TIPE : Décomposition en somme finie de fractions unitaires

BENDAHI Abderrahim

2021-2022

1 Introduction

Le traitement de signaux a des applications diverses en médecine, cependant, un bruit est généralement rajouté au signal à cause de l'erreur de quantification qui est la différence entre la valeur réelle du nombre et la valeur codée en binaire. De là, je me suis intéressé à la possibilité de décomposer tout nombre réel en somme finie de termes d'une suite. Après des recherches, j'ai trouvé que ce n'est pas possible, mais le meilleur résultat que j'ai découvert c'est un théorème de Graham (références [1] et [2]) qui permet de montrer en particulier que tout nombre rationnel positif dans un certain intervalle peut être décomposé en somme finie d'inverses de carrés.

2 Théorème de Graham : cas particulier des sommes finies d'inverses de puissances n-ièmes

2.1 Quelques définitions :

Si $S = (s_1, s_2, ...)$, on définit :

- $P(S) = \{ \sum_{k=1}^{+\infty} \varepsilon_k s_k \mid (\varepsilon_k)$ suite presque nulle prenant 0 ou 1 $\}$
- Un réel x est dit S-accessible si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe p dans P(S) tel que $0 \leq p - x < \varepsilon$.
- On note $Ac(S)$ l'ensemble des nombres S-accessibles.
- Si $n \in \mathbb{N}^*$, on note H^n la suite des inverses de puissances n-ièmes, i.e $H^n = (1^{-n}, 2^{-n}, 3^{-n}, \ldots)$.
- Un terme s_n de S est dit remplaçable dans S si $s_n \leq \sum_{k=1}^{+\infty} s_{n+k}$.

2.2 Théorème fondamental (admis) :

Le nombre rationnel $\dfrac{p}{q}$ est la somme finie de termes distincts de H^n si et seulement si $\dfrac{p}{q}$ est H^n-accessible. Cela s'écrit :

$$P(H^n) = Ac(H^n) \cap \mathbb{Q}$$

La preuve repose sur un théorème de Graham présenté en [1] dont la démonstration est longue et très technique.

2.3 Théorème 2 :

Soit S$=(s_n) \in (\mathbb{R})^{\mathbb{N}^*}$ qui vérifie :

1. (s_n) décroît strictement vers 0,
2. il existe un rang r à partir duquel s_n est remplaçable dans S.

   Alors :

$$Ac(S) = \cup_{z \in P_{r-1}} [z, z + \sigma[$$

où $P_{r-1} = P((s_1, ..., s_{r-1}))$ ($P_0 = \{0\}$) et $\sigma = \sum_{k=r}^{+\infty} s_k$ (éventuellement infinie).

Preuve :

— Soit $x \in \cup_{z \in P_{r-1}} [z, z+\sigma[$, on suppose que $x \notin Ac(S)$.
Alors $x \in [z, z+\sigma[$ pour un certain z dans P_{r-1}. On dira qu'une somme de la forme $z + \sum_{t=1}^{k} s_{i_t}$ avec $r \leq i_1 < i_2 < ... < i_k$ est "minimale" si

$$z + \sum_{t=1}^{k-1} s_{i_t} < x < z + \sum_{t=1}^{k} s_{i_t}$$

(On ne peut pas avoir égalité car $x \notin Ac(S) \Rightarrow x \notin$ P(S)).
Soit M l'ensemble des sommes minimales, et supposons que M est fini.
Soit m le plus grand indice de tous les s_j qui apparaissent dans un élément de M, et soit $p = z + \sum_{k=1}^{n} s_{j_k} + s_m$ un élément de M qui utilise s_m (avec $r \leq j_1 < j_2 < ... < j_n < m$). On a donc :

$$z + \sum_{k=1}^{n} s_{j_k} < x < z + \sum_{k=1}^{n} s_{j_k} + \sum_{t=1}^{\infty} s_{m+t}$$

