$,

$$\varphi'(u) = \frac{-\pi \cos \pi u}{\sin^2 \pi u} + \frac{1}{\pi u^2}$$

d'où, $\varphi'(u)$ est $\mathcal{C}^0$ sur $]-1,1[\setminus \{0\}$.

$$\varphi'(u) \underset{0}{=} \frac{-\pi \cos(\pi u) \times \pi u^2 + \sin^2 \pi u}{\pi u^2 \sin^2 \pi u}$$

$$\underset{0}{=} \frac{-\pi\left(1 - \frac{1}{2}(\pi u)^2 + o(u^2)\right)\pi u^2 + \left(\pi u - \frac{1}{6}(\pi u)^3 + o(u^3)\right)^2}{\pi u^2 \left(\pi u - \frac{1}{6}(\pi u)^3 + o(u^3)\right)^2}$$

$$\underset{0}{=} \frac{-\pi^2 u^2 + \frac{1}{2}(\pi u)^4 + o(u^4) + \pi^2 u^2 - \frac{1}{3}(\pi u)^4 + o(u^4)}{\pi^3 u^4 - \frac{1}{3}\pi^5 u^6 + o(u^6)}$$

$$\underset{0}{=} \frac{\frac{1}{6}(\pi u)^4 + o(u^4)}{\pi^3 u^4 - \frac{1}{3}\pi^5 u^6 + o(u^6)}$$

$$\underset{0}{=} \frac{1}{6} \times \frac{\pi + o(1)}{1 - \frac{1}{3}\pi^2 u^2 + o(u^2)}$$

d'où $\lim_{\substack{u\to 0\\ u\neq 0}} \varphi'(u) = \frac{1}{6}\pi$

$$\frac{\varphi(u)-\varphi(0)}{u} \underset{0}{=} \frac{\frac{1}{6}\pi + o(1)}{1-\frac{1}{6}(\pi u)^2+o(u^2)}$$

d'où, $\varphi'(0) = \frac{1}{6}\pi$

Donc, φ' est continue en 0.

Ainsi, φ est de classe $\mathcal{C}^1$.

b. Soit $q \geq 1$.

$\forall x \in [0, \frac{1}{2}]$,

$$\left|S_q(x) + x - \frac{1}{\pi}\int_0^{(2q+1)\pi x} \frac{\sin v}{v}\,dv\right|$$

$$= \left|\int_0^x \frac{\sin(2q+1)\pi u}{\sin \pi u}du - \frac{1}{\pi}\int_0^x \sin(2q+1)\pi u \,\frac{du}{u}\right|$$

$$= \left|\int_0^x \sin(2q+1)\pi u\,\varphi(u)\,du\right|$$

$$= \left|\left[-\frac{\cos(2q+1)\pi u\,\varphi(u)}{(2q+1)\pi}\right]_0^x + \int_0^x \frac{\cos(2q+1)\pi u\,\varphi'(u)}{(2q+1)\pi}du\right|$$

$$\leq \frac{1}{(2q+1)\pi}\left|-\cos(2q+1)\pi x\,\varphi(x) - \varphi(0)\right|$$

$$+ \frac{1}{(2q+1)\pi}\int_0^x |\varphi'(u)|\,du$$

$$\leq \frac{M+M'}{(2q+1)\pi} \leq \frac{A_1}{q}$$

avec $M = \sup_{[0,\frac{1}{2}]} |\varphi(x)|$ $\quad M' = \int_0^{\frac{1}{2}} |\varphi'(u)|\,du$

$A_1 = \frac{M+M'}{2\pi}$ indépendant de x et q.

c. $$S_q\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{p=1}^{q} \frac{\sin p\pi}{p\pi} = 0$$

Donc, $$\left|\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\int_0^{(2q+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin v}{v}\,dv\right| \xrightarrow[q\to+\infty]{} 0$$

$$\lim_{q\to+\infty} \int_0^{(2q+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin v}{v}\,dv = \frac{\pi}{2}$$

