Numéro d'inscription: 34913

TIPE: Décomposition en somme finie de fractions unitaires.

BENDAHI Abderrahim

2021-2022

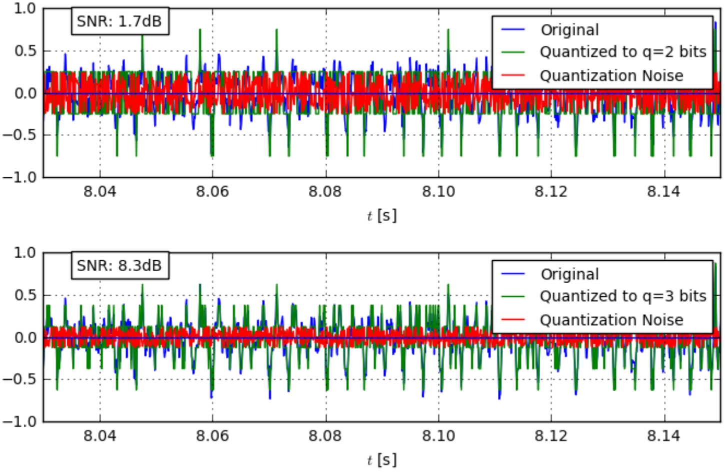
Introduction

- Traitement de signaux: applications en médecine.

Introduction

- Traitement de signaux: applications en médecine.
- Bruit généré par l'erreur de quantification.

Exemple



source : https://dspillustrations.com/pages/posts/misc/how-does-quantization-noise-sound.html

Objectifs :

- Démontrer qu'un nombre rationnel dans un certain intervalle peut être décomposé en somme finie d'inverses de carrés distincts, de cubes distincts.

Objectifs :

- Démontrer qu'un nombre rationnel dans un certain intervalle peut être décomposé en somme finie d'inverses de carrés distincts, de cubes distincts.

- Trouver des méthodes algorithmiques pour déterminer cette décomposition.

Introduction

Exemples

1. $\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{4^2} + \dfrac{1}{5^2} + \dfrac{1}{7^2} + \dfrac{1}{8^2} + \dfrac{1}{56^2} + \dfrac{1}{168^2} + \dfrac{1}{840^2}$

Introduction

Exemples

1. $$\frac{1}{2}=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{8^2}+\frac{1}{56^2}+\frac{1}{168^2}+\frac{1}{840^2}$$
2. $$\frac{1}{150}=\frac{1}{13^2}+\frac{1}{37^2}+\frac{1}{234^2}+\frac{1}{1170^2}+\frac{1}{4329^2}$$

Introduction

Exemples

1. $$\frac{1}{2} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{56^2} + \frac{1}{168^2} + \frac{1}{840^2}$$
2. $$\frac{1}{150} = \frac{1}{13^2} + \frac{1}{37^2} + \frac{1}{234^2} + \frac{1}{1170^2} + \frac{1}{4329^2}$$
3. $$\frac{3}{7} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{20^2} + \frac{1}{21^2} + \frac{1}{84^2} + \frac{1}{140^2}$$

Introduction

Exemples

1. $\frac{1}{2} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{56^2} + \frac{1}{168^2} + \frac{1}{840^2}$
2. $\frac{1}{150} = \frac{1}{13^2} + \frac{1}{37^2} + \frac{1}{234^2} + \frac{1}{1170^2} + \frac{1}{4329^2}$
3. $\frac{3}{7} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{20^2} + \frac{1}{21^2} + \frac{1}{84^2} + \frac{1}{140^2}$
4. $\frac{1}{6} = \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{6^3}$

Plan

1. Théorème de Graham : Cas particulier des sommes finies d'inverses de puissances p-ièmes

Plan

1. Théorème de Graham : Cas particulier des sommes finies d'inverses de puissances p-ièmes
2. Décomposition pratique : Algorithme Glouton

Plan

1. Théorème de Graham : Cas particulier des sommes finies d'inverses de puissances p-ièmes
2. Décomposition pratique : Algorithme Glouton
3. Décomposition pratique : Deuxième algorithme

Plan

1. Théorème de Graham : Cas particulier des sommes finies d'inverses de puissances p-ièmes
2. Décomposition pratique : Algorithme Glouton
3. Décomposition pratique : Deuxième algorithme
4. Résultats théoriques établis

Quelques définitions:

Si S $= (s_1, s_2, ...)$, on définit:

- P(S) $= \{ \sum_{k=1}^{+\infty} \varepsilon_k s_k$ avec (ε_k) suite presque nulle prenant la valeur 0 ou 1 $\}$

Quelques définitions:

Si S $= (s_1, s_2, ...)$, on définit:

- P(S) $=$ { $\sum_{k=1}^{+\infty} \varepsilon_k s_k$ avec (ε_k) suite presque nulle prenant la valeur 0 ou 1 }
- S^{-1} désigne la suite des inverses des termes de S.