car s_m est remplaçable dans S. Ainsi, il existe un plus petit $d \geq 1$ tel que $x < p' = z + \sum_{k=1}^{n} s_{j_k} + \sum_{t=1}^{d} s_{m+t}$. Par minimalité de p', p' est "minimale" et utilise s_{m+d} avec $m + d > m$, ce qui contredit la définition de m . D'où, M est infinie.
Posons donc $\delta = inf \, \{p - x | p \in M\}$. Comme $x \notin Ac(S)$, $\delta > 0$. Il existe $p_1, p_2, \ldots \in M$ tel que $p_n - x < \delta + \delta/2^n$. D'après 1, il existe c tel que $n \geq c \Rightarrow s_n < \frac{\delta}{2}$. De plus, il existe w tel que $n \geq w$ implique que p_n utilise un s_k avec $k \geq c$ (car seulemnt un nombre fini des p_j peuvent être formés à partir des s_k avec $k < c$). Ainsi on peut écrire $p_w = z + \sum_{j=1}^{n} s_{k_j}$ avec $k_n \geq c$. Donc :

$$p_w - s_{k_n} - x > p_w - \frac{\delta}{2} - x \geq \delta - \frac{\delta}{2} = \frac{\delta}{2} > 0$$

Ce qui contredit le fait que p_w est "minimale". Ainsi, $x \in Ac(S)$ et on a l'inclusion :

$$\cup_{z \in P_{r-1}} [z, z+\sigma[\subset Ac(S).$$

— Soit $x \in Ac(S)$, on suppose que $x \notin \cup_{z \in P_{r-1}} [z, z+\sigma[$. Donc, $x < 0$, $x \geq \sum_{k=1}^{\infty} s_k$, ou bien il existe z et z' dans P_{r-1} tels que $z + \sigma \leq x < z'$ et aucun élément de P_{r-1} n'appartient à l'intervalle $[z+\sigma, z'[$. Les 2 premiers cas impliquent que $x \notin Ac(S)$ donc on peut supposer le troisième cas vrai. Il existe donc $\delta > 0$ tel que $x \leq z' - \delta$ $(*)$.
Soit p un élément P(S). Alors il existe m et n tels que $p = \sum_{t=1}^{m} s_{i_t} + \sum_{u=1}^{n} s_{j_u}$ avec $1 \leq i_1 < ... < i_m \leq r-1 < j_1 < ... < j_n$. Ainsi, p $\in [z^*, z^* + \sigma[$ avec $z^* = \sum_{t=1}^{m} s_{i_t}$. D'où, tout élément p de $P(S)$ appartient à un intervalle $[z^*, z^* + \sigma[$ pour un certain $z^* \in P_{r-1}$, donc si p est supérieur à x, il est supérieur à $x + \delta$, car $p \notin [z+\sigma, z'[$ et par $(*)$ on a :

$$p > x \in [z+\sigma, z'[\Rightarrow p \geq z' \geq x + \delta$$

Cela contredit l'hypothèse $x \in Ac(S)$, d'où l'inclusion réciproque.

2.4 Théorème 3 :

Soit S=$(s_n) \in (\mathbb{R})^{\mathbb{N}^*}$ qui vérifie :

1. (s_n) décroît strictement vers 0,
2. il existe un rang r tel que $n < r$ implique que s_n n'est pas remplaçable dans S, et $n \geq r$ implique que s_n est remplaçable dans S .

Alors Ac(S) est l'union disjointe d'exactement 2^{r-1} intervalles semi-ouverts de longueur $\sum_{k=r}^{\infty} s_k$.

2.5 Lemme 1 :

Soit S=(s_n) une suite à termes positifs telle qu'il existe m tel que $n \geq m \Rightarrow s_n \leq 2s_{n+1}$.
Alors, $n \geq m \Rightarrow s_n$ est remplaçable dans S (i.e., $s_n \leq \sum_{k=1}^{+\infty} s_{n+k}$).

Preuve :
Si $\sum_{k=1}^{+\infty} s_k = +\infty$, le résultat est immédiat.
Suposons donc que $\sum_{k=1}^{+\infty} s_k < +\infty$. On a :

$$\begin{aligned} n \geq m \Rightarrow s_{n+k} &\geq \frac{1}{2} s_{n+k-1} \\ \Rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} s_{n+k} &\geq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} s_{n+k-1} = \frac{1}{2} s_n + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} s_{n+k} \\ \Rightarrow s_n &\leq \sum_{k=1}^{+\infty} s_{n+k} \end{aligned}$$

D'où le résultat.