Soit $x > \frac{3}{2}\pi$, il existe $q \in \mathbb{N}^*$ t.q.

$$(2q+1)\frac{\pi}{2} \leq x \leq (2q+3)\frac{\pi}{2}$$

$$\left|\int_0^x \frac{\sin v}{v}\,dv - \int_0^{(2q+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin v}{v}\,dv\right|$$

$$= \left|\int_{(2q+1)\frac{\pi}{2}}^{x} \frac{\sin v}{v}\,dv\right|$$

$$\leq \int_{(2q+1)\frac{\pi}{2}}^{(2q+3)\frac{\pi}{2}} \frac{1}{v}\,dv \leq \pi \times \frac{1}{(2q+1)\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{2q+1}$$

Lorsque $x \to +\infty$, $q \to +\infty$,

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{\sin v}{v}\,dv = \lim_{q\to+\infty} \int_0^{(2q+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin v}{v}\,dv = \frac{\pi}{2}$$

Ainsi, $$\int_0^{+\infty} \frac{\sin v}{v}\,dv = \frac{\pi}{2}$$

3. $\forall q \geq 1$, S_q est 1-périodique.
Il suffit d'étudier sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.
De plus, $|S_q(-x)| = |-S_q(x)| = |S_q(x)|$
Donc, il suffit d'étudier le maximum sur $[0, \frac{1}{2}]$.
Comme $\int_0^{+\infty} \frac{\sin v}{v}\,dv$ converge, il existe $M > 0$

t.q. $\forall x \geq 0$, $\left|\int_0^x \frac{\sin v}{v}\,dv\right| \leq M$

Copies 2/5

$\forall x \in [0, \frac{1}{2}]$

$$\left| S_q(x) + x - \frac{1}{\pi} \int_0^{(2q+1)\pi x} \frac{\sin v}{v} dv \right| \leq \frac{A_1}{q} \leq A_1$$

$$|S_q(x)| \leq |x| + \left| \frac{1}{\pi} \int_0^{(2q+1)\pi x} \frac{\sin v}{v} dv \right| + A_1$$

$$\leq \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \times M + A_1}_{A_2 \text{ indépendant de } q,\ x}$$

Donc, il existe A_2 t.q. $\forall x \in [\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}]$, $\forall q \geq 1$

$$|S_q(x)| \leq A_2$$

Ainsi, pour tout x réel,

$$|S_q(x)| \leq A_2$$

4. a. Soit $x \in]0, \frac{1}{2}]$,

$$\left| S_q(x) + x - \frac{1}{\pi} \int_0^{(2q+1)\pi x} \frac{\sin v}{v} dv \right| \xrightarrow[q \to +\infty]{} 0$$

$$S_q(x) + x \xrightarrow[q \to +\infty]{} \frac{1}{\pi} \times \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{q \to +\infty} S_q(x) = \frac{1}{2} - x$$

. $S_q(0) = 0$, et $S_q(x) = -S_q(|x|)$ sur $[\frac{-1}{2}, 0[$

Par périodicité,

$$\lim_{q \to +\infty} S_q(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Z} \\ \frac{1}{2} - \langle x \rangle & \text{sinon} \end{cases}$$

b. Soit $f : \begin{cases} K \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \longmapsto d(x, \mathbb{Z}) \end{cases}$

f est continue, donc atteint son min.
Comme $K \cap \mathbb{Z} = \emptyset$, $\min\limits_{K} f = \alpha > 0$.