Cas particulier des sommes finies d'inverses de puissances p-ièmes

Quelques définitions :

- Un réel x est dit **S-accessible** si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe p dans P(S) tel que $0 \leq p - x < \varepsilon$.

Cas particulier des sommes finies d'inverses de puissances p-ièmes

Quelques définitions :

- Un réel x est dit **S-accessible** si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe p dans P(S) tel que $0 \leq p - x < \varepsilon$.

- On note Ac(S) l'ensemble des nombres S-accessibles.

Cas particulier des sommes finies d'inverses de puissances p-ièmes

Quelques définitions :

- Un réel x est dit **S-accessible** si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe p dans P(S) tel que $0 \leq p - x < \varepsilon$.
- On note Ac(S) l'ensemble des nombres S-accessibles.
- Si p $\in \mathbb{N}^*$, on note H^p la suite des inverses de puissances p-ièmes, i.e $H^p = (1^{-p}, 2^{-p}, 3^{-p}, \dots)$.

Cas particulier des sommes finies d'inverses de puissances p-ièmes

Quelques définitions :

- Un réel x est dit **S-accessible** si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe p dans P(S) tel que $0 \leq p - x < \varepsilon$.
- On note Ac(S) l'ensemble des nombres S-accessibles.
- Si p $\in \mathbb{N}^*$, on note H^p la suite des inverses de puissances p-ièmes, i.e $H^p = (1^{-p}, 2^{-p}, 3^{-p}, \ldots)$.
- Un terme s_n de S est dit remplaçable dans S si $s_n \leq \sum_{k=1}^{+\infty} s_{n+k}$.

Cas particulier des sommes finies d'inverses de puissances p-ièmes

Théorème de Sprague (admis)

Soit un entier $p \geq 1$. Tout entier naturel assez grand est somme de puissance p-ième d'entiers distincts.

Cas particulier des sommes finies d'inverses de puissances p-ièmes

Théorème 1 (admis)

Le nombre rationnel $\frac{a}{b}$ est la somme finie de termes distincts de H^p si et seulement si $\frac{a}{b}$ est H^p-accessible. Cela s'écrit:

$$P(H^p) = Ac(H^p) \cap \mathbb{Q}$$

Cas particulier des sommes finies d'inverses de puissances p-ièmes

Théorème 2

Soit S$=(s_n) \in (\mathbb{R})^{\mathbb{N}^*}$ qui vérifie:

1. (s_n) décroît strictement vers 0,
2. il existe un rang r à partir duquel s_n est remplaçable dans S.
   Alors:

$$Ac(S) = \cup_{z \in P_{r-1}}[z, z + \sigma[$$

où $P_{r-1} = P((s_1, ..., s_{r-1}))$ ($P_0 = \{0\}$) et $\sigma = \sum_{k=r}^{+\infty} s_k$ (éventuellement infinie).

Cas particulier des sommes finies d'inverses de puissances p-ièmes

Théorème 3

Soit S=$(s_n) \in (\mathbb{R})^{\mathbb{N}^*}$ qui vérifie:

1. (s_n) décroît strictement vers 0,
2. il existe un rang r tel que $n < r$ implique que s_n n'est pas remplaçable dans S, et n$\geq r$ implique que s_n est remplaçable dans S.

Alors Ac(S) est l'union disjointe d'exactement 2^{r-1} intervalles semi-ouverts de longueur $\sum_{k=r}^{\infty} s_k$.

Cas particulier des sommes finies d'inverses de puissances p-ièmes

Lemme 1

Soit S=(s_n) une suite à termes positifs telle qu'il existe m tel que $n \geq m \Rightarrow s_n \leq 2s_{n+1}$.
Alors, $n \geq m \Rightarrow s_n$ est remplaçable dans S (i.e., $s_n \leq \sum_{k=1}^{+\infty} s_{n+k}$).

Cas particulier des sommes finies d'inverses de puissances p-ièmes

Lemme 2

On suppose que $k \leq \left(2^{1/p} - 1\right)^{-1}$ et k^{-p} est remplaçable dans H^p.
Alors $(k+1)^{-p}$ est aussi remplaçable dans H^p.