2.6 Lemme 2 :

On suppose que $k \leq \left(2^{1/n} - 1\right)^{-1}$ et k^{-n} est remplaçable dans H^n.
Alors $(k+1)^{-n}$ est aussi remplaçable dans H^n.
Preuve :

$$\begin{aligned} k \leq \left(2^{1/n} - 1\right)^{-1} &\Rightarrow \frac{1}{k} \geq 2^{1/n} - 1 \\ &\Rightarrow \left(1 + \frac{1}{k}\right)^n \geq 2 \\ &\Rightarrow k^{-n} \geq 2\,(k+1)^{-n} \end{aligned}$$

Par hypothèse, $\sum_{j=k+1}^{+\infty} j^{-n} \geq k^{-n}$
D'où, $\sum_{j=k+2}^{+\infty} j^{-n} \geq k^{-n} - (k+1)^{-n} \geq 2\,(k+1)^{-n} - (k+1)^{-n} = (k+1)^{-n}$.

2.7 Lemme 3 :

On suppose que $k \geq \left(2^{1/n} - 1\right)^{-1}$.
Alors k^{-n} est remplaçable dans H^n.
Preuve :

$$\begin{aligned} r \geq k \Rightarrow r &\geq \left(2^{1/n} - 1\right)^{-1} \\ \Rightarrow \frac{1}{r} &\leq 2^{1/n} - 1 \\ \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{k}\right)^n &\leq 2 \\ \Rightarrow r^{-n} &\geq 2\,(r+1)^{-n} \end{aligned}$$

D'après le lemme 1, r^{-n} est remplaçable dans H^n pour tout $r \geq k$.

En combinant le théorème 3, les lemmes 2 et 3, on obtient :

2.8 Théorème 4 :

Soit t_n le plus grand entier k tel que k est non remplaçable dans H^n, et notons :
$P = P\left((1^{-n}, 2^{-n}, \ldots, t_n^{-n})\right)$. Alors

$$Ac(H^n) = \cup_{z \in P}[z, z + \sum_{k=1}^{+\infty} (t_n + k)^{-n} [$$

est l'union disjointe d'exactement 2^{t_n} intervalles .
De plus $t_n < \left(2^{1/n} - 1\right)^{-1}$.

Voici un tableau regroupant les valeurs de t_n pour n = 0, 1, 2.

n	t_n	$\left(2^{1/n} - 1\right)^{-1}$
1	0	1
2	1	2
3	2	3

En combinant le théorème fondamental et le théorème 4 , il vient :

2.9 Théorème 5 :

Soit n un entier naturel non nul. Soit t_n le plus grand entier k tel que $k^{-n} > \sum_{j=1}^{+\infty} (k+j)^{-n}$ et $P = \{\sum_{j=1}^{t_n} \varepsilon_j j^{-n} : \varepsilon_j = 0 \text{ ou } 1\ \}$. Alors le nombre rationnel $\frac{p}{q}$ peut être écrit comme une somme finie d'inverses de puissances n-ièmes distinctes si et seulement si :

$$\frac{p}{q} \in \cup_{z \in P}[z, z + \sum_{k=1}^{+\infty} (t_n + k)^{-n} [$$

2.10 Corollaire 1 :

Un nombre rationnel positif $\frac{p}{q}$ est la somme finie d'inverses de carrées distincts si et seulement si :

$$\frac{p}{q} \in [0, \frac{\pi^2}{6} - 1[\cup[1, \frac{\pi^2}{6}[$$

2.11 Corollaire 2 :

Un nombre rationnel positif $\frac{p}{q}$ est la somme finie d'inverses de cubes distincts si et seulement si :

$$\frac{p}{q} \in [0, \zeta(3) - \frac{9}{8}[\cup[\frac{1}{8}, \zeta(3) - 1[\cup[1, \zeta(3) - \frac{1}{8}[\cup[\frac{9}{8}, \zeta(3)[$$

3 Décomposition pratique des rationnels en somme finie d'inverses de puissances n-ièmes :

3.1 Première approche : Algorithme Glouton :

3.1.1 Idée de l'algorithme :

Il s'agit d'un algorithme récursif dont le principe est le suivant :

— glouton(0) renvoie la liste vide [ ].

— si k est le plus petit entier qui vérifie $x \geq \frac{1}{k^n}$, alors glouton(x) = [k] + glouton($x - \frac{1}{k^n}$).