$\forall x \in K,\ \forall n \in \mathbb{Z},\ |x - n| \geq d(x, \mathbb{Z}) \geq \alpha > 0.$

Par périodicité, il suffit d'étudier $[\alpha, \frac{1}{2}]$.
Soit $x \in [\alpha, \frac{1}{2}]$,

$$\left|S_q(x) - \left(\frac{1}{2} - x\right)\right|$$

$$\leq \left|S_q(x) + x - \frac{1}{\pi}\int_0^{(2q+1)\pi x} \frac{\sin v}{v}\, dv\right|$$

$$+ \left|\frac{1}{\pi}\int_0^{(2q+1)\pi x} \frac{\sin v}{v}\, dv - \frac{1}{2}\right|$$

$$\leq \frac{A_1}{q} + \frac{1}{\pi}\left|\int_{(2q+1)\pi x}^{+\infty} \frac{\sin v}{v}\, dv\right|$$

Soit $\varepsilon > 0$
Il existe $x_0 > 0$ t.q. $\forall x \geq x_0\ \left|\int_x^{+\infty} \frac{\sin v}{v}\, dv\right| \leq \varepsilon$

Soit q_0 t.q. $(2q_0+1)\pi\alpha \geq x_0$.
Alors, pour tout $q \geq q_0$

$$\left|S_q(x) - \left(\frac{1}{2} - x\right)\right| \leq \frac{A_1}{q} + \frac{1}{\pi}\varepsilon$$

Donc, $\left\|S_q - \left(\frac{1}{2} - x\right)\right\|_{\infty, [\alpha, \frac{1}{2}]} \longrightarrow 0$

Ainsi, (S_q) converge uniformément sur K.

$\lim\limits_{q \to +\infty} S_q(x)$ n'est pas continue sur $\mathbb{R}$, donc il n'y a pas de CVU sur $\mathbb{R}$.

5. Si $[a,b] \cap \mathbb{Z} = \emptyset$, on a que $(S_q)_{q\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers $x \mapsto \frac{1}{2} - \langle x \rangle$.

Étant continue sur un segment, f est bornée, donc $(S_q f)$ converge uniformément vers $x \mapsto f(x)\left(\frac{1}{2} - \langle x \rangle\right)$.

$$\underbrace{\int_a^b f(x) S_q(x)\,dx}_{\int_a^b f(x) \sum_{p=1}^{q} \frac{\sin 2p\pi x}{p\pi} dx} \xrightarrow[q\to+\infty]{} \int_a^b f(x)\left(\frac{1}{2} - \langle x \rangle\right) dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \sum_{p=1}^{q} \frac{1}{p} \int_a^b f(x) \sin(2p\pi x)\,dx$$

D'où, $\displaystyle\int_a^b f(x)\left(\frac{1}{2} - \langle x \rangle\right) dx = \frac{1}{\pi} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p} \int_a^b f(x) \sin(2p\pi x)\,dx$

Si $[a,b] \cap \mathbb{Z} \neq \emptyset$

Sur $[a,b]$, pour tout $q \geq 1$, $|S_q| \leq A_2$.

Une fonction constante est intégrable sur un segment.

De plus $\|f\|_{\infty,[a,b]}$ est fini, donc,

$$|S_q f| \leq A_2 \|f\|_{\infty,[a,b]}.$$

Et, $(S_q f)_{q\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers fg où $g : \begin{cases} x \mapsto \frac{1}{2} - \langle x \rangle & \text{si } x \notin \mathbb{Z} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{Z}. \end{cases}$

Le théorème de convergence dominée s'applique,

$$\int_{[a,b]} S_q f \xrightarrow[q\to+\infty]{} \int_{[a,b]} fg$$

Ainsi, $\displaystyle\int_a^b f(x)\left(\frac{1}{2} - \langle x \rangle\right) dx = \frac{1}{\pi} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p} \int_a^b f(x) \sin 2p\pi x\,dx$

Partie II

1. a. Soit $z \in \mathbb{C}$ non nul, et $z \neq 1$

$$\int x^{-z} dx$$

$$= \int e^{-z \log x} dx$$

$$= \left[e^{-z\log x} \cdot \left(\frac{-x}{z}\right) \right] + \int \frac{1}{z} e^{-z\log x} dx$$

$$\int e^{-z\log x} dx = -x e^{-z\log x} \times \frac{1}{z(1-\frac{1}{z})}$$

$$\int x^{-z} dx = \frac{1}{1-z} x^{-z+1} + C$$

Si $z = 1$, $\int x^{-1} dx = \ln x + C$

b. $n=1$, $1^{-z} = 1 = 1 + \int_1^1 x^{-z} dx - z \int_1^1 \langle x \rangle x^{-z-1} dx$