Cas particulier des sommes finies d'inverses de puissances p-ièmes

Lemme 3

On suppose que $k \geq \left(2^{1/p} - 1\right)^{-1}$.
Alors k^{-p} est remplaçable dans H^p.

Cas particulier des sommes finies d'inverses de puissances p-ièmes

En combinant les théorèmes et lemmes précédents, il vient :

Théorème 4

Soit p un entier naturel non nul. Soit t_p le plus grand entier k tel que $k^{-p} > \sum_{j=1}^{+\infty} (k+j)^{-p}$ et $P = \{\sum_{j=1}^{t_p} \varepsilon_j j^{-p} : \varepsilon_j = 0 \text{ ou } 1 \}$. Alors le nombre rationnel $\frac{a}{b}$ peut être écrit comme une somme finie d'inverses de puissances p-ièmes distinctes si et seulement si:

$$\frac{a}{b} \in \cup_{z \in P} [z, z + \sum_{k=1}^{+\infty} (t_p + k)^{-p} [$$

Cas particulier des sommes finies d'inverses de puissances p-ièmes

Voici un tableau regroupant les valeurs de t_p pour p = 1, 2, 3.

p	t_p	$\left(2^{1/p} - 1\right)^{-1}$
1	0	1
2	1	2
3	2	3

Cas particulier des sommes finies d'inverses de puissances p-ièmes

Corollaire 1

Un nombre rationnel positif $\frac{a}{b}$ est la somme finie d'inverses de carrées distincts si et seulement si :

$$\frac{a}{b} \in [0, \frac{\pi^2}{6} - 1[\cup[1, \frac{\pi^2}{6}[$$

Cas particulier des sommes finies d'inverses de puissances p-ièmes

Corollaire 1

Un nombre rationnel positif $\frac{a}{b}$ est la somme finie d'inverses de carrées distincts si et seulement si :

$$\frac{a}{b} \in [0, \frac{\pi^2}{6} - 1[\cup[1, \frac{\pi^2}{6}[$$

Corollaire 2

Un nombre rationnel positif $\frac{a}{b}$ est la somme finie d'inverses de cubes distincts si et seulement si :

$$\frac{a}{b} \in [0, \zeta(3) - \frac{9}{8}[\cup[\frac{1}{8}, \zeta(3) - 1[\cup[1, \zeta(3) - \frac{1}{8}[\cup[\frac{9}{8}, \zeta(3)[$$

Décomposition pratique : Algorithme Glouton

Idée de l'algorithme :

- glouton(0) renvoie la liste vide [ ].
- si k est le plus petit entier qui vérifie $\frac{1}{k^p} \leq x$, alors glouton(x) = [k] + glouton(x - $\frac{1}{k^p}$).

Décomposition pratique : Algorithme Glouton

Résultats pour la décomposition en inverses de carrés :

Nombre	Décomposition obtenue	Temps d'excécution
$\frac{1}{6}$	[3, 5, 9, 18, 90]	0.01779 s
$\frac{1}{20}$	[5, 10]	0.0917911 s
$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}$	Profondeur maximale de récursion	-

Table: Résultats de l'algorithme glouton pour la décomposition en inverses de carrés

Décomposition pratique : Algorithme Glouton

Résultats pour la décomposition en inverses de cubes :

Nombre	**Décomposition obtenue**	**Temps d'excécution**
$\frac{1}{6}$	[2, 3, 6]	0.0159
$\frac{1}{200}$	[6, 14, 56, 160, 1260, 10080]	0.154907
$\frac{1}{7}, \frac{1}{15}, \frac{1}{30}$	Profondeur maximale de récursion	-

Table: Résultats de l'algorithme glouton pour la décomposition en inverses de cubes

Conclusion : L'algorithme Glouton n'est pas assez efficace! De plus, les théorèmes à notre disposition ne permettent pas de prouver sa terminaison.

Décomposition pratique : Deuxième algorithme

Idée de l'algorithme : Il s'agit d'un algorithme récursif qui repose sur la remarque suivante (par exemple dans le cas des inverses de carrés):

$$\begin{aligned} r = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} (avec x < y) &\Rightarrow r < \frac{2}{x^2} \\ &\Rightarrow x^2 < \frac{2}{r} \\ &\Rightarrow x < \sqrt{\frac{2}{r}} \end{aligned}$$

Ainsi, il suffit de tester pour tout x tel que $\sqrt{\frac{1}{r}} \leq x < \sqrt{\frac{2}{r}}$ si $\frac{rx^2 - 1}{x^2}$ est un carré parfait.
Tant qu'on n'a pas pu décomposer r avec N termes, on incrémente N.