3.1.2 Résultats pour la décomposition en inverses de carrés :

Nombre	**Décomposition obtenue**	**Temps d'excécution**
$\frac{1}{6}$	[3, 5, 9, 18, 90]	0.01779 s
$\frac{1}{20}$	[5, 10]	0.0917911 s
$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}$	Profondeur maximale de récursion	-

Table 1 – Résultats de l'algorithme glouton pour la décomposition en inverses de carrés

3.1.3 Résultats pour la décomposition en inverses de cubes :

Nombre	**Décomposition obtenue**	**Temps d'excécution**
$\frac{1}{6}$	[2, 3, 6]	0.0159
$\frac{1}{200}$	[6, 14, 56, 160, 1260, 10080]	0.154907
$\frac{1}{7}, \frac{1}{15}, \frac{1}{30}$	Profondeur maximale de récursion	-

Table 2 – Résultats de l'algorithme glouton pour la décomposition en inverses de cubes

Conclusion : L'algorithme Glouton échoue pour trouver la décomposition de la majorité des nombres ! De plus, les théorèmes à notre disposition ne permettent pas de prouver sa terminaison.

3.2 Deuxième algorithme :

3.2.1 Idée de l'algorithme :

Il s'agit d'un algorithme récursif qui repose sur la remarque suivante (par exemple dans le cas des inverses de carrés) :

$$\begin{aligned} r = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \quad \text{avec} \quad x < y &\Rightarrow r < \frac{2}{x^2} \\ &\Rightarrow x^2 < \frac{2}{r} \\ &\Rightarrow x < \sqrt{\frac{2}{r}} \end{aligned}$$

Ainsi, il suffit de tester pour tout x tel que $\sqrt{\frac{1}{r}} \leq x < \sqrt{\frac{2}{r}}$ si $\frac{rx^2 - 1}{x^2}$ est un carré parfait.
Tant qu'on n'a pas pu décomposer r avec N termes, on incrémente N.

3.2.2 Remarques :

- L'algorithme nous permet le choix du rang du début de la recherche,
- L'algorithme détermine une décomposition utilisant un nombre minimal de termes.

3.2.3 Analyse de l'algorithme :

1. **Terminaison :** Les théorèmes fournissent l'existence de N tel que r se décompose en somme finie de N termes distincts de H^n, cela fournit la terminaison de l'algorithme.
2. **Correction :** Elle est fournie par la remarque faite précédemment.

3.2.4 Résultats pour la décomposition en inverses de carrés :

Nombre	Décomposition obtenue	Temps d'excécution
$\frac{1}{6}$	[3, 5, 9, 18, 90]	0.0419 s
$\frac{1}{3}$	[2, 4, 7, 60, 84, 420]	0.1304 s
$\frac{1}{2}$	[2, 3, 4, 5, 7, 8, 56, 168, 840]	0.12091 s
$\frac{1}{8}$	[3, 12, 15, 20]	0.0400 s
$\frac{1}{5}$	[3, 4, 7, 13, 126, 1316, 59220, 769860]	0.24684 s
$\frac{2}{5}$	[2, 3, 6, 10, 30]	0.02874 s
$\frac{3}{7}$	[2, 3, 4, 20, 21, 84, 140]	0.119936 s
$\frac{1}{2020}$	[45, 909, 9090]	0.022541 s
$\frac{1}{39}$	[7, 14, 90, 370, 4095, 43290]	17.41986 s
$\frac{1}{2024}$	[45, 2277, 5060, 9108]	29.895702 s
$\frac{1}{2022}$	[45, 1170, 21905, 109525, 1971450]	17 h 5 min
$\frac{3}{5}$	-	Une semaine

Table 3 – Résultats du deuxième algorithme pour la décomposition en inverses de carrés

3.2.5 Résultats pour la décomposition en inverses de cubes :

Nombre	Décomposition obtenue	Temps d'excécution
$\frac{1}{6}$	[2, 3, 6]	0.033274 s
$\frac{1}{15}$	[3, 4, 5, 6, 9, 72, 120]	0.08394 s
$\frac{2}{15}$	[2, 5, 15, 30]	0.0581784 s
$\frac{1}{20}$	[3, 5, 6, 15, 30]	0.04985 s
$\frac{1}{150}$	[6, 8, 24, 45, 120, 360]	4.885971 s
$\frac{1}{7}$	[2, 4, 8, 16, 35, 45, 120, 1008]	7.79217 s

Table 4 – Résultats du deuxième algorithme pour la décomposition en somme d'inverses de cubes

3.2.6 Décomposition de 3/5 en somme d'inverses de carrés :

En remarquant que $3/5 = 1/5 + 2/5$, on va essayer de concaténer la décomposition de $1/5$ et de $2/5$ en veillant à décomposer toute fraction en commun à partir du rang libre suivant jusqu'à avoir une somme de termes distincts.