Soit $n \geqslant 2$, on veut montrer que :

$$n^{-z} = \int_{n-1}^{n} x^{-z} dx - z \int_{n-1}^{n} \langle x \rangle x^{-z-1} dx$$

$$\int_{n-1}^{n} x^{-z} dx - z \int_{n-1}^{n} \langle x \rangle x^{-z-1} dx = \int_{n-1}^{n} x^{-z} - z(x-(n-1)) x^{-z-1} dx$$

$$= \int_{n-1}^{n} (1-z) x^{-z} + z(n-1) x^{-z-1} dx$$

$$= \left[x^{-z+1} \right]_{n-1}^{n} + z(n-1) \left[\frac{1}{-z} x^{-z} \right]_{n-1}^{n}$$

$$= n^{-z+1} - (n-1)^{-z+1} - (n-1)\left(n^{-z} - (n-1)^{-z}\right)$$

$$= n^{-z+1} - (n-1)^{-z+1} - (n-1)n^{-z} + (n-1)^{-z+1}$$

$$= n \cdot n^{-z} - (n-1) n^{-z} = n^{-z}$$

Copies 3/5

Par récurrence et la relation de Chasles.

$$\sum_{k=1}^{n} k^{-z} = 1 + \int_1^n x^{-z} dx - z \int_1^n \langle x \rangle x^{-z-1} dx$$

c. $$0 \leq s \int_1^n \langle x \rangle x^{-s-1} dx \leq s \int_1^{+\infty} x^{-(s+1)} dx = 1$$

Faux !!

Donc à 0,5 près,

$$\sum_{k=1}^{n} k^{-s} = 1 + \int_1^n x^{-s} dx - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1 - n^{-s+1}}{s-1}$$

Pour $s = 1$, $$\sum_{k=1}^{n} k^{-1} = \frac{1}{2} + \int_1^n \frac{1}{x} dx$$

$$= \frac{1}{2} + \ln n$$

2\. a. Si $s = \mathrm{Re}(z) > 0$,

$$\int_1^{+\infty} |\langle x \rangle x^{-z-1}| dx$$

$$\leq \int_1^{+\infty} x^{-s-1} dx$$

$$\leq \left[\frac{1}{-s} x^{-s}\right]_1^{+\infty} = \frac{1}{s}$$

Donc, $\int_1^{+\infty} \langle x \rangle x^{-z-1} dx$ est intégrable, convergente

b. $s > 1$, $$\sum_{k=1}^{+\infty} k^{-z} = 1 + \int_1^{+\infty} x^{-z} dx + \zeta(z) - \frac{z}{z-1}$$

$$= 1 + \left[\frac{1}{1-z} x^{-z+1}\right]_1^{+\infty} + \zeta(z) - \frac{z}{z-1}$$

$$= 1 - \frac{1}{1-z} + \zeta(z) - \frac{z}{z-1} = \zeta(z)$$

Donc, pour $s>1$, $\zeta(z)=\sum_{k=1}^{+\infty} k^{-z}$

c. Soient $z\in\Omega$, $y\geqslant n$.

$\zeta(z)-\sum_{k=1}^{n} k^{-z}$

$$= \frac{z}{z-1} - z\int_1^{+\infty} \langle x\rangle x^{-z-1}\,dx - 1 - \int_1^n x^{-z}\,dx + z\int_1^n \langle x\rangle x^{-z-1}\,dx$$

$$= \frac{1}{z-1} - \left[\frac{1}{-z+1}x^{-z+1}\right]_1^n - z\int_n^{+\infty}\langle x\rangle x^{-z-1}\,dx$$

$$= \frac{1+n^{-z+1}-1}{z-1} + z\int_n^{+\infty}\left(\frac{1}{2}-\langle x\rangle\right)x^{-z-1}\,dx - \frac{1}{2}z\int_n^{+\infty} x^{-z-1}\,dx$$