Décomposition pratique : Deuxième algorithme

- Choix du rang du début de la recherche,
- L'algorithme détermine une décomposition utilisant un nombre minimal de termes.

Décomposition pratique : Deuxième algorithme

Analyse de l'algorithme :

1. **Terminaison :** Les théorèmes fournissent l'existence de N tel que r se décompose en somme finie de N termes d'inverses de puissances n-ièmes, cela fournit la terminaison de l'algorithme
2. **Correction :** Elle est fournie par la remarque faite précédemment.

Résultats pour la décomposition en inverses de carrés :

Nombre	Décomposition obtenue	Temps d'excécution
$\frac{1}{6}$	[3, 5, 9, 18, 90]	0.0419 s
$\frac{1}{3}$	[2, 4, 7, 60, 84, 420]	0.1304 s
$\frac{1}{2}$	[2, 3, 4, 5, 7, 8, 56, 168, 840]	0.12091 s
$\frac{1}{8}$	[3, 12, 15, 20]	0.0400 s
$\frac{1}{5}$	[3, 4, 7, 13, 126, 1316, 59220, 769860]	0.24684 s
$\frac{2}{5}$	[2, 3, 6, 10, 30]	0.02874 s

Décomposition pratique : Deuxième algorithme

Résultats pour la décomposition en inverses de carrés :

Nombre	Décomposition obtenue	Temps d'excécution
$\frac{3}{7}$	[2, 3, 4, 20, 21, 84, 140]	0.119936 s
$\frac{1}{2020}$	[45, 909, 9090]	0.022541 s
$\frac{1}{39}$	[7, 14, 90, 370, 4095, 43290]	17.41986 s
$\frac{1}{2024}$	[45, 2277, 5060, 9108]	29.895702 s
$\frac{1}{2022}$	[45, 1170, 21905, 109525, 1971450]	17 h 5 min
$\frac{3}{5}$	-	Une semaine

Décomposition pratique : Deuxième algorithme

Résultats pour la décomposition en inverses de cubes :

Nombre	Décomposition obtenue	Temps d'excécution
$\frac{1}{6}$	[2, 3, 6]	0.033274 s
$\frac{1}{15}$	[3, 4, 5, 6, 9, 72, 120]	0.08394 s
$\frac{2}{15}$	[2, 5, 15, 30]	0.0581784 s
$\frac{1}{20}$	[3, 5, 6, 15, 30]	0.04985 s
$\frac{1}{150}$	[6, 8, 24, 45, 120, 360]	4.885971 s
$\frac{1}{7}$	[2, 4, 8, 16, 35, 45, 120, 1008]	7.79217 s

Décomposition pratique : Deuxième algorithme

Décomposition de $\dfrac{3}{5}$ en sommes d'inverses de carrés :

En remarquant que $\dfrac{3}{5} = \dfrac{1}{5} + \dfrac{2}{5}$, on va essayer de combiner la décomposition de $\dfrac{1}{5}$ et de $\dfrac{2}{5}$ en veillant à décomposer toute fraction en commun à partir du rang suivant jusqu'à avoir une somme de termes distincts.

Décomposition pratique : Deuxième algorithme

Etape	Liste des termes
$\frac{1}{5}$ et $\frac{2}{5}$	[2, 3, 3, 4, 6, 7, 10, 13, 30, 126, 1316, 59220, 769860]
$\frac{1}{3^2}$ à partir de 5	[2, 3, 4, 5, 6, 6, 7, 7, 8, 10, 12, 13, 30, 56, 126, 168, 840, 1316, 59220, 769860]
$\frac{1}{6^2}+\frac{1}{7^2}$ à partir 8	[2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 8, 9, 10, 10, 11, 12, 13, 24, 30, 56, 70, 126, 168, 308, 840, 1316, 3960, 27720, 59220, 769860]
$\frac{1}{8^2}$ à partir de 14	[2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 20, 21, 24, 28, 30, 56, 70, 126, 168, 168, 308, 840, 1316, 3960, 27720, 59220, 769860]

Décomposition pratique : Deuxième algorithme

Etape	Liste des termes
$\frac{1}{10^2}$ à partir de 16	[2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 20, 21, 24, 24, 28, 30, 34, 56, 70, 126, 168, 168, 240, 272, 308, 816, 840, 1316, 3960, 27720, 59220, 769860]
$\frac{1}{24^2}$ à partir de 31	[2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 20, 21, 24, 28, 30, 31, 34, 40, 56, 70, 126, 155, 168, 168, 186, 240, 272, 308, 816, 840, 1316, 3960, 27720, 59220, 769860]