La table 5 en annexe présente les étapes de cette décomposition. Finalement on trouve :

$$\frac{3}{5} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{11^2} + \frac{1}{12^2} + \frac{1}{13^2} + \frac{1}{14^2} + \frac{1}{15^2} + \frac{1}{16^2} + \frac{1}{17^2} + \frac{1}{20^2} + \frac{1}{21^2} + \frac{1}{24^2} + \frac{1}{28^2} + \frac{1}{30^2} + \frac{1}{31^2} + \frac{1}{34^2} + \frac{1}{40^2} + \frac{1}{56^2} + \frac{1}{70^2} + \frac{1}{126^2} + \frac{1}{155^2} + \frac{1}{168^2} + \frac{1}{175^2} + \frac{1}{186^2} + \frac{1}{240^2} + \frac{1}{272^2} + \frac{1}{308^2} + \frac{1}{600^2} + \frac{1}{816^2} + \frac{1}{840^2} + \frac{1}{1316^2} + \frac{1}{3960^2} + \frac{1}{27720^2} + \frac{1}{59220^2} + \frac{1}{769860^2}$$

1. Somme de 42 termes distincts.
2. Temps total de calcul en secondes :326.457318 secondes (5.5 minutes environ).
3. J'ignore s'il y a une décomposition de moins de 42 termes.
4. Méthode non généralisable à tous les nombres.

4 Résultats théoriques établis sur la décomposition en inverses de carrés :

— Pas d'unicité :

$$\begin{aligned} \frac{1}{20} &= \frac{1}{5^2} + \frac{1}{10^2} \\ &= \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{25^2} + \frac{1}{75^2} + \frac{1}{175^2} + \frac{1}{525^2} \end{aligned}$$

— Une infinité de décompositions pour tout nombre dans $P(H^2)$ différent de 0 et 1 :

— Si $\frac{1}{2^2}$ est le dernier terme :
$\frac{1}{2^2} = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{56^2} + \frac{1}{168^2} + \frac{1}{840^2}$

— Si $\frac{1}{m^2}$ est le dernier terme avec $m > 2$:

$m > 2 \Rightarrow \dfrac{1}{m^2} - \dfrac{1}{(m+1)^2} < \dfrac{1}{(m+1)^2}$

Or : $\dfrac{1}{m^2} - \dfrac{1}{(m+1)^2} = \sum_{k\in I} \dfrac{1}{k^2}$ avec I fini et $\forall k \in I,\ k > m+1$.

Ainsi : $\frac{1}{m^2} = \frac{1}{(m+1)^2} + \sum_{k\in I} \dfrac{1}{k^2}$.

5 Bibliographie :

[1] Ronald Lewis Graham : On Finite Sums of Unit Fractions : Proc. London Math. Sot. 14 (1964) 193-207.

[2] Ronald Lewis Graham : On Finite Sums of Reciprocals of Distinct nth Powers : Pac. Jour. of Math., 14 (1964), 85-92.

6 Annexe :

6.1 Preuve du théorème 3 :

D'après le théorème 2, on a

$$Ac(S) = \cup_{z\in P_{r-1}}[z, z+\sigma[$$

où $P_{r-1} = P((s_1, ..., s_{r-1}))$ ($P_0 = \{0\}$) et $\sigma = \sum_{k=r}^{+\infty} s_k$. Soit $z = \sum_{k=1}^{u} s_{i_k}$ et $z' = \sum_{k=1}^{v} s_{j_k}$ deux sommes finies distinctes de termes distincts de S avec $1 \leq i_1 < ... < i_u \leq r-1$ et $1 < j_1 < ... < j_v \leq r-1$, on peut supposer sans perte de généralité que $z \geq z'$. Alors, ou bien il existe un plus petit $m \geq 1$ tel que $i_m \neq j_m$, ou bien $i_k = j_k$ pour k = 1,2,...,v et $u > v$.

Dans le premier cas, on a :

$$\begin{aligned} z &= \sum_{k=1}^{u} s_{i_k} \\ &= \sum_{k=1}^{m-1} s_{j_k} + \sum_{k=m}^{u} s_{i_k} \\ &> \sum_{k=1}^{m-1} s_{j_k} + \sum_{k=1}^{\infty} s_{i_m+k} \end{aligned}$$

car s_{i_m} n'est pas remplaçable dans S

$$\geq z' + \sigma$$

car $j_m \geq i_m + 1$.