$$= \frac{n^{-z+1}}{z-1} + z\int_n^{y}\left(\frac{1}{2}-\langle x\rangle\right)x^{-z-1}\,dx + z\int_y^{+\infty}\left(\frac{1}{2}-\langle x\rangle\right)x^{-z-1}\,dx$$

$$-\frac{1}{2}z\left[\frac{1}{-z}x^{-z}\right]_n^{+\infty}$$

(par I.5)

$$= \frac{n^{-z+1}}{z-1} - \frac{1}{2}n^{-z} + z\int_y^{+\infty}\left(\frac{1}{2}-\langle x\rangle\right)x^{-z-1}\,dx$$

$$+ z\times\frac{1}{\pi}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p}\int_n^y x^{-z-1}\sin 2p\pi x\,dx$$

3.

$$g'(x) = \frac{\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}\left(2p\pi-\frac{t}{x}\right)+x^{-\frac{3}{2}}\times t\times x^{-2}}{\left(2p\pi-\frac{t}{x}\right)^2}$$

$$= \frac{3}{2}\,\frac{x^{-\frac{5}{2}}}{\left(2p\pi-\frac{t}{x}\right)} + \frac{x^{-\frac{3}{2}}\times\frac{t}{x}}{\left(2p\pi-\frac{t}{x}\right)^2}$$

$$\leqslant \frac{x^{-\frac{5}{2}}}{p}\left(\frac{3}{2}\times\frac{1}{2\pi-\frac{1}{p}} + \frac{1}{(2p\pi-1)\left(2\pi-\frac{1}{p}\right)}\right)$$

$$\leqslant \frac{x^{-\frac{5}{2}}}{p}\underbrace{\left(\frac{3}{2}\times\frac{1}{\pi}+\frac{1}{\pi^2}\right)}_{B_1}$$

Donc, pour tout $x \geq n$, $g'(x) \leq \frac{B_1}{p} x^{-\frac{5}{2}}$

$$\int_n^y x^{-\frac{3}{2}-it} e^{2ip\pi x} dx$$

$$= \int_n^y x^{-\frac{3}{2}} e^{2ip\pi x - it\ln x} dx$$

$$= \int_n^y \frac{-x^{-\frac{3}{2}} i}{2p\pi - \frac{t}{x}} i\left(2p\pi - \frac{t}{x}\right) e^{2ip\pi x - it\ln x} dx$$

$$= \left[e^{2ip\pi x - it\ln x} \times i\, g(x)\right]_n^y - \int_n^y i\, g'(x)\, e^{2ip\pi x - it\ln x} dx$$

$$\left|\left[e^{2ip\pi x - it\ln x} \times i\, g(x)\right]_n^y\right| \leq |g(y)| + |g(n)|$$

$$\leq \frac{y^{-\frac{3}{2}}}{2p\pi - 1} + \frac{n^{-\frac{3}{2}}}{2p\pi - 1} \leq \frac{2n^{-\frac{3}{2}}}{2p\pi - 1}$$

$$\left|\int_n^y i\, g'(x)\, e^{2ip\pi x - it\ln x} dx\right|$$

$$\leq \int_n^y |g'(x)|\, dx \leq \int_n^y \frac{B_1}{p} x^{-\frac{5}{2}} dx$$

$$\leq \frac{B_1}{p}\left[-\frac{2}{3} x^{-\frac{3}{2}}\right]_n^y$$

$$\leq \frac{-2B_1}{3p}\left(\frac{1}{y^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$$

$$\leq \frac{2B_1}{3p} \times \frac{1}{n^{3/2}}$$

Donc, $\left|\int_n^y x^{-\frac{3}{2}-it} e^{2ip\pi x} dx\right| \leq \frac{1}{n^{3/2}}\left(\frac{2B_1}{3p} + \frac{2}{2p\pi - 1}\right)$

$$\leq \frac{1}{n^{3/2} p}\left(\frac{2B_1}{3} + \frac{2}{2\pi - \frac{1}{p}}\right) \leq \frac{1}{n^{3/2} p} \underbrace{\left(\frac{2B_1}{3} + \frac{2}{\pi}\right)}_{B_2}$$

$$\forall y \geqslant n, \ \left| \int_n^y x^{-\frac{3}{2}-it} e^{2ip\pi x} dx \right| \leqslant \frac{B_2}{n^{3/2} p}$$

