TIPE ENS

Omar Bennouna

28 juin 2019

Je rentre dans la salle. Un des examinateurs me demande si j'ai quelque chose à présenter, je lui réponds que j'ai une clé usb avec un diapo. Je commence à présenter. Les deux examinateurs semblent ne pas écouter ce que je dis, ils regardaient leurs écrans d'ordinateur...
Lorsque j'arrive a à peu près 30% de la présentation, ils m'arrêtent, et m'annoncent qu'on ne fera que des exercices pendant le temps restant.

I Exercice 1

On considèle l'application de S^1 dans lui même $f : z \to ze^{2i\pi\alpha}$ avec α réel.
Soit $z_0 \in S^1$. On pose pour tout n entier f^n l'application f itérée n fois.
On s'interesse à la suite $(f^n(z_0))_n$.
1. Que pouvez vous dire ?
Je réponds que si alpha est rationnel, on revient au point de départ une infinité de fois, sinon la suite est dense dans le cercle unité.
2. Montrer alors que si alpha est irrationnel, la suite est bien dense dans le cercle unité.
Je dis que cela revient à montrer que $\alpha\mathbf{Z}+\mathbf{Z}$ *est dense dans R, il me demande pourquoi, puis me demande de le montrer.*

II Exercice 2

Soit D un disque de $\mathbf{R}^2$ fermé centré sur 0. *L'examinateur semblait hésitant sur les hypothèses. Il y en a plusieurs qui sont inutiles.*
On considère une application $f : D \to D$ continue bijective. On suppose que les surfaces sont conservées par f. *Je lui demande ce que cela signifie rigoureusement d'un point de vue topologique, il me réponds que c'est la definition usuelle de la surface ....*
Soit B une boule non vide incluse dans D, montrer qu'il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que l'intersection de B et $f^n(B)$ soit non vide.
Je propose une solution reposant sur le fait qu'on ne peut pas mettre une infinité d'ensembles disjoints de même surface (non nulle) dans D, l'examinateur semble d'accord, on passe donc à la suite.

III Exercice 3

Il reste à peu près dix minutes avant la fin de l'oral. Le mot "bistochastique" figurait sur ma présentation, l'autre examinateur veut donc me donner un exercice sur les matrices bistochastiques.
Soit A une matrice bistochastique réelle. Soit $i, j \in 1, ..., n$. Montrer que s'il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que $[A^k]_{i,j} > 0$, alors il existe $l \leq n$ tel que $[A^l]_{i,j} > 0$.
Je ne trouve pas la réponse immédiatement, je commence à chercher. Pendant se temps là, les deux examinateurs ne regardent pas ce que je fait et commencent à discuter, rigoler, etc. Après quelques minutes, n'ayant pas trouvé, l'indice que me propose l'un des deux examinateurs est "C'est un raisonnement simple" ... ça ne m'aide pas trop, mais je continue de chercher. Il reste quelque minutes avant la fin, ce même examinateur me dit que c'est un exercice facile qu'on peut donner en première semaine d'algèbre linéaire (what ?) et qu'il faut utiliser la definition (quelle definition ?). L'oral est fini avant que je ne trouve la solution. Il semblait vouloir que j'écrive une formule explicite donnant le coefficient en position ij de la matrice A^k.

IV Commentaire

Les examinateurs semblaient n'avoir rien à faire de mon TIPE, c'etait juste un oral de math.