Décomposition pratique : Deuxième algorithme

Etape	**Liste des termes**
$\frac{1}{168^2}$ à partir de 169	[2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 20, 21, 24, 28, 30, 31, 34, 40, 56, 70, 126, 155, 168, 175, 186, 240, 272, 308, 600, 816, 840, 1316, 3960, 27720, 59220, 769860]

Décomposition pratique : Deuxième algorithme

Finalement:

$$\frac{3}{5}=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{8^2}+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{11^2}+\frac{1}{12^2}+\frac{1}{13^2}+\frac{1}{14^2}+\frac{1}{15^2}+\frac{1}{16^2}+\frac{1}{17^2}+\frac{1}{20^2}+\frac{1}{21^2}+\frac{1}{24^2}+\frac{1}{28^2}+\frac{1}{30^2}+\frac{1}{31^2}+\frac{1}{34^2}+\frac{1}{40^2}+\frac{1}{56^2}+\frac{1}{70^2}+\frac{1}{126^2}+\frac{1}{155^2}+\frac{1}{168^2}+\frac{1}{175^2}+\frac{1}{186^2}+\frac{1}{240^2}+\frac{1}{272^2}+\frac{1}{308^2}+\frac{1}{600^2}+\frac{1}{816^2}+\frac{1}{840^2}+\frac{1}{1316^2}+\frac{1}{3960^2}+\frac{1}{27720^2}+\frac{1}{59220^2}+\frac{1}{769860^2}$$

Décomposition pratique : Deuxième algorithme

Finalement:

$$\frac{3}{5} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{11^2} + \frac{1}{12^2} + \frac{1}{13^2} + \frac{1}{14^2} + \frac{1}{15^2} + \frac{1}{16^2} + \frac{1}{17^2} + \frac{1}{20^2} + \frac{1}{21^2} + \frac{1}{24^2} + \frac{1}{28^2} + \frac{1}{30^2} + \frac{1}{31^2} + \frac{1}{34^2} + \frac{1}{40^2} + \frac{1}{56^2} + \frac{1}{70^2} + \frac{1}{126^2} + \frac{1}{155^2} + \frac{1}{168^2} + \frac{1}{175^2} + \frac{1}{186^2} + \frac{1}{240^2} + \frac{1}{272^2} + \frac{1}{308^2} + \frac{1}{600^2} + \frac{1}{816^2} + \frac{1}{840^2} + \frac{1}{1316^2} + \frac{1}{3960^2} + \frac{1}{27720^2} + \frac{1}{59220^2} + \frac{1}{769860^2}$$

1. Somme de 42 termes distincts.

Finalement:

$$\frac{3}{5}=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{8^2}+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{11^2}+\frac{1}{12^2}+\frac{1}{13^2}+\frac{1}{14^2}+\frac{1}{15^2}+\frac{1}{16^2}+\frac{1}{17^2}+\frac{1}{20^2}+\frac{1}{21^2}+\frac{1}{24^2}+\frac{1}{28^2}+\frac{1}{30^2}+\frac{1}{31^2}+\frac{1}{34^2}+\frac{1}{40^2}+\frac{1}{56^2}+\frac{1}{70^2}+\frac{1}{126^2}+\frac{1}{155^2}+\frac{1}{168^2}+\frac{1}{175^2}+\frac{1}{186^2}+\frac{1}{240^2}+\frac{1}{272^2}+\frac{1}{308^2}+\frac{1}{600^2}+\frac{1}{816^2}+\frac{1}{840^2}+\frac{1}{1316^2}+\frac{1}{3960^2}+\frac{1}{27720^2}+\frac{1}{59220^2}+\frac{1}{769860^2}$$

1. Somme de 42 termes distincts.
2. Temps total de calcul en secondes :326.457318 secondes (5.5 minutes environ).

Décomposition pratique : Deuxième algorithme

Finalement:

$$\frac{3}{5} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{11^2} + \frac{1}{12^2} + \frac{1}{13^2} + \frac{1}{14^2} + \frac{1}{15^2} + \frac{1}{16^2} + \frac{1}{17^2} + \frac{1}{20^2} + \frac{1}{21^2} + \frac{1}{24^2} + \frac{1}{28^2} + \frac{1}{30^2} + \frac{1}{31^2} + \frac{1}{34^2} + \frac{1}{40^2} + \frac{1}{56^2} + \frac{1}{70^2} + \frac{1}{126^2} + \frac{1}{155^2} + \frac{1}{168^2} + \frac{1}{175^2} + \frac{1}{186^2} + \frac{1}{240^2} + \frac{1}{272^2} + \frac{1}{308^2} + \frac{1}{600^2} + \frac{1}{816^2} + \frac{1}{840^2} + \frac{1}{1316^2} + \frac{1}{3960^2} + \frac{1}{27720^2} + \frac{1}{59220^2} + \frac{1}{769860^2}$$

1. Somme de 42 termes distincts.
2. Temps total de calcul en secondes :326.457318 secondes (5.5 minutes environ).
3. Aucune information sur l'optimalité.