4. Soit $n \geqslant 1$, $t \in [-n, n]$, $y \geqslant n$

$$\left| \zeta\left(\frac{1}{2}+it\right) - \sum_{k=1}^{n} k^{-\frac{1}{2}-it} \right|$$

$$\leqslant \left| \frac{n^{\frac{1}{2}-it}}{-\frac{1}{2}+it} \right| + \frac{1}{2} \left| n^{-\frac{1}{2}-it} \right| + \left| \left(\frac{1}{2}+it\right) \int_y^{+\infty} \left(\frac{1}{2} - \langle x \rangle\right) x^{-\frac{3}{2}-it} dx \right|$$

$$+ \frac{|z|}{\pi} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p} \left| \int_n^y x^{-\frac{3}{2}-it} \sin 2p\pi x \, dx \right|$$

$$\leqslant \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\frac{1}{4}+|t|^2}} + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{n}} \times \frac{1+|t|}{1+|t|} + \sqrt{\frac{1}{4}+|t|^2} \times \underbrace{\left| \int_y^{+\infty} \left(\frac{1}{2} - \langle x \rangle\right) x^{-\frac{3}{2}-it} dx \right|}_{\xrightarrow[y \to +\infty]{} 0}$$

$$+ \frac{|z|}{\pi} \times \frac{B_2}{n^{3/2}} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2}$$

$$\leqslant \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\frac{1}{4}+|t|^2}} + \frac{\sqrt{n}}{1+|t|} \times \frac{1+|t|}{2n} + \underbrace{\varepsilon(y)}_{\xrightarrow[y \to +\infty]{} 0} + \frac{|z| B_2}{\pi n^{3/2}} \times \frac{\pi^2}{6}$$

Copies 4/5

$$\leq \frac{3\sqrt{n}}{1+|t|} + \frac{\sqrt{n}}{1+|t|} + \frac{\pi B_2}{6} \frac{\sqrt{\frac{1}{4}+|t|^2}}{n^{3/2}}$$

$$\leq \frac{4\sqrt{n}}{1+|t|} + \frac{\pi B_2}{6} \frac{1+|t|}{n} \times \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\leq \frac{4\sqrt{n}}{1+|t|} + \frac{\pi B_2}{3} \times \frac{1}{\sqrt{n}} \times \frac{1+|t|}{1+|t|}$$

$$\leq \frac{4\sqrt{n}}{1+|t|} + \frac{\pi B_2}{3} \times \frac{2\sqrt{n}}{1+|t|}$$

$$\leq \frac{\sqrt{n}}{1+|t|} \times \underbrace{\left(4 + \frac{2}{3}\pi B_2\right)}_{B_3}$$

Soit $B_3 = 4 + \frac{2}{3}\pi B_2$, on a :

$\forall n \geq 1,\ t \in [n, n]$,

$$\left| \zeta\left(\frac{1}{2}+it\right) - \sum_{k=1}^{n} k^{-\frac{1}{2}-it} \right| \leq B_2 \frac{\sqrt{n}}{1+|t|}$$

Partie III

1\. a. Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \log x - 1 + \frac{1}{x} \end{cases}$

$f(1) = 0$

$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$

$f'(x) \geq 0$ si $x \geq 1$

$f'(x) < 0$ si $x < 1$

Donc $f \geq 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

b.

$$\sum_{\substack{j,k \\ 1\le k\le n \\ \frac{k}{2}<j<k}} \frac{1}{\sqrt{kj}\log\frac{k}{j}} = \sum_{1\le k\le n} \sum_{\frac{k}{2}<j<k} \frac{1}{\sqrt{kj}\log\frac{k}{j}}$$