Dans le second cas, on a :

$$\begin{aligned} z &= \sum_{k=1}^{u} s_{i_k} \\ &= \sum_{k=1}^{v} s_{j_k} + \sum_{k=v+1}^{u} s_{i_k} \\ &> \sum_{k=1}^{v} s_{j_k} + \sum_{k=1}^{\infty} s_{i_{v+1}+k} \end{aligned}$$

car $s_{i_{v+1}}$ n'est pas remplaçable dans S

$$\geq z' + \sigma$$

car $i_{v+1} + 1 \leq i_u + 1 \leq r$.

Ainsi, dans tous les cas,$z > z' + \sigma$.

Toutes deux sommes distinctes de P_{r-1} sont séparées d'au moins σ, et donc tout élément z de P_{r-1} définit un intervalle $[z, z + \sigma[$ disjoint de tout autre intervalle $[z', z' + \sigma[$ avec $z \neq z' \in P_{r-1}$.

Ainsi $Ac(S) = \cup_{z \in P_{r-1}} [z, z + \sigma[$ est l'union disjointe d'exactement 2^{r-1} d'intervalles semi-ouverts de longueur $\sum_{k=r}^{\infty} s_k$ (car il existe exactement 2^{r-1} sommes distinctes dans P_{r-1}).

6.2 Etapes de la décomposition de 3/5 en sommes d'inverses de carrés :

Etape	Liste des termes
$\frac{1}{5}$ et $\frac{2}{5}$	[2, 3, 3, 4, 6, 7, 10, 13, 30, 126, 1316, 59220, 769860]
$\frac{1}{3^2}$ à partir de 5	[2, 3, 4, 5, 6, 6, 7, 7, 8, 10, 12, 13, 30, 56, 126, 168, 840, 1316, 59220, 769860]
$\frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2}$ à partir 8	[2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 8, 9, 10, 10, 11, 12, 13, 24, 30, 56, 70, 126, 168, 308, 840, 1316, 3960, 27720, 59220, 769860]
$\frac{1}{8^2}$ à partir de 14	[2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 20, 21, 24, 28, 30, 56, 70, 126, 168, 168, 308, 840, 1316, 3960, 27720, 59220, 769860]
$\frac{1}{10^2}$ à partir de 16	[2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 20, 21, 24, 24, 28, 30, 34, 56, 70, 126, 168, 168, 240, 272, 308, 816, 840, 1316, 3960, 27720, 59220, 769860]
$\frac{1}{24^2}$ à partir de 31	[2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 20, 21, 24, 28, 30, 31, 34, 40, 56, 70, 126, 155, 168, 168, 186, 240, 272, 308, 816, 840, 1316, 3960, 27720, 59220, 769860]
$\frac{1}{168^2}$ à partir de 169	[2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 20, 21, 24, 28, 30, 31, 34, 40, 56, 70, 126, 155, 168, 175, 186, 240, 272, 308, 600, 816, 840, 1316, 3960, 27720, 59220, 769860]

TABLE 5 – Décomposition de 3/5 en somme d'inverses de carrés

6.3 Algorithme Glouton

```
from fractions import Fraction
import math



def glouton(nbre,rang,card,p):
    if nbre<0:
        return glouton(nbre+Fraction(1,(rang-1)**p),rang+1,card,p)

    if nbre==0:
        return []
```

```python

    elif card==0:
        return []

    else:
        k=math.ceil((1/nbre)**(1/p))
        k=max(k,rang)

        print(card)
        return [k] + glouton(nbre-Fraction(1,k**p),k+1,card-1,p)
```

6.4 Deuxième algorithme :

```python
from fractions import Fraction
from math import sqrt,floor


def decompose(nbre,card,rang,puiss):

    if nbre==0:
        return True,[]

    if card==1:
        p=int((1/nbre)**(1/puiss))
        if p**puiss == 1/nbre and p>=rang:
            return True,[int((1/nbre)**(1/puiss))]
        else:
            return False,[]

    else:
        x=max(rang,int((1/nbre)**(1/puiss))+1)
        while x**puiss < card/nbre:
            y=nbre-Fraction(1,x**puiss)
            d=decompose(y,card-1,x+1,puiss )
            if d[0]:
                return True,[x]+ d[1]
            x=x+1

        return False,[]



def graham(nbre,rang,puiss):

    n=1

    while not decompose(nbre,n,rang,puiss)[0]:
        n+=1

    return decompose(nbre,n,rang,puiss)[1]
```