Décomposition pratique : Deuxième algorithme

Finalement:

$$\frac{3}{5}=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{8^2}+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{11^2}+\frac{1}{12^2}+\frac{1}{13^2}+\frac{1}{14^2}+\frac{1}{15^2}+\frac{1}{16^2}+\frac{1}{17^2}+\frac{1}{20^2}+\frac{1}{21^2}+\frac{1}{24^2}+\frac{1}{28^2}+\frac{1}{30^2}+\frac{1}{31^2}+\frac{1}{34^2}+\frac{1}{40^2}+\frac{1}{56^2}+\frac{1}{70^2}+\frac{1}{126^2}+\frac{1}{155^2}+\frac{1}{168^2}+\frac{1}{175^2}+\frac{1}{186^2}+\frac{1}{240^2}+\frac{1}{272^2}+\frac{1}{308^2}+\frac{1}{600^2}+\frac{1}{816^2}+\frac{1}{840^2}+\frac{1}{1316^2}+\frac{1}{3960^2}+\frac{1}{27720^2}+\frac{1}{59220^2}+\frac{1}{769860^2}$$

1. Somme de 42 termes distincts.
2. Temps total de calcul en secondes :326.457318 secondes (5.5 minutes environ).
3. Aucune information sur l'optimalité.
4. Méthode non généralisable à tous les nombres.

Résultats théoriques établis

Résultats pour la décomposition en inverses de carrés :

- Pas d'unicité :

$$\begin{aligned}\frac{1}{20} &= \frac{1}{5^2} + \frac{1}{10^2} \\ &= \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{25^2} + \frac{1}{75^2} + \frac{1}{175^2} + \frac{1}{525^2}\end{aligned}$$

Résultats théoriques établis

Une infinité de décompositions pour tout nombre différent de 0 et 1 :

- Si $\frac{1}{2^2}$ est le dernier terme :
  $\frac{1}{2^2} = \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{4^2} + \dfrac{1}{5^2} + \dfrac{1}{7^2} + \dfrac{1}{8^2} + \dfrac{1}{56^2} + \dfrac{1}{168^2} + \dfrac{1}{840^2}$
- Si $\frac{1}{m^2}$ est le dernier terme avec $m > 2$:
  $m > 2 \Rightarrow \dfrac{1}{m^2} - \dfrac{1}{(m+1)^2} < \dfrac{1}{(m+1)^2}$
  Or: $\dfrac{1}{m^2} - \dfrac{1}{(m+1)^2} = \sum_{k \in I} \dfrac{1}{k^2}$ avec I fini et $\forall k \in I,\ k > m+1$.
  Ainsi: $\frac{1}{m^2} = \frac{1}{(m+1)^2} + \sum_{k \in I} \dfrac{1}{k^2}$.

Merci Pour Votre Attention

Preuve du théorème 2 :
Soit x $\in \cup_{z\in P_{r-1}}[z, z+\sigma[$, on suppose que x $\notin$ Ac(S).
Alors x $\in [z, z+\sigma[$ pour un certain z dans P_{r-1}. On dira qu'une somme de la formr z$+\sum_{t=1}^{k} s_{i_t}$ avec $r \leq i_1 < i_2 < ... < i_k$ est "minimale" si

$$z + \sum_{t=1}^{k-1} s_{i_t} < x < z + \sum_{t=1}^{k} s_{i_t}$$

(On ne peut pas avoir égalité car x$\notin Ac(S) \Rightarrow x \notin$ P(S)).

Annexe

Soit M l'ensemble des sommes minimales, et supposons que M est fini. Soit m le plus grand indice de tous les s_j qui apparaissent dans un élément de M, et soit $p = z + \sum_{k=1}^{n} s_{j_k} + s_m$ un élément de M qui utilise s_m (avec $r \leq j_1 < j_2 < ... < j_n < m$). On a donc:

$$z + \sum_{k=1}^{n} s_{j_k} < x < z + \sum_{k=1}^{n} s_{j_k} + \sum_{t=1}^{\infty} s_{m+t}$$

car s_m est remplaçable dans S. Ainsi, il existe un plus petit d$\geq$1 tel que x $<$ p'$= z + \sum_{k=1}^{n} s_{j_k} + \sum_{t=1}^{d} s_{m+t}$. Par minimalité de p', p' est "minimale" et utilise s_{m+d} avec m+d $>$ m, ce qui contredit la définition de m. D'où, M est infinie.