Soit $k \in [\![1,n]\!]$,

$\forall j$ t.q. $\frac{k}{2}<j<k$

$$\log\frac{k}{j} \geq 1-\frac{j}{k}$$

$$\frac{1}{\log\frac{k}{j}} \leq \frac{k}{k-j}$$

$$\frac{1}{\sqrt{kj}\log\frac{k}{j}} \leq \frac{k}{\sqrt{kj}(k-j)} \leq \sqrt{\frac{k}{j}} \times \frac{1}{k-j} \leq \frac{\sqrt{2}}{k-j}$$

$$\sum_{\frac{k}{2}<j<k} \frac{1}{\sqrt{kj}\log\frac{k}{j}} \leq \sum_{\frac{k}{2}<j<k} \frac{\sqrt{2}}{k-j} \leq \sqrt{2}\sum_{1\le h\le k}\frac{1}{h}$$

Ainsi, $\displaystyle\sum_{\substack{1\le k\le n \\ \frac{k}{2}<j<k}} \frac{1}{\sqrt{kj}\log\frac{k}{j}} \leq \sum_{1\le k\le n}\sqrt{2}\sum_{1\le h\le k}\frac{1}{h}$

$$\leq \sqrt{2}\sum_{1\le h\le k\le n}\frac{1}{h}$$

c.

$$\sum_{1\le h\le k}\frac{1}{h} \leq 1+\int_1^k \frac{1}{t}\,dt$$

$$\leq 1+\ln k$$

$$\sqrt{2}\sum_{1\le h\le k\le n}\frac{1}{h} \leq \sqrt{2}\sum_{1\le k\le n} 1+\ln k$$

$$\leq \sqrt{2}\,n + \sqrt{2}\sum_{1\le k\le n}\ln k$$

$$\leq \sqrt{2}\,n + \sqrt{2}\cdot n\ln n$$

$$1 \leq \ln 2 \times 2 \leq 2 \ln n$$

Donc, $\sqrt{2}\, n + \sqrt{2}\, n \ln n \leq 3\sqrt{2}\, n \ln n$

Ainsi, $C_1 = 3\sqrt{2}$ convient pour majorer l'inégalité précédente.

2. a. $\forall j, k$ t.q. $1 \leq j \leq k/2$

$$\log \frac{k}{j} \geq \log 2$$

Donc, $$\sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq j \leq k/2}} \frac{1}{\sqrt{kj}\, \log \frac{k}{j}} \leq \frac{1}{\log 2} \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq j \leq k/2}} \frac{1}{\sqrt{kj}}$$

$$\leq \frac{1}{\log 2} \sum_{1 \leq k, j \leq n} \frac{1}{\sqrt{kj}}$$

$$\leq \frac{1}{\log 2} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \right)^2$$

b. $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 1 + \int_1^n \frac{1}{\sqrt{t}}\, dt$$

$$\leq 1 + \left[2\sqrt{t} \right]_1^n$$

$$\leq 2\sqrt{n} - 1$$

$$\frac{1}{\log 2} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \right)^2 \leq \frac{1}{\log 2} \left(2\sqrt{n} - 1 \right)^2$$

$$\leq \frac{1}{\log 2} \left(2\sqrt{n} \right)^2 \leq \frac{4}{\log 2}\, n$$

Donc, $C_2 = \frac{4}{\log 2}$ convient.

3. a. $$\left|\sum_{k=1}^{n} k^{-\frac{1}{2}-it}\right|^2$$
$$= \sum_{k=1}^{n} k^{-\frac{1}{2}-it} \sum_{k=1}^{n} k^{-\frac{1}{2}+it}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{\substack{1\leq k,j\leq n \\ k\neq j}} \frac{1}{\sqrt{kj}} k^{-it} j^{it}$$