Annexe

Posons donc $\delta = inf\ \{p - x | p \in M\}$. Comme x $\notin Ac(S)$, $\delta > 0$. Il existe $p_1, p_2, \ldots \in M$ tel que $p_n - x < \delta + \delta/2^n$. D'après 1, il existe c tel que $n \geq c \Rightarrow s_n < \frac{\delta}{2}$. De plus, il existe w tel que $n \geq w$ implique que p_n utilise un s_k avec $k \geq c$ (car seulemnt un nombre fini des p_j peuvent être formés à partir des s_k avec k¡c). Ainsi on peut écrire $p_w = z + \sum_{j=1}^{n} s_{k_j}$ avec $k_n \geq c$. Donc:

$$p_w - s_{k_n} - x > p_w - \frac{\delta}{2} - x \geq \delta - \frac{\delta}{2} = \frac{\delta}{2} > 0$$

Ce qui contredit le fait que p_w est "minimale". Ainsi, x $\in$ Ac(S) et on a l'inclusion:

$$\cup_{z \in P_{r-1}} [z, z + \sigma[\subset Ac(S).$$

Inclusion réciproque:
Soit x $\in$ Ac(S), on suppose que x $\notin \cup_{z \in P_{r-1}} [z, z+\sigma[$.
Donc, x < 0, x $\geq \sum_{k=1}^{\infty} s_k$, ou bien il existe z et z' dans P_{r-1} tels que z$+\sigma \leq x < z'$ et aucun élément de P_{r-1} n'appartient à l'intervalle $[z+\sigma, z'[$. Les 2 premiers cas impliquent que x $\notin$ Ac(S) donc on peut supposer le troisième cas vrai. Il existe donc $\delta > 0$ tel que $x \leq z' - \delta$ $(*)$.

Soit p un élément P(S). Alors il existe m et n tels que $p = \sum_{t=1}^{m} s_{i_t} + \sum_{u=1}^{n} s_{j_u}$ avec $1 \leq i_1 < ... < i_m \leq r - 1 < j_1 < ... < j_n$. Ainsi, p $\in [z^*, z^* + \sigma[$ avec $z^* = \sum_{t=1}^{m} s_{i_t}$. D'où, tout élément p de P(S) appartient à un intervalle $[z^*, z^* + \sigma[$ pour un certain $z^* \in P_{r-1}$, donc si p est supérieur à x, il est supérieur à x+δ, car $\notin [z + \sigma, z'[$ et par $(*)$ on a :

$$p > x \in [z + \sigma, z'[\Rightarrow p \geq z' \geq x + \delta$$

.

Cela contredit l'hypothèse x $\in$ Ac(S), d'où l'inclusion réciproque.

Preuve du théorème 3 :
D'après le théorème 2, on a

$$Ac(S) = \cup_{z \in P_{r-1}} [z, z + \sigma[$$

où $P_{r-1} = P((s_1, ..., s_{r-1}))$ ($P_0 = \{0\}$) et $\sigma = \sum_{k=r}^{+\infty} s_k$. Soit $z = \sum_{k=1}^{u} s_{i_k}$ et $z' = \sum_{k=1}^{v} s_{j_k}$ deux sommes finies distinctes de termes distincts de S avec $1 \leq i_1 < ... < i_u \leq r-1$ et $1 < j_1 < ... < j_v \leq r-1$, on peut supposer sans perte de généralité que $z \geq z'$. Alors, ou bien il existe un plus petit $m \geq 1$ tel que $i_m \neq j_m$, ou bien $i_k = j_k$ pour k = 1,2,...,v et $u > v$.

Annexe

Dans le premier cas, on a:

$$\begin{aligned} z &= \sum_{k=1}^{u} s_{i_k} \\ &= \sum_{k=1}^{m-1} s_{j_k} + \sum_{k=m}^{u} s_{i_k} \\ &> \sum_{k=1}^{m-1} s_{j_k} + \sum_{k=1}^{\infty} s_{i_{m+k}} \end{aligned}$$

car s_{i_m} n'est pas remplaçable dans S

$$\geq z' + \sigma$$

car $j_m \geq i_m + 1$.

Dans le second cas, on a:

$$
\begin{aligned}
z &= \sum_{k=1}^{u} s_{i_k} \\
&= \sum_{k=1}^{v} s_{j_k} + \sum_{k=v+1}^{u} s_{i_k} \\
&> \sum_{k=1}^{v} s_{j_k} + \sum_{k=1}^{\infty} s_{i_{v+1}+k}
\end{aligned}
$$

car $s_{i_{v+1}}$ n'est pas remplaçable dans S

$$\geq z' + \sigma$$

car $i_{v+1} + 1 \leq i_u + 1 \leq r$.

Ainsi, dans tous les cas, $z > z' + \sigma$.

Toutes deux sommes distinctes de P_{r-1} sont séparées d'au moins σ, et donc tout élément z de P_{r-1} définitt un intervalle $[z, z+\sigma[$ disjoint de tout autre intervalle $[z', z'+\sigma[$ avec $z \neq z' \in P_{r-1}$.

Ainsi $Ac(S) = \cup_{z \in P_{r-1}}[z, z+\sigma[$ est l'union disjointe d'exactement 2^{r-1} d'intervalles semi-ouverts de longueur $\sum_{k=r}^{\infty} s_k$ (car il existe exactement 2^{r-1} sommes distinctes dans P_{r-1}).

Preuve du lemme 1:
Si $\sum_{k=1}^{+\infty} s_k = +\infty$, le résultat est immédiat.
Suposons donc que $\sum_{k=1}^{+\infty} s_k < +\infty$. On a :

$$\begin{aligned}
n \geq m \Rightarrow s_{n+k} &\geq \frac{1}{2} s_{n+k-1} \\
&\Rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} s_{n+k} \geq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} s_{n+k-1} = \frac{1}{2} s_n + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} s_{n+k} \\
&\Rightarrow s_n \leq \sum_{k=1}^{+\infty} s_{n+k}
\end{aligned}$$

D'où le résultat.

Annexe

Preuve du lemme 2:

$$\begin{aligned} k \leq \left(2^{1/p} - 1\right)^{-1} &\Rightarrow \frac{1}{k} \geq 2^{1/p} - 1 \\ &\Rightarrow \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{p} \geq 2 \\ &\Rightarrow k^{-p} \geq 2\left(k+1\right)^{-p} \end{aligned}$$

Par hypothèse, $\sum_{j=k+1}^{+\infty} j^{-p} \geq k^{-p}$
D'où,
$\sum_{j=k+2}^{+\infty} j^{-p} \geq k^{-p} - (k+1)^{-p} \geq 2\left(k+1\right)^{-p} - (k+1)^{-p} = (k+1)^{-p}$.

Annexe

Preuve du lemme 3:

$$\begin{aligned} r \geq k \Rightarrow r &\geq \left(2^{1/p} - 1\right)^{-1} \\ &\Rightarrow \frac{1}{r} \leq 2^{1/p} - 1 \\ &\Rightarrow \left(1 + \frac{1}{r}\right)^{p} \leq 2 \\ &\Rightarrow r^{-p} \geq 2\,(r+1)^{-p} \end{aligned}$$

D'après le lemme 1, r^{-p} est remplaçable dans H^p pour tout $r \geq k$.

Algorithme Glouton

```
from fractions import Fraction
import math



def glouton(nbre,rang,card,p):
    if nbre<0: ###Erreurs de calcul sur les grands nombres###
        return glouton(nbre+Fraction(1,(rang-1)**p),rang+1,card,p)

    if nbre==0:
        return []

    elif card==0:
        return []

    else:
        k=math.ceil((1/nbre)**(1/p))
        k=max(k,rang)

        return [k] + glouton(nbre-Fraction(1,k**p),k+1,card-1,p)
```

Algorithme 2 (Partie 1)

```python
from fractions import Fraction

def decompose(nbre,card,rang,puiss):

    if nbre==0:
        return True,[]

    if card==1:
        p=int((1/nbre)**(1/puiss))
        if p**puiss == 1/nbre and p>=rang:
            return True,[int((1/nbre)**(1/puiss))]
        else:
            return False,[]
```

Algorithme 2 (Partie 2)

```python
    else:
        x=max(rang,int((1/nbre)**(1/puiss))+1)
        while x**puiss < card/nbre:
            y=nbre-Fraction(1,x**puiss)
            d=decompose(y,card-1,x+1,puiss )
            if d[0]:
                return True,[x]+ d[1]
            x=x+1

        return False,[]

def graham(nbre,rang,puiss):
    n=1
    while not decompose(nbre,n,rang,puiss)[0]:
        n+=1

    return decompose(nbre,n,rang,puiss)[1]
```