$$\int_0^n \frac{1}{k}\,dt = n\frac{1}{k}$$

$$\int_0^n \frac{1}{\sqrt{kj}} k^{-it} \cdot j^{it}\,dt \qquad k\neq j$$
$$= \frac{1}{\sqrt{kj}} \int_0^n e^{it\ln\left(\frac{j}{k}\right)}\,dt$$
$$= \frac{1}{\sqrt{kj}} \times \frac{1}{i\ln\left(\frac{j}{k}\right)} \left[e^{it\ln\left(\frac{j}{k}\right)}\right]_0^n$$
$$= i \times \frac{1-\left(\frac{j}{k}\right)^{in}}{\sqrt{kj}\ln\left(\frac{j}{k}\right)}$$
$$= i \times \frac{\left(\frac{k}{j}\right)^{-in}-1}{\sqrt{kj}\ln\left(\frac{k}{j}\right)}$$

Donc, en sommant tous les termes,
$$\int_0^n \left|\sum_{k=1}^{n} k^{-\frac{1}{2}-it}\right|^2 dt = n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} + i \sum_{\substack{1\leq k,j\leq n \\ j\neq k}} \frac{\left(\frac{k}{j}\right)^{-in}-1}{\sqrt{kj}\log\frac{k}{j}}$$

Copies 5/5

b. $$n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\leq n(1+\ln n)\leq 3n\ln n$$

$$\left|i\sum_{\substack{j,k\\1\leq j,k\leq n\\j\neq k}}\frac{\left(\frac{k}{j}\right)^{-in}-1}{\sqrt{kj}\,\log\frac{k}{j}}\right|\leq\sum_{\substack{j,k\\1\leq j<k\leq n}}\frac{2}{\sqrt{kj}\,\log\frac{k}{j}}+\sum_{\substack{j,k\\1\leq k<j\leq n}}\frac{2}{\sqrt{kj}\,\log\frac{j}{k}}$$

$$\leq 4\sum_{\substack{j,k\\1\leq j<k\leq n}}\frac{1}{\sqrt{kj}\,\log\frac{k}{j}}$$

$$\leq 4\left(C_1 n\log n+C_2 n\right)$$

$$\leq 4\left(C_1+2C_2\right)n\log n$$

<u>Donc, $C_3=3+4(C_1+2C_2)$ convient.</u>

4. $$\left|\zeta\left(\tfrac{1}{2}+it\right)\right|^2\leq 2\times\left(\left|\zeta\left(\tfrac{1}{2}+it\right)-\sum_{k=1}^{n}k^{-\frac{1}{2}-it}\right|^2+\left|\sum_{k=1}^{n}k^{-\frac{1}{2}-it}\right|^2\right)$$

$$\leq 2\times\left(\frac{B_3^2 n}{(1+|t|)^2}+\left|\sum_{k=1}^{n}k^{-\frac{1}{2}-it}\right|^2\right)$$

Soit $n\geq 2$

$$\int_0^n\left|\zeta\left(\tfrac{1}{2}+it\right)\right|^2dt$$

$$\leq 2\times\int_0^n\frac{B_3^2 n}{(1+|t|)^2}dt+2\times C_3 n\log n$$

$$\leq 2B_3^2 n\times\left[\frac{-1}{1+t}\right]_0^n+2C_3 n\log n$$

$$\leq 2B_3^2 n+2C_3 n\log n$$

$$\leq\left(4B_3^2+2C_3\right)n\log n$$

Donc, il existe C t.q.

$\forall n \geqslant 2$,

$$\int_0^n \left|\zeta\left(\tfrac{1}{2}+it\right)\right|^2 dt \leqslant Cn \log n$$
$$\leqslant Cn \log(n+2)$$

Pour $T \geqslant 0$, il suffit de trouver un facteur correctif pour que l'inégalité soit vérifiée car

$$\int_0^T \left|\zeta\left(\tfrac{1}{2}+it\right)\right|^2 dt \leqslant \int_0^{\lceil T \rceil} \left|\zeta\left(\tfrac{1}{2}+it\right)\right|^2 dt$$

$$\leqslant C \lceil T \rceil \log \lceil T \rceil$$

$$\leqslant C' T \log(T+2)$$